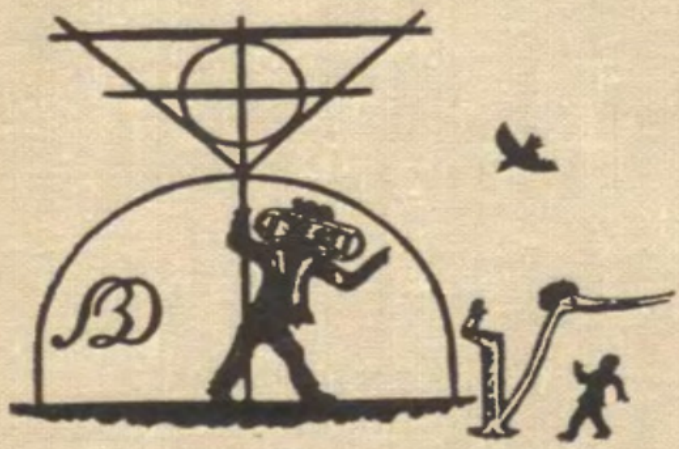
Сергей Бобров

ВОЛШЕБНЫЙ ДВУРОГ



SHOUT
SHARE
IT

Annotation

В этой книге в занимательной форме рассказывается немало интересного для тех, кто любит точные науки и математику. Читатель узнает о развитии математики с ее древнейших времен, о значении математики в технике, а особенно об одной из важнейших отраслей математики - так называемом математическом анализе. На доступных примерах читатель познакомится с элементами дифференциального и интегрального исчислений. В книге также говорится о неевклидовых геометриях и о той, которая связана с открытиями великого русского геометра П. П. Лобачевского. Читателю предлагается немало занимательных задач, многие из которых сопровождаются подробным разбором.

-

Для среднего и старшего возраста.

- ВОЛШЕБНЫЙ ДВУРОГ
  - Так, значит, давай познакомимся, любезный читатель!..
  - Схолия Первая.
  - Схолия Вторая,
  - Схолия Третья,
  - Схолия Четвертая,
  - Схолия Пятая.
  - Схолия Шестая,
  - Схолия Седьмая,
  - Схолия Восьмая,
  - Схолия Девятая,
  - Схолия Десятая,
  - Схолия Одиннадцатая,
  - Схолия Двенадцатая,
  - Схолия Тринадцатая,
  - Схолия Четырнадцатая,
  - Схолия Пятнадцатая,
  - Схолия Шестнадцатая,
  - Схолия Семнадцатая,
  - Схолия Восемнадцатая,
  - Схолия Девятнадцатая
  - Схолия Двадцатая,
  - Эпилог
- notes
  - 1

- ○ 2
- ○ 3
- ○ 4
- ○ 5
- ○ 6
- ○ 7
- ○ 8
- ○ 9
- ○ 10
- ○ 11
- ○ 12
- ○ 13
- ○ 14
- ○ 15
- ○ 16
- ○ 17
- ○ 18
- ○ 19
- ○ 20
- ○ 21
- ○ 22
- ○ 23
- ○ 24
- ○ 25
- ○ 26
- ○ 27
- ○ 28
- ○ 29
- ○ 30
- ○ 31
- ○ 32
- ○ 33
- ○ 34
- ○ 35
- ○ 36
- ○ 37
- ○ 38
- ○ 39
- ○ 40
- ○ 41
- ○ 42
- ○ 42

ВОЛШЕБНЫЙ ДВУРОГ

Научный редактор проф. И. Н. Веселовский
Издание второе, переработанное и дополненное
Рисунки В. Конашевича
Схемы и чертежи М Гетмапского и Г. Соболевского

Так, значит, давай познакомимся, любезный читатель!..

Когда вы узнаете о том, что давным-давно, в середине XVIII века, мальчик Блез Паскаль самостоятельно читал "Начала" Евклида, а девочка Софья Ковалевская[1] не так давно, в прошлом веке, ухитрилась разобраться в основах математического анализа по разрозненным листам учебника Остроградского, которыми случайно оклеили стены детской комнаты, то не удивляйтесь и не думайте, что это просто занимательные рассказы или поразительные исключения.

Что-нибудь в этом роде было в детстве у всякого, кто любил математику и затем всю жизнь работал в какой-либо ее области. Именно так, в самостоятельной работе, и проявляются первые начатки подлинного интереса к науке, именно так и растут будущие труженики на славном поприще научной деятельности.

Есть немало хороших книг, которые могли бы помочь любознательному школьнику, если он увлекается математикой.

Но нередко эти книги трудны и требуют от читателя большого напряжения, которое не всегда по силам учащемуся средней школы.

В этой книжке юным читателям дается такой материал по математике, который будит их интерес к знанию, раскрывает перед ними некоторые перспективы, позволяет представить себе, что такое математика. С другой стороны, здесь есть материал для самостоятельной работы, то есть не просто рассказы о математике, а нечто большее, что даст нашему читателю радость научного труда, радость небольшого, но все-таки заработанного собственными трудами познания.

Книга рассчитана на подростка, кончившего семь классов, и поэтому очень много в ней дать нельзя. Для примера укажем, что почти невозможно дать обзор научной деятельности Софьи Ковалевской, не говоря уже о более поздних ученых.

Однако все-таки возможно на ряде любопытных примеров ввести читателя в мир научной математической мысли. Некоторые из этих примеров принадлежат к исторически чрезвычайно важным, другие представляют собой не слишком трудные вещи, а иной раз это просто загадка, но за ней кое-что таится, и над этим стоит подумать.

А кроме того, эта книжка для того и написана, чтобы читатель понял, что математика - не только не скучная, но даже

очень увлекательная наука! Если кто ее совсем не любит - пусть хоть заглянет в книгу. И даже он найдет здесь кое-что интересное...

Наш рассказ представляет собой фантастическое путешествие по волшебным странам математического мира, но читатель и сам довольно скоро разберет, что все те добродушные, веселые и шутливые фигуры, с которыми он повстречается, только для того и появились на белый свет, чтобы помочь ему поразмыслить над тем, что он найдет на страницах книги.

Читатель узнает, как человек изобрел и усовершенствовал такую великую вещь, как математический анализ, то есть то самое, что называется "высшей математикой". Рассказ наш доводится до примеров определенного интеграла и производной. А ведь это и есть тот самый крепкий и надежный фундамент, на котором покоится вся огромная современная техника.

Вторая наша тема, которой отдано гораздо меньше внимания, - это не-евклидова геометрия. Попутно и по необходимости мы касаемся и других вопросов. В частности, у нас есть обычные разделы занимательной математики - лабиринты, уникурсальные фигуры, игра в "Дразнилку". Есть и задачи-шутки, но некоторые из них совсем не так просты и касаются вещей серьезных.

Но если доктор У. У. Уникурсальян, с которым вы познакомитесь через несколько страниц и, надеемся, подружитесь, - великий мастер говорить длинные речи, причем иной раз довольно затейливо, то из этого еще не следует, что все, о чем здесь говорится, так уж просто и легко.

Впрочем, если уж читатель не сразу разберется в древней прекрасной легенде о царевне Ариадне и ее путеводной нити, то он не должен пугаться. Наоборот, он должен запастись терпением и перечесть эту историю еще разок. Ничего не будет страшного, если он вернется к ней и третий раз. Надо все так хорошо разобрать, чтобы потом об этом понятно рассказать тому, кто совсем не читал этой книги. А как же достигнуть этого?

Да очень простым способом. Надо не просто перечитывать, а делать это в приятном обществе карандаша и бумаги. Втроем разобрать любую из наших историй гораздо легче. Не надо только забывать о том, что если всякий понимает, что школьная парта сделана из дерева, то далеко не всякий сумеет пойти в лес, срубить там дерево и сделать из него эту самую парту.

А нам с вами, чтобы научиться работать, надо непременно попробовать что-то сделать собственными руками, а не только знать понаслышке. А то ведь есть на свете такая обидная поговорка: "Слышал звон, да не знает, откуда он..." А узнать-то не

так уж и трудно: подумать не торопясь, взяться и не бросать, пока не выйдет то, что надо.

Некоторые наши темы очень просты и касаются вопросов почти что шуточных. Но и в них, если как следует разобраться, есть немало интересного и очень полезного. Можно просто пообещать читателю: если ты проработаешь всю эту книгу, ты кое-что серьезное о математике узнаешь!

Таково мнение доктора У. У. Уникурсальяна, и мы вполне к нему присоединяемся. Он сам и все его друзья будут говорить с вами весело и любезно и терпеливо будут стараться навести вас на правильную мысль. А иной раз и подразнят немножко! Да ведь это любя, обижаться не стоит!..

Нет никакой нужды читать сразу всю книжку подряд.

Тот, кто сперва прочтет то, что полегче, а потом возьмется за более непослушные задачки, ничего не потеряет.

Может быть, прочитав эту книгу, захочется познакомиться и с другими книгами по математике. Сейчас у нас есть много хороших книг для самостоятельного чтения. Целый ряд их упоминается у нас в примечаниях. Большинство из них немного потруднее, чем эта книжка. Но ничего не поделаешь, надо привыкать работать с книгой. Если в примечании книга отмечена звездочкой в скобках (*), значит она повышенной трудности. Такую книгу лучше разобрать вместе с товарищами или с руководителем.

Есть еще очень полезные книжки, где рассказывается, как жили и трудились крупные ученые. Почитаешь и увидишь, что и им не все и не всегда легко давалось, но их горячая любовь к знаниям и упорство превозмогали трудности. Есть очень хорошие книги академика С. И. Вавилова о Ньютоне, профессора В. С. Кагана - о Лобачевском, французского ученого Дальма - о математике Галуа, революционере и ученом.

Интересен целый том "Воспоминаний и писем" Ковалевской. Можно порекомендовать несколько хороших книг по истории математики:

Н. Бурбаки "Очерки по истории математики" (*), а особенно надо посоветовать прочесть книгу Д. Я. Стройка "Краткий очерк истории математики".

Впрочем, если среди наших читателей найдутся такие, которым всего этого покажется мало, то в таком особенном случае можно посоветовать заняться очень полезной и сравнительно не очень трудной книгой Я. Б. Зельдовича "Высшая математика для начинающих". В этой книжке очень много хороших примеров из физики.

А вообще не надо робеть перед наукой. Конечно, не всякий будет в дальнейшем Ньютоном или Ковалевской. Но ведь в наши дни математика нужна повсюду - не только в инженерии, не только в космонавтике, а даже и в медицине, и в изучении литературы. У нас много больших научно-исследовательских институтов, где нужны математически образованные люди: ведь работа там идет коллективная и нередко совместные усилия дают плоды исключительной ценности. Наш дорогой Пушкин говорил, что надо "в просвещении быть с веком наравне". Это не очень легко, но и не так уж трудно, если любить это дело и понимать, до какой степени оно в наши дни нужно Родине.

Первое издание "Волшебного двурога" вышло в 1948 году.

Научным редактором книги был замечательный ученый Игорь Владимирович Арнольд, безвременно скончавшийся. Он не дожил двух месяцев до выхода в свет нашей книги.

В 1959 и в 1962 годах пишущий эти строки выпустил еще две книги по общедоступной математике - два томика "Архимедова лета", на которые мы будем ссылаться время от времени. Чтобы не писать каждый раз название этих книг, мы будем сокращенно обозначать таким образом: АЛ-II, XVIII, 4.

Это значит: "Архимедово лето", том II, глава XVIII, раздел 4.

Знай, дорогой мой читатель, что немало славных русских имен вписано золотыми буквами в книгу развития науки математической! Таковы - Остроградский, Лобачевский, Ляпунов, Чебышев, Марков, Вороной, Золотарев, Федоров, Ковалевская и многие другие. И из ныне здравствующих наших математиков есть немало таких, которые обогатили мировую науку поистине высокими достижениями. Назовем хотя бы Виноградова, Бернштейна, Колмогорова... Да ведь вот беда: за редкими исключениями, для того чтобы хотя бы разобраться в том, какими вопросами они занимались, надо знать во много-много раз больше того, чем говорится в этой книге!

Теперь уж, кажется, все ясно, только надо сказать еще два слова тому, кто совсем не любит математику. Всякий понимает, что хочешь не хочешь, а считать-то надо уметь! Без этого не проживешь. А кто же такие эти ученые-математики? Чем они занимаются?

Каждый из нас слышал имя великого ученого Исаака Ньютона. Однажды он сказал, что геометрия, "будучи искусством точного измерения", была придумана людьми для того, чтобы мы, пользуясь чертежами, могли избегать утомительных вычислений. Другими словами, великий математик уверяет, что его наука дает нам возможность поменьше мучиться с вычислениями, а это ведь как раз и есть то, чего хочет человек, который не любит

математики! Но когда наука идет вперед, постоянно упрощая для нас все более трудные задачи, она в то же время дает человеку гигантские силы, и он обретает возможность делать то, чего прежние поколения не могли изучить, попять и одолеть! Вот в чем самая сила, дорогой мой читатель, не забывай об этом.

- 6 -

Теперь, когда все самое главное уже высказало, читатель может еще спросить: "А почему же в этой книжке рассказывает о математике не ученый, а писатель?" Действительно, почему? Но, на этот вопрос давным-давно ответил великий писатель Земли Русской ЛЕВ ТОЛСТОЙ, который в своей работе "Что такое искусство?" 1897 г.) говорит: "Дело искусства состоит именно в том, чтобы делать понятным и доступным то, что могло быть непонятным и недоступным в виде рассуждений".

Автор считает своим приятным долгом выразить признательность научному редактору книги проф. И. Н. Веселовскому за целый ряд ценных указаний и поправок при редактировании.

- 7 -

Схолия Первая.

в которой наш любезный читатель знакомится...

Впрочем, может быть, ты еще не совсем понимаешь, что такое схолия? Схолия, видишь ли, - это нечто очень интересное, и как-нибудь немного погодя я тебе все это изложу подробно. Ну, а теперь, конечно, ты уж и сам смекнул, что эта книжка рассчитана на довольно догадливых молодых людей. Знаешь ли ты, кстати сказать, что такое Эратосфеново решето? Если не знаешь, то я тебе и об этом тоже кое-что расскажу. Отсюда совершенно ясно, что я буду рассказывать, а ты, разумеется, будешь на ус мотать. А именно это-то и называется теперь у нас играть в схолии. Итак, внимание!

Начинается Схолия Первая, в которой читатель знакомится с Илюшей Комовым, со всей его семьей и с одним очень странным существом, про которое весьма трудно сказать сразу, было оно или никогда и не бывало...

Дело клонилось к вечеру, и пора уже было лампу зажигать.

- Илюша! - сказала мама довольно настойчиво.

Она сказала это уже в третий раз, и на этот раз Илюша даже попытался ответить маме, но, кроме неясного мычания, никто ничего не разобрал.

Налька, сестра Илюши, которая сидела у окна и упивалась “Графом Монте-Кристо”, отвела глаза от книжки, хотя оторвать Нальку от чтения было не так-то просто. Но она всегда заступалась за Илюшу перед мамой, хотя с маминой точки зрения можно было обойтись и без этого.

- Мама, он сейчас, - сказала Наля.

- Это я уже слышала.

Тут и Илюша обрел дар речи.

- Мама, - произнес он в высшей степени убедительно, - я, честное слово... сейчас...

Папа опустил газету и сказал:

- Ну, Илюша, брось-ка ты эти свои пустяки и садись есть кашу.

Илюша встал со стула, но почувствовал себя оскорбленным в своих лучших чувствах.

- Папа, - ответил он, - у меня задачка не выходит!

- Задачка твоя от тебя никуда не уйдет, - возразила мама, - а каша стынет. Поешь, а потом возись хоть до света со своими задачками.

Илюша сердито уселся за кашу, взял ложку и принялся есть с

большим аппетитом.

А затем мама убрала со стола, зажгли лампу. Потом Наля начала позевывать и не без сожаления захлопнула растрепанный том "Монте-Кристо". Илюша изгрыз весь кончик карандаша, а папа прочел всю газету. Мама сказала:

- Илюша, ты что же, правда до света сидеть намерен?

Илюша посмотрел на нее с чувством жестокой обиды. Ему хотелось ответить... Но он покосился на папу и решил отложить этот разговор, потому что папа очень плохо разбирался в препирательствах Илюши с мамой и обычно прекращал их в ту же минуту, совершенно не желая входить в обсуждение того, кто прав и кто виноват.

- Покажи папе, - предложила мама.

Илюше очень хотелось ответить: "И не подумаю", но вместо этого он вздохнул, взял задачник и медленно подошел к папе, разглядывая по дороге в сотый раз непослушную задачку.

Папа взял книгу.

- Так, - заметил он спокойно, - ну что ж тут такого?

Покажи-ка, как ты делал.

Илюша притащил тетрадку.

- Н-да, - сказал папа, - начал правильно. А теперь надо кончать. Скобки раскрывать раньше времени незачем. Ничего тут особенного нет.

Илюша посмотрел на папу, потом на пол.

- Не выходит! - сообщил он, хотя понимал, что повторять это и бесполезно и не так уж приятно.

- 9 -

- Не торопись, - ответил папа, отдавая ему тетрадку, - подумай. Это у тебя что такое?

Илюша посмотрел на строчку, которую указывал ему папин палец, и ничего не сумел ответить.

- Ну? - спросил папа.

Илюша посмотрел еще раз на спокойное папино лицо, потом на непонятную строчку и снова не ответил ни слова.

- Наверху у тебя что? - спросил папа.

- Разность кубов.

- Так. А внизу?

А что было внизу, в знаменателе, этого-то Илюша и не знал.

- Квадратный трехчлен! - сказал папа. - Неужели ты не знаешь? Проспал в классе?

- Ничего не проспал! - обиженно пробормотал Илюша.

- Допустим, - отозвался папа, - что не проспал. Но тогда - в предположении, что ты не проспал, - ты должен знать. А?

У папы была пренеприятная манера: если ему что-нибудь вот

так пробурчишь, то он начинает говорить несколько насмешливым и совершенно безразличным тоном, и тогда уж от него толку не добьешься. Вот и сейчас как раз так и вышло.

Илюша взял задачник и тетрадку и поплелся обратно. "Квадратный трехчлен? .." Да, кажется, действительно было что-то, в этом роде, по что именно, припомнить было невозможно.

- Илюша, - сказала мама, - я тебе постелила. Ложись лучше спать. А завтра утром встанешь и на свежую голову сделаешь.

Илюша молча поглядел на маму. Завтра утром надо идти в школу, а идти с нерешенной задачкой не больно-то весело.

Наля ушла спать. А часы подумали, зашипели и пробили одиннадцать. Глаза у Илюши начали слипаться, а задачка все не выходила.

Мама тихонько сказала папе:

- Ну покажи ему.

А папа так же тихонько ответил:

- Что за баловство? А если бы некому было показать? Что тут для него интересного, если я покажу? Интересно самому добиться.

Папа встал с дивана и вышел. Мама тоже ушла. Илюша сидел, подпершись кулаком, и без всякого толку разглядывал довольно простой, но совершенно непонятный ответ в конце задачника.

- 10 -

Стало совсем тихо. Илюша попробовал было закрыть глаза, но быстро их вытаращил, потому что оказалось - глаза только этого и дожидаются да того и гляди сами закроются. Он сердито встал со стула, подошел к папиному столу, постоял, потом осторожно вытащил из стопки папиных книг одну наудачу, открыл и погрузился в непонятные рассуждения о паровых котлах. Перевернув рассеянно две странички с запутанными диаграммами, он уткнулся в формулу, где около хорошо известных ему алгебраических знаков стояла какая-то длинная черная закорючка, у которой был вид важный и неприступный. "Да-а! - подумал Илюша. - Ему хорошо, папе, если он и таких штук не боится. Что ему моя задачка!.." Положил аккуратно книжку на место, уселся за свой стол и погрузился в самые неопределенные раздумья...

Какой-то странный легкий шелест донесся до его слуха.

Илюша не обратил никакого внимания, но настойчивый шорох повторился и заставил его обернуться. И тут он увидел нечто удивительное.

Страница лежавшего перед ним на столе задачника тихонько шевелилась и вроде как поскрипывала, как будто под ней что-то ползало. Илюша недовольно сморщился, сообразив, что под лист

забралось что-то вроде таракана. И как только он это подумал, справа из-за края страницы показались два тоненьких усика этого пройдохи, который - извольте радоваться! - нашел себе место для прогулок.

- Постой! - угрожающе прошептал Илюша и осторожно протянул руку, норовя половчее ухватить незваного гостя за его длинные усищи.

Но как только он их коснулся, немедленно отдернул руку, воскликнув: "Ах ты! Чтоб тебя!..", ибо эти усики сразу сомкнулись и так ущипнули его за палец, что он света невзвидел.

- Это что еще за новости? - сказал рассерженно Илюша, разглядывая красненькое пятнышко на пальце. - Да разве это таракан? Это прямо...

А под страницей опять что-то зашуршало, и какой-то тоненький голосок спросил укоризненно:

- А в каком смысле прямо, молодой человек?

Однако оцепеневший от удивления молодой человек не мог сообразить, кому и что именно надлежит отвечать на этот неожиданный вопрос.

- 11 -

Пока он размышлял над этой внезапно возникшей проблемой[2], страница задачника медленно перевернулась, а нижний ее край плавно завернулся внутрь, будто кто-то собирался эту страничку свернуть в фунтик. Илюша в удивлении протер глаза. Через мгновение некое престранное существо выпустило из крохотной своей лапки кончик странички, фунтик развернулся, и листок задачника лег на свое место. А странное существо спросило Илюшу тем же тоненьким голоском:

- Так как же это, молодой человек, насчет прямо, а?

Что вы, собственно, имели в виду мне сказать?

Илюша вытаращил глаза на своего небывалого собеседника. Важный тон этого существа совершенно не соответствовал его комариному голоску. Крохотный блестящий глазок его был чуть побольше булавочной головки, однако смотрел так покровительственно-насмешливо, что Илюша даже немного оробел.

Мальчик промолчал целую минуту и наконец спросил:

- А кто ты такой?

Собеседник снисходительно ухмыльнулся и спросил в свою очередь:

- Неужели не узнаешь?

Илюша в недоумении пожал плечами.

Перед ним на страничке задачника стоял маленький, примерно в сантиметр ростом, знак квадратного корня.

Та длинная черта направо, под которой до сих пор люди добрые писали подкоренное количество, у него раздваивалась, как клюв, а на том месте, где обычно пишут показатель корня, сверкал хитро прищуренный глаз. А слева у него была крохотная ручонка, которая в настоящий момент сделала довольно выразительный жест, который как бы говорил: "Ну-с. молодой человек?.."

Схолия Вторая,

из каковой любознательный читатель... А что же такое все-таки схолия? Это, видишь ли, нечто вроде... Кстати: ты, друг-читатель, помнишь теорему Виеты? Не помнишь? Проспал, вроде как Илюша квадратный трехчлен? Ах, ты совсем не знаешь? У вас не проходили? Ты болел? Так, может быть, ты еще мал? Другими словами, тебе еще рано играть в схолии?..

Итак, в Схолии Второй читатель узнает, как Илюша познакомился поближе с тем самым странным существом, о котором автор этой удивительно правдивой книжки даже и сам не в состоянии толком сказать, было оно или не было.

- Послушай, - начал осторожно Илюша, - может быть, все это мне снится?

- А может быть, и не снится?.. - совершенно тем же тоном отвечал ему новый знакомый.

- Нет, - возразил мальчик, - я так не могу. Ничего не понимаю.

- А как же ты можешь?

- Не знаю, - отвечал Илюша.

- Очень мило! - отвечал ему собеседник с довольно ехидной улыбочкой. - Так мы и запишем: пункт первый - ты не можешь, пункт второй - ты не знаешь. И будем полагать сию тему исчерпанной. И, значит, начнем все сначала.

- 13 -

И тут Илюша, поеживаясь от недоумения, увидел, что его новый знакомый уже вырос примерно до метра ростом и что он, оказывается, сделан из какого-то блестящего синеватого металла. И оба они стоят в какой-то неизвестной до сих пор Илюше маленькой комнате, а прямо перед ними стена, которая отдаленно напоминает классную доску.

Илюшин знакомец состроил очень гордую мину и не то что проговорил, а, можно сказать, провозгласил:

- Мое имя Радикс, что означает по латыни "корень".

Ясно?

- Ясно, - торопливо пробормотал Илюша, вдруг потерявший способность противоречить.

- А это что такое? - спросил Радикс, указывая на темную стену.

Илюша поднял глаза и увидел на стене ряд алгебраических знаков. Знаки были все знакомые, но Илюше было как-то не по себе оттого, что знаки эти не стояли на месте, а толкались, бродили по всей стене из стороны в сторону, то собирались

кучками, то вновь расходились.

- Квадратный трехчлен! - вдруг скомандовал Радикс, да так зычно, что Илюша даже вздрогнул.

- 14 -

И в тот же миг на стене воцарился полный порядок.

А Илюша в великом смущении увидел следующее:

$(x+a)(x+b) = x^2 + (a + b)x + ab.$

$x^2 + 10x + 9 = (x+1)(x+9)$

- Фу, какая ерунда! - воскликнул он. - И угораздило же меня такую простую вещь позабыть?

- Отсюда совершенно ясно, - продолжал Радикс, - что поскольку... Впрочем, этот маленький инцидент тоже можно полагать исчерпанным. Не правда ли?

Илюша еле выдавил из себя неопределенное мычание.

Но все-таки он несколько приободрился.

- Так вот, - вымолвил Радикс, - скажи, пожалуйста, как ты относишься к песенкам?

- К песенкам? .. - нерешительно повторил мальчик, не понимая, куда он клонит. - Да, в общем... как тебе сказать... ничего отношусь.

- Так не спеть ли нам песенку?

- Какую?

- А вот увидишь. Повторяй за мной и не сбивайся.

А ну-ка!

И они запели следующую песенку:

Кто усидчив и проворен,
Тот нигде не пропадет.
Он посмотрит прямо в корень...
То есть нет, совсем не в корень,
Нет, не в корень, а под корень,
Карандашик погрызет,
Поглядит и извлечет.
Кто усидчив и проворен,
Тот нигде не пропадет!

Песенка понравилась Илюше, а самое главное - Илюша заметил, что песенка эта волшебная. Волшебство же ее заключалось в том, что хоть Илюша никогда ее не слыхал, он ни разу не сбился, когда пел ее.

- Ну, что ты скажешь? - вопросил Радикс. - Ты ведь понимаешь, что автор этой песенки я, а автора хлебом не корми, а

только похвали. Что ж ты не хвалишь мою песенку?

- Очень хорошая песенка, - торопливо выговорил Илюша как только мог любезно, - но только, видишь ли, мне очень стыдно, что я запутался и забыл эту формулу...

- А у нас об этом, - вкрадчиво отвечал ему собеседник, - еще будет случай потолковать по душам. Не бойся, но забудем!

- 15 -

А пока поставим точку. Вопрос исчерпан. Вернемся лучше к песенке. Усвоил ли ты ее содержание?

- Содержание... - отвечал несколько ошеломленный Илюша, - я усвоил. То есть, видишь ли...

Тут Радикс глянул на мальчика очень важно.

- Хм... - протянул он. - Усвоить содержание дело хорошее. Но что бы ты мог ответить на эту песенку?

Илюша посмотрел на Радикса, помолчал, потом сказал:

- Может быть, если бы я просто попробовал разложить этот трехчлен на множители, вместо того чтобы сидеть да злиться, так он бы разложился в лучшем виде и я бы все вспомнил?

- Вот это дело! - воскликнул Радикс. - Хорошо сказано.

Поддерживаю и присоединяюсь... А поскольку это действительно так, то я готов предложить тебе в качестве премии еще одну песенку. Тут, видишь ли, вот какая история...

При этих словах Радикс задумчиво почесал себе бровь (потому что затылка в его распоряжении не имелось).

- Кто-то мне недавно говорил, уж не помню кто, будто ты любишь математику...

- Конечно, люблю. И даже очень, - отозвался немедленно мальчик. - Да ты не думай, пожалуйста, что я хвастаюсь! Сам Василий Иваныч в классе говорил, что мы у него с Колькой Неверовым математический актив.

- А ведь это, братец, довольно ответственное звание -"математический актив", если положить, к примеру, что Василий Иваныч говорил всерьез.

Илюша замялся. Ему хотелось согласиться, а все-таки немножко неловко самому о себе говорить как о "довольно ответственном математическом активе"...

- Ничего, брат, не поделаешь, - отвечал Радикс. - Хочешь быть в математическом активе, так нечего трусить. Давай попробуем?

Илюша не знал, что на это ответить, и спросил:

- А про какую ты песенку говорил?

Радикс улыбнулся, стал рядом с Илюшей и протянул ему свою руку.

- Это будет, - сказал он, - совершенно новая и особенная песенка - и заметь: она с секретом. Внимание!

Двадцать две совы скучали
На больших сухих суках,
Двадцать две совы мечтали
О семи больших мышах.
О мышах довольно юрких,
В аккуратных серых шкурках.

- 16 -

Слюнки капали с усов
У огромных серых сов.
Вот как жили-поживали
Эти совы на суках -
Двадцать две совы мечтали
О семи больших мышах.

- Песенка хорошая, - сказал Илюша, - только я не совсем понял, в чем тут дело.

- Я ведь тебе сказал, что песенка эта с секретом. Дано: совы, мыши и так далее, рифмы, строчки и все такое. Спрашивается: о чем повествует данное сочинение?

Илюша думал, думал, но придумать ничего не мог.

- Слабо, слабо! - отозвался собеседник. - Тогда вот ты мне что скажи: слыхал ли ты что-нибудь о музах?

- Слыхал, - отвечал мальчик. - Это такие, вроде богинь у греков были, и они разными искусствами занимались: одна театром, другая стихами, и так далее.

- Справедливо! А тебе никогда не приходилось слышать, чтобы эти музы действовали хором?

- Хм... - протянул Илюша. - Постой-ка, я как будто бы что-то слышал на этот счет... только не помню что.

- А насчет любви к родному краю?

- К родному краю? .. - удивился Илюша. - А-а! Стой-ка, я, кажется, теперь вспомнил. Это такие стихи, мне их папа уже сколько раз читал. Их сочинил Валерий Брюсов:

Свой хор заветный водят музы

Вдали от дольних зол и бед.
Но ты родные Сиракузы
Люби, как древле Архимед.

Ты об этом говорил?

И так как Радикс подмигнул, мальчик воскликнул:

- Понял! Это ты спел песенку про архимедово число. Двадцать две совы на суках, то есть наверху, - это числитель. А семь мышей - те внизу, это знаменатель. Выходит дробь двадцать две седьмых, отношение окружности к диаметру. Только ведь это не очень точное значение! У папы в справочнике я видел это число π с пятнадцатью десятичными знаками, а папа говорит, что на самом деле этим знакам и конца нет. Впрочем, папа сказал, что очень уж много знаков и не нужно. А все-таки хочется запомнить побольше. Да никак не запомнишь!

- Это пустяки! - сказал Радикс. - Могу помочь тебе и выдумать хоть тысячу песенок для этого, и все будут разные.

Про что хочешь? Про длинное π? Так я такое π тебе подарю, что с ним ты можешь делать микроскопы, телескопы и все, что хочешь. Только эту высокоторжественную песенку надлежит петь погромче:

Гордый Рим трубил победу
Над твердыней Сиракуз.

Но трудами Архимеда
Много больше я горжусь.
Надо нынче нам заняться,
Оказать старинке честь.

Чтобы нам не ошибаться,
Чтоб окружность верно счесть,
Надо только постараться
И запомнить все как есть:

Три - четырнадцать - пятнадцать -
Девяносто два и шесть!

Ну-с! - произнес Радикс. - Вот мел, вот тебе плоскость, то есть

стена, она же доска, пиши!

Илюша взял мел и написал на стене:

3,1415926...

- Ясно. Теперь не забуду. Превосходная песенка!

- Песенка полезная, - отвечал, задумчиво улыбаясь, Радикс. - Ты можешь быть уверен, что это приближенное значение π годится для самого точного расчета, потому что если ты возьмешь даже не семь, а только шесть знаков, то и тогда получишь прекрасные результаты. Если, например, вычислять длину окружности, диаметр которой равен одному километру, то ошибка будет меньше миллиметра... В пятом веке нашей эры китайские математики предложили дробь 355/113 в качестве приближенного значения π. Эту дробь запомнить нетрудно.

Напиши по два раза три первых нечетных числа - единицу, тройку и пятерку, - то есть 113355, раздели эти шесть цифр на две группы, по три цифры в каждой: вторая будет числителем, а первая - знаменателем. Просто и ясно!

- Ловко! - ответил Илюша улыбаясь.

- Кстати, - добавил Радикс, - известно ли тебе, что египтяне полагали, что площадь круга равна квадрату восьми девятых диаметра? Если ты припомнишь формулу площади круга, то легко можешь найти, чем египтяне заменяли π. И тогда увидишь, что египетское приближение не так уж плохо.

- 18 -

Вавилонские математики - древние звездочеты, халдеи - иногда считали π равным просто трем. Они исходили из того, что радиус шестикратно помещается в окружности в качестве хорды, и это деление круга сперва на шесть частей, а потом на двенадцать и привело к первому, очень неточному значению числа π, которое было принято равным 3,0. Это же значение приводится дважды и в библии. А индусы полагали, что корень квадратный из десяти очень близок к числу π. Ты это и сам легко можешь проверить на бумажке[3]. Тебе, быть может, небезынтересно будет узнать, что в первом русском учебнике математики, в "Арифметике" Леонтия Магницкого, которая вышла в свет в самом начале восемнадцатого века, первое значение для π, которое узнали на Руси, как раз и было архимедовым числом, то есть равнялось двадцати двум седьмым.

И если ты действительно любишь математику, то так и быть, я могу тебе подарить на память о нашей встрече совершенно замечательное приближение для π. В нем довольно много знаков, а нашел его математик Шэнкс лет восемьдесят тому назад. Я так полагаю, этого тебе хватит! Вот оно какое:

π = 3,
14159 26535 89793 23846 26433 83279 50288
41971 69399 37510 58209 74944 59230 78164
06286 20899 86280 34825 34211 70679 82148
08651 32823 06647 09384 46095 50582 23172
53594 08128 48111 74502 84102 70193 85211
05559 64462 29489 54930 38196 44288 10975
66593 34461 28475 64823 37867 83165 27120
19091 45648 56692 34603 48610 45432 66482
13393 60726 02491 41273 72458 70066 06315
5S817 48815 20920 96282 92540 91715 36436
78925 90360 01133 05305 48820 46652 13841
46951 94151 16094 33057 27036 57595 91953
09218 61173 81932 61179 31051 18548 07446
23799 62749 56735 18857 52724 89122 79381
83011 94912 98336 73362 44065 66430 86021
39...[4]

В этот самый миг вдруг где-то сбоку раздалось оглушительно-грозное громыхание, а вслед за ним послышался такой пронзительный шип, что Илюша даже вспомнил, как шипит паровоз, когда машинист выпускает пар. Только здесь, видимо, шипел не один паровоз, а штук десять сразу...

- 19 -

Илюша невольно посмотрел на Радикса и очень удивился. На тощем личике Радикса был написан неподдельный ужас.

Его длинный клюв-ротик раскрылся, зубы стучали, глаз вытаращился.

- Что такое? - спросил шепотом Илюша.

- Тесс! .. - зашипел на него Радикс. - Молчи, молчи! Может быть, это еще и не он... И зачем я только вылез из моего милого родного задачника!

- Да что такое? - переспросил Илюша, которому тоже стало жутко. А когда он снова поглядел на Радикса, то заметил, что его новый знакомец делается от страха все меньше и меньше, и шепот его едва доносился до мальчика.

- Кажется, - пискнул он снизу еле слышно, - я должен погибнуть!

И в тот же миг перед Илюшей внезапно появился большой светлый квадрат. По нему пробегали какие-то странные тени, так что Илюше показалось, что у этого квадрата есть рожица, которая уставилась на Радикса самым ехидным образом, как будто говоря:

"Вот ты где попался, голубчик!" А затем рожица показала язык Радиксу.

- Что это? - прошептал мальчик.

- Квадрат! - раздался комариный голосок Радикса откуда-то с самого пола. - Сейчас он меня... того... возведет!..

Возведет... и крышка!

Как ни струхнул Илюша в эту минуту, но все-таки сообразил, что действительно, если его приятеля Радикса возведут в квадрат, то от него не много останется.

А светлый квадрат, корча страшные рожы и плотоядно облизываясь, все приближался.

- Послушай... - простонал несчастный Радикс.

Но тут снова раздался пронзительный свист, который заглушил слова Радикса, и перед Илюшей поднялась большая серая туча, в тени которой сперва померк, а затем и совсем исчез сердитый квадрат. И вот тут-то из этой огромной тучи со страшным свистом вырос громадный черный змий, ростом примерно с трехэтажный дом. Где-то высоко покачивалась, изящно согнувшись, его тонкая головка, а над ней сиял драгоценным пламенем какой-то странный знак вроде перевернутой набок восьмерки. Илюша смотрел на это невообразимое чудовище со смешанным чувством удивления, страха и любопытства. Он смутно припоминал, что этот грозный гигант ужасно похож на что-то такое, что он совсем недавно видел в одной папиной книжке.

- 20 -

- Величайший Змий! - еле пискнул снизу Радикс.

Тут серая клубящаяся туча рассеялась, и мальчик увидел во весь рост этого колоссального Змия с его согнутой вправо шеей и загнутым влево хвостом. Змий взглянул на мальчика равнодушно и надменно, но глаза его блеснули холодным пламенем, когда он заметил несчастного, крохотного Радикса, который теперь стал ростом с Илюшину ладошку и совершенно растерялся от ужаса.

Сверху раздался страшный, размеренно медленный, словно металлический голос.

- Кто, - произнес он важно, - в дивных владениях ВОЛШЕБНОГО ДВУРОГА осмеливается без должного почтения упоминать имя нашего прославленного учителя, великого Бриарея геометрии и защитника прекрасных Сиракуз?

- Величайший! - простонал насмерть перепуганный Радикс. - Величайший! Многославный! Пресветлый Змий! Отец змиев!.. О ты, Колумб площадей и Васко да Гама объемов!

О могущественный покровитель винных бочек! Во имя учителей наших, преславного Кавальери, великого Паскаля,

бессмертного Ньютона, счастливейшего из смертных...

- Умолкни, нечестивец! - грозно произнес Великий Змий. - Ты должен быть уничтожен за твою дерзость!

Тут Илюша не выдержал. Уничтожать бедного Радикса только за то, что он показал ему π, вычисленное с такой замечательной точностью, показалось Илюше совершенно невыносимой жестокостью.

- Глубокоуважаемый Великий Змий, - сказал Илюша твердым, хотя и дрожащим голосом, - я, конечно, только еще в восьмом классе, но ведь он не нарочно! Просто он мне рассказывал про длинное π. Правда, он не виноват!

Блестящие очи Змия обратились к Илюше и как будто только впервые заметили его.

- Мальчик... Человечье дитя! Как он сюда попал?

Схолия Третья,

при помощи каковой любознательный читатель узнает еще много интересного о приключениях глубокоуважаемого Ильи Алексеевича в дивных владениях ВОЛШЕБНОГО ДВУРОГА. Здесь он встретит известное страшилище, по имени Элефуга, почтенного старца, которому недавно пошел семьсот сорок четвертый годик от роду. Затем появляется еще один персонаж, не столь квадратный, сколь насмешливый, и отправляет Илюшу в довольно скучную прогулку, во время которой наш герой встречает очень маленького, но весьма проворного попутчика, а по дороге внезапно выясняется, что правая рука может иногда вывести человека из большого затруднения, если ему уж так не терпится познакомиться с очаровательной Розамундой. Имей в виду: все, что говорится в этой схолии, чистая правда, что и будет доказано в Схолии Четвертой more geometrico, то есть по обычаям геометрии.

Илюша беспомощно оглянулся и не сразу рассмотрел Радикса, который уныло глядел в сторону и вид у него был такой, как будто под его черту не число поставили, а одну только запятую от десятичной дроби и дожидаются, что ж он теперь будет делать?.. Громадный Змий посматривал со своей высоты на Илюшу и, по-видимому, дожидался ответа. Вид у него был довольно суровый. Илюша хотел было сказать, что он просто запутался с квадратным трехчленом, но только и мог произнести: "Я..." - и на этом замолк.

- 22 -

- Ты? - вопросительно повторил Великий Змий, не спуская с него своего немигающего взора, который просто насквозь пронизывал Илюшу.

И вдруг Илюша не выдержал и решительно сказал:

- Мне хочется посмотреть, и... мне интересно! Я хочу узнать! Да!

- Что же ты хочешь посмотреть, мальчик? - спросил Великий и Совершенный Змий, отец змиев.

- Я, - сказал Илюша, - очень люблю математику...

И если у меня эта задачка не выходила, так это не оттого, что я лентяй. Мне хочется посмотреть и узнать... про все.

- Про все? - спросил Змий, видимо немного удивленный. - А не много ли ты хочешь?

- Не знаю. Только я буду очень стараться, потому что мне интересно, и вообще... я хочу быть математиком!

- А может, лучше из рогатки? - спросил Змий, и Илюше показалось, что это страшное чудовище насмехается над ним. - Или волейбол, например? - продолжал Змий. - Саженками наперегонки? На лыжах с горки?

- Саженками я хорошо умею, - отвечал Илюша, вспомнив, как приятно плыть через речку в прохладной воде, а над головой у тебя звенят синекрылые стрекозы, - и волейбол тоже штука хорошая. - Только мне хочется быть математиком.

- Так, - сказал Великий Змий. - Но ты понимаешь, что это не так просто? И не струсишь?

- Нет! - твердо ответил Илюша. - Трусить не буду. Только. .. вы, пожалуйста, простите Радикса...

- Посмотрим, - медленно и надменно процедил Волшебный Змий сквозь зубы таким тоном, который не предвещал ничего хорошего.

И вслед за этим он медленно расплылся в воздухе и исчез.

Илюша облегченно вздохнул, обернулся и с трудом заметил внизу малюсенький радикал, не больше двух миллиметров ростом.

- Ну, видишь, он ушел! - сказал ему Илюша. - Значит, он не сердится.

- Не сердится! - отвечал Радикс, понемногу вырастая до пяти сантиметров. - Плохо ты его знаешь. Вот начнут теперь тебя водить по Великим Испытаниям, тогда посмотрим, что ты запоешь!

- А что такое Великие Испытания?

- Вот увидишь, - уныло произнес Радикс. - Не обрадуешься. .. Однако, разумеется, коль скоро он сказал...

- Что значит "коль скоро"? - спросил Илюша.

- "Коль скоро" - значит "если", - грустно отвечал Радикс.

- 23 -

- А почему же ты не говоришь просто "если"?

- "Почему, почему"!.. - сказал Радикс рассердившись. - Так полагается.

Например: коль скоро мальчик пристает к почтенным и таинственным существам с разной чепухой, он, возможно, подвергнется физикальному поучению, например, получит березовой каши сколько влезет. Угощение на славу.

- Ну что это такое! - воскликнул возмущенный Илюша. - Я думал, ты что-нибудь объяснишь...

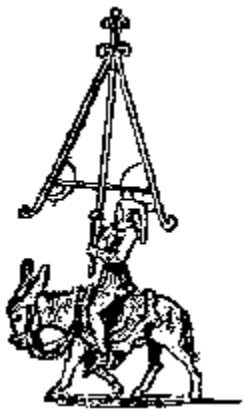
- Как сказать! Роджер Бэкон, который жил в тринадцатом веке и которого звали Доктор Восхитительнейший и считали колдуном, хотя он просто был замечательный по тем временам физик и философ, утверждал, что только розгами и можно

вогнать в мозги ученика первые четыре теоремы из одного старинного учебника геометрии, а пятая теорема уже называется Элефуга, что значит "бегство несчастного".

- А сам-то он все-таки не убежал! - с торжеством ответил Илюша. - Да и я, например, всю уж планиметрию прошел, и без всякой березовой каши.

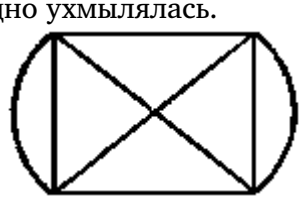
- Н-да, - неохотно отозвался Радикс и, помолчав, добавил: - А знаешь, что это была за теорема, о которой говорили такие страшные вещи? Вот что она гласит: "В равнобедренных треугольниках углы при основании равны, а если продолжить равные стороны, то и углы под основанием равны". Как по-твоему: трудная теорема?

- По-моему, нет, - ответил Илюша. - Чего ж тут трудного? Я бы так поступил: перегнул бы треугольник по высоте, то есть по оси симметрии. По-моему, простая теорема.



- Ну вот, - отвечал Радикс, - так представь себе, в давние времена ее еще называли "ослиным мостом", то есть таким местом, дальше которого упрямого лентяя сдвинуть невозможно. А впрочем... Сейчас ведь дело-то не в этом.

В это время слева раздались какие-то очень четкие шаги - раз, два! раз, два! - вроде маршировки... Илюша не спеша обернулся и увидел престранного человечка, у которого вместо головы был квадрат, перечеркнутый из угла в угол двумя диагоналями, а с обоих боков этот квадрат замыкался двумя дугами. Странная рожица довольно ехидно ухмылялась.



- Начинается! - пробормотал Радикс с досадой.

- Привет! - сказала квадратная рожица, уморительно

гримасничая. - Привет, прелестный мальчик, очень рады вас видеть! Давно дожидаемся. Любопытство тоже вещь не лишняя, как сказал один толстый сом, проглотив утенка, который собирался клюнуть его в самый ус.

- Эх, - сказал Радикс на ухо Илюше, - ведь вот пришлют тебе такую ехиду! Всю душу вымотает.

- Прошу вас, очаровательный юноша! - галантно произнесла квадратная рожица, отвешивая низкий поклон и расшаркиваясь. - Будьте уж так любезны, снизойдите к этой маленькой прогулке.

В высшей степени важно для моциона, как сказал один рассеянный паренек, споткнувшись о здоровенную тумбу...

Илюша посмотрел на Радикса и увидел, что его новому другу вовсе не охота на все это смотреть... Перед Илюшей вдруг выросла синеватая стена, а в ней небольшое круглое отверстие, через которое можно было пролезть.

- Замечательно уютная прогулка! - сообщил квадратнорожий человечек. - Прелестная Розамунда ждет не дождется вашу милость. У нее там масса всяких развлечений. Прошу вас, не стесняйтесь.

Илюша, не совсем понимая, куда клонят эти загадочные речи, все же полез в отверстие. Радикс было сунулся туда же, но квадратнорожий человечек погрозил ему пальцем. Илюша оглянулся и понял, что остался один. Он пошел по длинному коридору, который, петляя, заворачивал то в одну, то в другую сторону; несколько раз он проходил в какие-то двери и опять шел по бесконечным переходам, выходил на перекрестки, сворачивал, попадал в тупики, возвращался и снова поворачивал и, наконец, стал замечать, что уже не может понять, был он на этом месте или только что пришел сюда в первый раз. Тогда он решил вернуться, но и это оказалось очень трудно: невозможно было сообразить, в какую сторону идти. Он пошел наугад, дошел до

синеватой стены, остановился и, покопавшись в кармане, достал кусочек мела. Потом, двинувшись дальше, стал ставить крестики у поворотов. Наконец, когда уж он совсем выбился из сил, он увидел знакомое круглое оконце, вылез в него и увидел унылую фигуру Радикса.

- Ну-с, - сказал Радикс, весьма кисло усмехаясь, - как тебе понравилась прелестная Розамунда?

- 25 -

- Какая там Розамунда! - грустно произнес Илюша. - Ходил, ходил по этим закоулкам... и...

- И вернулся не солоно хлебавши, - резюмировал Радикс.

- Я пойду опять, - сказал Илюша. - Ведь не может быть, чтобы нельзя было пройти?

Радикс промолчал, а Илюша снова полез в оконце. На этот раз он пошел в другую сторону. Снова попал в какую-то дверь, и опять пошли одинаковые коридоры, нескончаемые тупики, повороты, петли, перекрестки с несколькими дверями, и он по пять раз возвращался на то же самое место.

- Вот мучение! - сказал Илюша, а потом позвал: - Радикс! А, Радикс!

- У телефона, - ответил ему голос Радикса неизвестно откуда.

- Как глупо! С тобою серьезно, а ты тут с телефоном каким-то...

- Ах, глупо? - ответил Радикс неизвестно откуда. - Кладу трубку.

- Нет-нет, не надо! - заторопился Илюша. - Я хотел тебя спросить: хорошо, что я ставлю крестики?

Наступила полная тишина.

- Радикс! - позвал Илюша.

- Я вас слушаю.

- Что же ты не отвечаешь?

Опять тишина.

- 26 -

- Фу! - сказал Илюша. - Ну, тогда так. Если ты молчишь, то я буду так считать: молчание есть знак согласия. Ты слышишь?

- Радикс у аппарата.

- Ну, так как же?

Опять наступило молчание. Илюша решил рассматривать это как утвердительный ответ. И снова пошел дальше. Еще несколько раз он попадал в новые двери, но неизменно выходил все к той же синеватой стене. Наконец опять позвал Радикса.

- Кто говорит? - спросил Радикс важно.

- Точно ты не знаешь! - сказал обиженно Илюша. - Ты мне скажи... Это, наверно, лабиринт? Да?

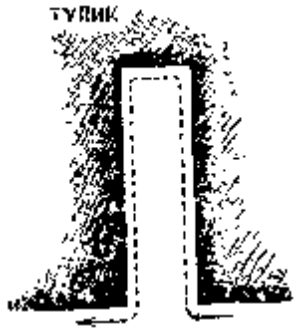
Полная тишина была ему ответом.

- Где-то я, в какой-то книжке видел, - грустно продолжал Илюша, не дождавшись ответа, - только там с карандашом не так уж трудно...

- Еще бы! - отвечал невидимый Радикс. - Там перед тобой план, ты все видишь, а вот когда его нет...

И Радикс снова умолк, Илюша обрадовался. То, что сказал сейчас Радикс, показалось ему косвенным утвердительным ответом на его вопрос о лабиринте. Он вспомнил: в этой книжке было прямо сказано, что непроходимых лабиринтов не существует.

После долгих блужданий и размышлений Илюша так устал болтаться по этим совершенно голым коридорам, что стал опираться рукой на стену. И тогда вдруг ему пришло в голову, что если он идет вперед и не отпускает правую руку от стены, то, значит, уже наверное куда-то двигается, а не просто путается, ибо самое неприятное было в том, что никак не поймешь - был ты здесь или нет. А таким образом как будто можно исследовать весь лабиринт или, на худой конец, хоть часть его...



Вдруг из-за угла какой-то маленький зверек с яркой лампочкой на лбу опрометью бросился к Илюше, остановился, будто в недоумении, поводил туда-сюда своей лампочкой-глазком... Снова куда-то стремглав бросился и исчез. Немного он напоминал мышку.

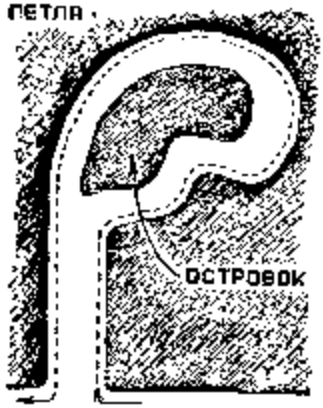
Илюше пришло в голову попробовать определить, что именно он имеет в виду, когда говорит сам себе, что хочет "исследовать ту или иную часть лабиринта".

- 27 -

Подумав, он решил начать с самого простого - с тупика. Что значит исследовать тупик, если ты идешь, касаясь правой рукой его стены? Это значит, что дойдешь до его замыкающей стенки, пройдешь вдоль нее, а потом выйдешь из тупика Назад, касаясь степы той же правой рукой.

Но касаться ты будешь уже не той стены, которая была справа, когда ты вошел в тупик, а другой - противоположной. Ты пройдешь таким образом тупик два раза, туда и обратно. Если ты попадешь в петлю, то можешь ее рассматривать тоже как тупик, но с некоторым островком посредине.

Ты пройдешь всю петлю и вернешься к тому месту, с которого начал. Островок все время будет находиться слева от тебя, и если в нем нет дверей, то можно им и не интересоваться.



- Самое, по-видимому, опасное в лабиринте, - рассуждал Илюша, - это не вовремя сменить руку, ибо если ты, идя по петле мимо островка, сменишь руку и будешь держаться стены островка, то так и будешь ходить вокруг этого островка.

А ошибку эту очень легко не заметить, потому что петля может быть очень сложной.

Сделав еще несколько шагов, мальчик остановился и сказал себе:

- Кажется, я придумал! Дело в том, что поскольку у лабиринта есть только один вход, то, во всяком случае, это правило правой руки дает возможность вернуться к выходу, как бы далеко я ни зашел. Кажется, я придумал!

Снова откуда-то выскочила та же мышка и, не останавливаясь, промчалась в обратном направлении...

Тут Илюша снова позвал Радикса. Прошло несколько секунд, и он услыхал ответ:

- К вашим услугам!

- Послушай, Радикс, - осторожно начал Илюша, - как ты думаешь, если я буду все время - держаться правой рукой за стену? То есть, конечно, можно и левой, но только все время одной и той же рукой. По-моему, тогда уж я не могу здесь заблудиться.

Воцарилось полное молчание. Илюша подождал, подождал и еще позвал Радикса. Но на этот раз тот совсем не отвечал.

Илюша сперва было струхнул, а потом подумал, что, быть может, столь глубокое молчание как раз и означает, что он догадался... Но делать было нечего, Радикс не отзывался, и Илюша пошел дальше.

- 28 -

Долго он ходил из коридора в коридор и наконец, совершенно замучившись, вошел еще в какую-то дверь. И когда он в нее вошел, ему показалось, что он услыхал нечто похожее на

чей-то очень тихий вздох облегчения. Он позвал Радикса, но ответа не было. Илюша радостно усмехнулся, теперь уже совершенно уверенный в том, что наконец попал на правильный путь, и с новыми силами двинулся дальше.

Навстречу ему сейчас же попалась мышка, которая бежала очень быстро. Добежала до Илюши, уткнулась в него носиком, отскочила, обежала его два раза кругом, а через минуту выскочила с другой стороны и опять умчалась...

Мышка была проворная и соображала быстро.

Схолия Четвертая,

с помощью каковой читатель знакомится с прелестной Розамундой и узнает, что красота этой особы имеет, как это ни странно, обратную сторону. Попутно выясняется, что эта гостеприимная красотка (а к ней не так-то легко попасть на прием), приходится тетушкой каждому гостю, который согласится пройти сравнительно небольшое расстояние вниз головой, а потом получить урок, как надлежит поступать с дамами, которые выходят из себя, а это прямиком подводит тебя к задаче, как из восьми квадратиков сделать сорок с лишним тысяч совершенно таких же. Читатель more geometrico может сам убедиться, что все, рассказанное в Третьей и Четвертой Схолиях этой удивительной книжки, сущая правда. Впрочем, если кто-нибудь этому не поверит, то горю помочь нетрудно. Ясно, что с карандашом в руках прогуляться по плану лабиринта - дело не очень хитрое. Но тот, кто пожелает испытать именно то, что испытал Илюша, гуляя по настоящему лабиринту, должен поступить иначе. Надо взять кусочек плотной бумаги, вырезать в середине его небольшое отверстие, чуть пошире коридорчика лабиринта на плане, наложить эту планшетку на план, как раз на вход в лабиринт, и двигаться вперед, передвигая отверстие вдоль коридора. Вот тогда читатель действительно попадет в положение Илюши, ибо он будет видеть только небольшой кусок коридора, по которому идет.

- 30 -

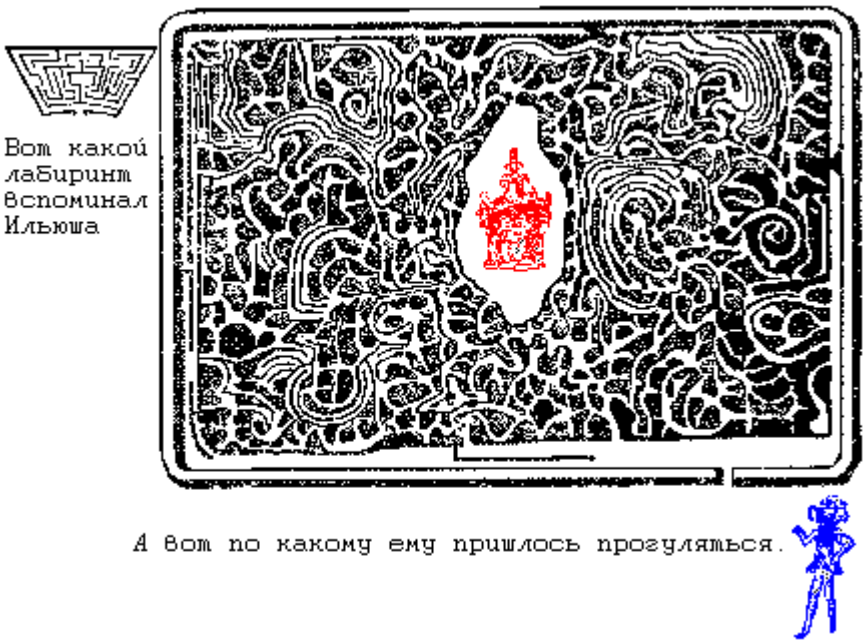
Описывать дальнейшее путешествие Илюши нет никакой надобности, потому что оно было совершенно таким же, как и раньше. Разница была только в том, что Илюша бродил там часа два, заходил в три дюжины тупичков, но ни разу не попал назад к синеватой стене, и это наполняло его надеждой.

Вскоре он вышел на довольно широкую площадку, где пол был зеленый, в разных красивых узорных прожилках, точках, петельках, линиях. Все было очень запутанное, но довольно приятное. А посреди площадки стоял маленький очень хорошенький домик, тоже изукрашенный разными узорами. Под самой его крышей висело множество серебряных колокольчиков, которые, едва только Илюша вышел на площадку, отзвонили какой-то очень веселенький марш и тут же повторили его еще раз.

Илюше так понравилась эта музыка, что он даже остановился послушать.

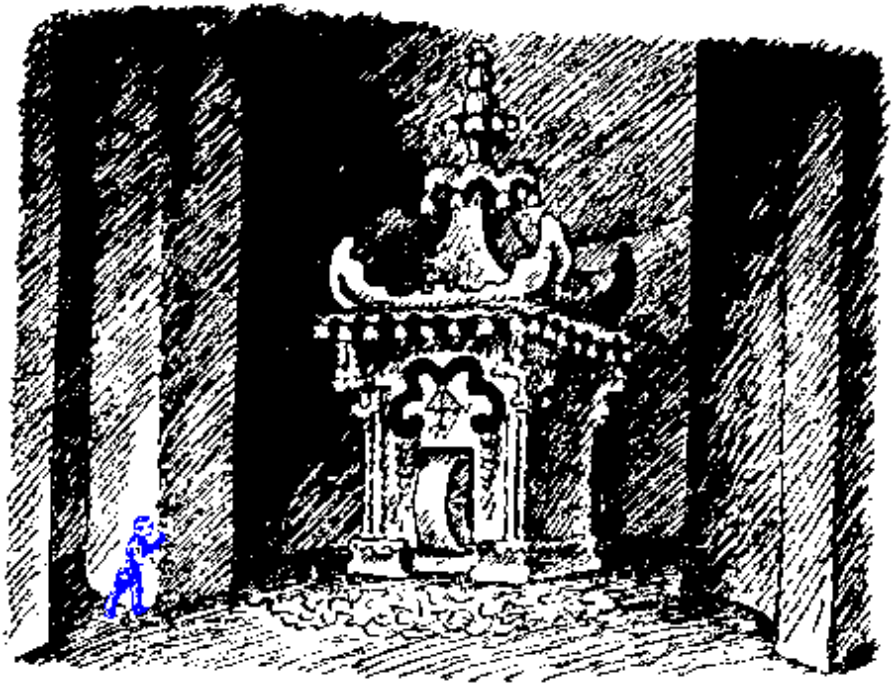
Затем музыка кончилась. Илюша немного подождал, но

колокольчики больше не звонили.



- 31 -

Илюша подошел к этому необыкновенному домику, обошел его кругом и наконец нашел что-то вроде двери, которая почему-то была выпуклая, точно ее сзади долго гладили каким-то цилиндрическим утюгом.



Справа у двери внесла небольшая табличка, на которой аккуратно и четко было написано:

ПРИЕМ

от 22 часов утра до 10 часов дня

(перерыв на обед от 3 часов до 11 часов)

- Что такое? - пробормотал обескураженный Илюша. - Двадцать два часа - это десять часов вечера, а здесь написано "утра"? А десять часов... это опять вечером, а тут написано "дня"? Какой же это прием, когда он кончается в ту же секунду, когда начинается? И перерыв с трех часов до одиннадцати, целых восемь часов подряд они обедают! А в десять уже прием кончается. Что такое?

Илюша постоял, перечел табличку, еще раз убедился, что он ничего не понимает, пожал плечами и потом осторожно постучался.

- Ах, это вы, молодой человек! - раздался из домика пискливый и скрипучий голос. - Ах, как я тронута! Ах, как это мило, что вы наконец посетили бедную, всеми покинутую Розамунду! Ну, что же вы там без толку топчетесь, прелестный юноша? Идите прямо по двери.

Илюша снова взглянул на дверь в еще большем недоумении и спросил:

- То есть как это "по двери"?

- Очень просто, - отвечал скрипучий голос. - О великая богиня Лилавати! Почему судьба посылает ко мне таких отменных дураков, которые даже не умеют по двери пройти?

Говорят вам: идите, молодой человек, так извольте слушаться!

Молодой человек, которому поднесли такой отменный комплимент, почесал в затылке и занес ногу на дверь. Тут он заметил, что выпуклая дверь, как только он на нее наступил, начала как-то странно изгибаться на манер винта. Выяснилось, что на двери есть какие-то незаметные горизонтальные черточки, на которые можно спокойно ставить ноги и подниматься наверх.

Двигаясь таким образом, Илюша увидел, что, поднимаясь, все время сворачивает куда-то вправо. Затем он поднялся на самый верх и тут заметил, что каким-то образом очутился уже внутри домика. И при этом вниз головой! Он было собрался испугаться, но потом раздумал, пошел храбро вперед и попал прямо на пол. И при этом вверх головой.

- Здравствуйте, - сказал немного опешивший Илюша. - Какая у вас странная дверь!

- Ну, что тут странного? - воскликнула хозяйка. - Односторонняя поверхность. Куда проще обыкновенной поверхности: у той две стороны, а у этой всего одна. Гораздо проще!

Разве не ясно?

- Как это так "одна"? - удивился Илюша.

- Ах, великая Лилавати! - взвизгнула хозяйка. - Но ведь вы же не переходили на другую сторону?

- Нет, - ответил Илюша, глядя на нее во все глаза и пока еще ничего не понимая.

- И все-таки очутились здесь, то есть по другую сторону двери? Ну, вот и всё. Очень просто! Вы потому очутились по другую сторону, что у этой двери только одна сторона и есть, та самая, по которой вы шли. Чего же проще? Малое дитя и то догадается. Ну, поняли вы наконец?

- Ничего не понимаю! - сказал Илюша и уставился на хозяйку.

- 33 -

Перед ним сидела коротенькая толстенькая особа, очень похожая на резиновую куклу. Она сидела в узорном креслице, ножки ее не доставали до полу, на башмачках были бантики, а длинный ее язычок вился в воздухе. Он то почесывал левую ладонь Розамунды, то обдергивал ее коротенькую юбочку. Выпученные глазки ее, медленно поворачиваясь над крохотным вздернутым носиком, внимательно осматривали гостя.

Вдруг ее язык стрельнул прямо к Илюше и пожал ему руку.

Илюша машинально пожал язык и пробормотал еще раз:

- Здравствуйте!

- Ну, теперь поняли?

- Не-ет, - нерешительно вымолвил Илюша.

- Фу-у! - произнесла Розамунда. - Вы меня прямо выводите из себя.

- Я... - начал было Илюша.

- Вывел! Вывел! - вдруг во всю глотку закричала Розамунда.

И тут же в один миг вся она вывернулась наизнанку. Все формы были как будто такие же, только совершенно навыворот.

Самое неожиданное, однако, заключалось в том, что длиннейший язык Розамунды оказался теперь во всю длину свою на свободе. Он сделал несколько вкрадчивых движений, как бы осматривая окрестность, а потом вдруг взвился вверх, и так стремительно, что Илюша подумал, не догадался ли язык, что теперь он хозяин положения и, следовательно, может действовать, как ему заблагорассудится.

- Вот видите, что вы со мной сделали! - закричала изнутри самой себя Розамунда. И голос у нее теперь стал глухой, точно у щенка, который свалился в бочку и там жалобно скулит.

- Что же теперь делать? - растерянно спросил Илюша.

- О богиня! - взвизгнула изнутри Розамунда. - Вы видите мой язык? Помогите мне поймать его!

- 34 -

Легко это было сказать, но не так-то просто сделать: язык Розамунды точно догадался, что его хотят поймать, и начал метаться теперь по всей комнате с бешеной быстротой. Он задевал за все, что подвертывалось, и хлестал, словно громадный кнут, по всем предметам, которые так и летели кувырком во все стороны.

- Почему у вас там такой шум? - глухо взвизгнула Розамунда. - Чего же вы думаете?

Дайте мне мой язык!

- Ваш язык!.. - вскрикнул Илюша, еле увертываясь от расходившегося языка. - Он взбесился!

А язык в эту минуту поймал Илюшу за ногу, повертел им в воздухе и бросил его прямо в стену. Илюша ударился об стену и, по закону "угол падения равен углу отражения", отлетел, ударился в другую стену, потом в зеркало и, наконец, попал на пол.

- Да что ж с ним делать? - в ужасе закричал, забравшись под стол, Илюша. - Он скоро весь домик разнесет!

- Не нужно было меня выводить из себя, противный мальчишка! - глухо выла Розамунда. - Поистине язык мой - враг мой. И всех моих друзей тоже. Засуньте мне его в рот, умоляю вас во имя милостивой богини Лилавати!

Илюша осторожно выполз из-под стола, еле вырвался от норовившего снова ухватить его языка, подскочил к вывернутой наизнанку Розамунде и кое-как впихнул ей часть языка в рот. Язык упирался, бился, вился, но ничего не мог поделать.

От отчаяния он даже попал в чернильницу самым кончиком и, воспользовавшись этим, написал тут же на потолке очень странное слово, а именно:

Но тут Розамунда втащила его внутрь. Тогда Илюша, догадавшись наконец, как ей надо помочь, ухватился за язык у его основания и дернул изо всех сил. В мгновение ока Розамунда как ни в чем не бывало опять уже сидела на своем креслице и задумчиво поправляла бантик на туфле кончиком своего бесконечного языка, который начал прилежно прибирать Розамундову светлицу.

Хозяйка теперь взглянула на Илюшу довольно

снисходительно.

- Ну, пустяки! - пробормотала она. - Забудем это маленькое недоразумение.

- Скажите, - осторожно начал Илюша, - а что у вас там написано около двери насчет приема? Я не совсем понял. Если вы, например, принимаете с двадцати двух часов до десяти утра, то вы, значит, принимаете ночью. Но в таком случае зачем же вы пишете, когда у вас днем бывает перерыв, если вы все равно днем не принимаете?

- Терпеть не могу объяснять! - закричала хозяйка. - Самому надо понимать. Есть у вас голова на плечах? Извольте ею работать. Может быть, я еще сама не понимаю - вы откуда знаете? Так вот и извольте, как любезный гость, все мне рассказать. Да не как-нибудь, а так, чтобы мне приятно было послушать. А то я и слушать не захочу. А может быть, захочу.

И снова вдруг у самых ног Илюши проворно проскочил маленький серенький зверек, которого Илюша уже три раза видел во время своих скитаний по лабиринту. Мальчик только покосился на него, но тот остановился на всем бегу, приподнялся на задние лапки, правой лапкой расправил свои пушистые усики, метнул хвостиком туда-сюда и тончайшим голоском (в котором слышалось что-то вроде "фона" в настраиваемом радиоприемнике) заявил:

- А я умею! А я пробегу! Туда и сюда!

- Да? - снисходительно процедила Розамунда, на миг смягчившись. - Рада слышать. Похвально! А как поживает мой добрый старичок Радикс? Ты его видела?

Мигом странный зверек мелькнул по полу и исчез. А через секунду вернулся, снова приподнялся и заявил:

- Благоденствует. Шлет низкий поклон и желает вам здравствовать многие лета!

Немедленно колокольчики грянули на все голоса:

- Радикс благоденствует! Динь-динь-динь! Мышка лабиринствует! Динь-динь-динь! А ты не умеешь!

- Что это значит? - спросил Илюша. Ему вдруг пришло в голову, что болтливые колокольчики звонят именно про него, будто он чего-то "не умеет"!

- Мышка у меня памятливая, не то, что некоторые, у которых в одно ухо войдет, а в другое тут же выскочит.

Илюша стоял и поеживался, не зная, что сказать. В это время язык Розамунды, медленно выполз из ее ротика и начал завиваться в воздухе, изображая сперва нечто вроде волнообразной линии, а затем какую-то штуку, похожую на

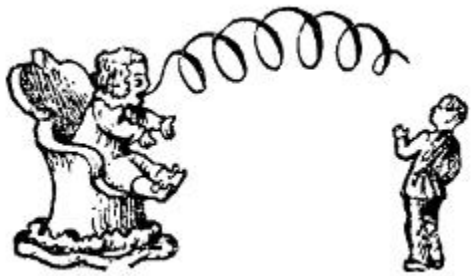
соленоид, а потом винтовую линию. Линия вилась, покачивалась, и Илюша невольно залюбовался ее узором.

- 36 -

Розамунда, однако, вышла из задумчивости и сама теперь не без интереса следила за теми выкрутасами, которые творил ее язык в воздухе.

- Красиво! - сказал Илюша.

- Ее зовут Геликоида, - ответила она.



Тут язык Розамунды быстро развинтился, а потом снова завинтился в другую сторону.

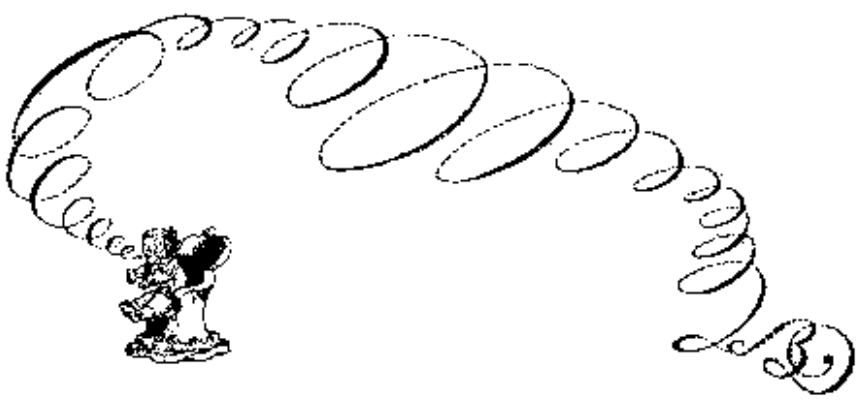
- Кого? - спросил Илюша с удивлением.

- Вот эту очаровательную кривую. Но это слишком хитро для вас. Вы даже и с лабиринтом чуть было совсем не запутались! Однако перейдем к делу. Угодно вам быть моим племянником?

- Угодно, - сказал Илюша с интересом.

- Мои племянники, - хитро прищуриваясь, сказала Розамунда, завинтив язык большой баранкой, - зовут меня... тетушкой Дразнилкой!

Мгновенно все колокольчики на домике зазвонили очень хитро и тонко. Казалось, что каждый из них позванивает и повторяет:



- Тетушка Дразнилка! Тетушка Дразнилка!

- Или, - продолжала, нежно улыбаясь, Розамунда, - они меня еще называют "Выйдет-не-выйдет"...

А колокольчики снова обрадовались и начали выкрикивать на разные тоненькие голоса:

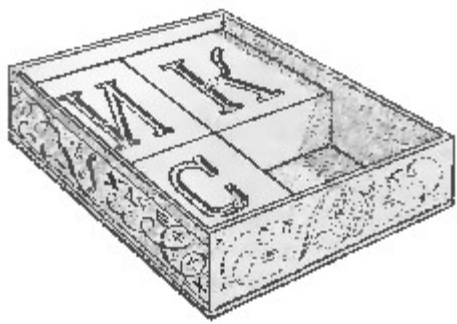
- Выйдет-не-выйдет! Тетушка Дразнилка! Выйдет - не - выйдет!

- 37 -

Тетушка Дразнилка даже потолстела от удовольствия, протянула куда-то очень далеко свой бесконечный язык и достала маленькую квадратную коробочку.

В коробочке лежали три деревянных квадратика и оставалось еще место для такого же четвертого, вместо которого была пустышка. На квадратиках были буквы. На первом - буква "И", на втором - "К", на третьем - "С".

- "Икс", - прочел Илюша.



- Поразительно! - сказала тетушка Дразнилка, высоко поднимая брови. - Как это таких глупых мальчиков все-таки учат читать?

Илюша хотел было обидеться, но потом подумал, что, пожалуй, лучше не стоит болтать, пока тебя не спрашивают.

- Переставь буквы, - сказала тетушка Дразнилка, - и прочти, что получится. Переставляй по-всякому. И так и сяк.

Ну, читай, что у тебя получается.

- Получается, - сказал Илюша, - "кси", потом "ски", "иск", "кис" и "сик"... Вот и всё. Вместе с иксом вышло шесть штук. А что это за слова?

- Слова самые простые, - ответила тетушка Дразнилка, которая постепенно становилась все толще. - "Кси" - это греческая буква, которая произносится так же, как латинский "икс". "Ски" - так англичане называют лыжи. "Кис" - так кошек зовут. "Сик" - по-латыни будет "так". Ну, "иск" - это ты и сам знаешь. Судебный иск. Так вот, возьми поставь слово "кси". А теперь можешь передвигать шашки в коробочке.

Только не вынимать! Передвигай так, чтобы вышло опять слово "икс".

Илюша начал передвигать шашки с буквами. Сперва ничего не получалось. А потом вдруг получился "икс".

- Очень мило, - сказала тетушка. - Ну, теперь ставь все другие слова и делай из них "икс".

Слово "сик" у Илюши очень быстро превратилось в "икс".

Но зато, как он ни бился над другими словами - "иск", "кис" и "ски", - ничего не получалось.

- Нет, - сказал наконец Илюша, - два слова выходят, а три эти никак не сделаешь.

- Прелестно, очаровательный мальчик! - ответила тетушка Дразнилка. - Ведь оно так и называется; "Выйдет-не-выйдет". Ну, давай возьмем похитрее.

Длинный язык ее мигом прибрал коробочку с "иксом" и притащил другую коробочку, немного побольше.

В этой коробочке лежало девять квадратных шашек, причем та, которая находилась в правом нижнем углу коробочки, была такая же, как другие. На каждой шашке была буква, как на рисунке.

- Вынь последнюю шашку с буквой "А" из коробочки совсем. Перемешай шашки, а потом добейся, так же как с "иксом", чтобы они стали по порядку. Если тебе трудно с буквами, переверни шашки - у каждой на другой стороне есть номер.

Илюша перевернул шашки, и у него вышло, как на рисунке слева.

Буквы теперь заменились цифрами, которые, однако, шли одна за другой не в обычном порядке, по строкам, а "змейкой". Илюша вынул шашки, перемешал, расставил и начал передвигать. Оказалось, что это похитрее, чем с "иксом", то есть с тремя шашками. Илюша пыхтел, старался, мучился, наверное, минут двадцать, пока наконец добрался до конца.

Цифры 1, 2, 3, 4, 5, 6 все попали на свои места, только вместо 7, 8 у Илюши получалось 8 и 7. И как он не бился, начиная опять все с самого начала, переставить их, как полагается, не мог.

- Не выходит! - наконец признался Илюша.

И все колокольчики сейчас же подхватили это.

- Попробуй еще раз, - посоветовала тетушка Дразнилка.

Илюша перемешал шашки и снова начал. Но и во второй раз получилось то же самое. Наконец в третий раз все цифры стали на свои места.

- Вот что, - сказал Илюша, - мне бы надо записывать, какие комбинации выходят, а какие нет. Потому что про "икс" запомнить нетрудно, а здесь лучше записывать.

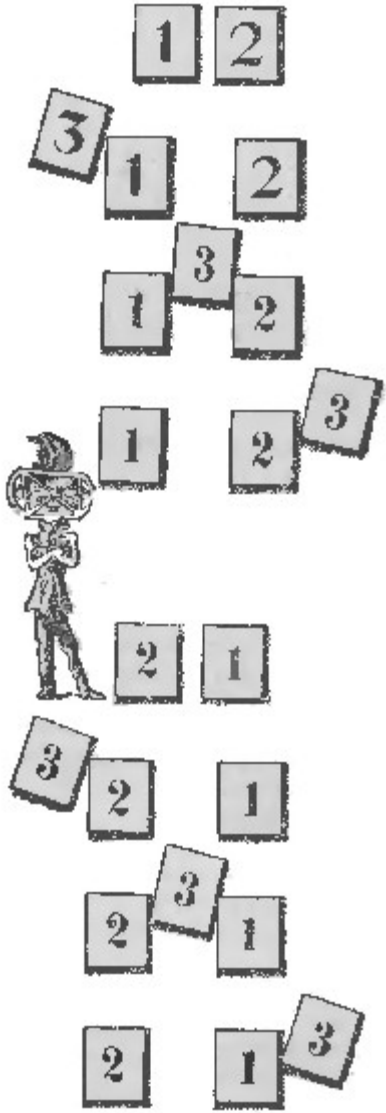
- Вот как! - раздался голос около Илюши.

Он обернулся и увидел знакомую квадратную рожицу.

- Какой догадливый мальчик! - сказала рожица. - Записывать хочет! Пиши, пиши. Сколько же тебе придется записать разных комбинаций этих цифр?

- Не знаю, - сказал Илюша. - А разве много?

- Сущие пустяки, - ответила рожица, - так, тысяч около сорока с лишним!



На сколько мест можно поставить тройку?

- Сорок тысяч! - сказал Илюша. - Как же так выходит?

- На что проще! -ответила рожица. - Возьми две шашки. Сколько комбинаций: выйдет?

Илюша подумал.

- По-моему, из двух получается две. Откуда же еще?

Один, два, а потом: два, один.

Вот и всё.

- Очаровательно! - ответила рожица. - Ну, теперь рассуди; если ты к двум цифрам, то есть к единице и двойке, прибавляешь еще тройку, сколько получится комбинаций? Вот перед тобой две комбинации:

"один - два", а потом "два - один". На сколько мест ты можешь теперь поставить тройку?

- Могу поставить спереди - это раз, после единицы - это два, после двойки - это три.

Ага! Значит, каждый раз я могу поставить тройку тремя разными способами, а комбинаций у меня две. Получается шесть.

Надо перемножить.

- Наконец-то! - облегченно вздохнула рожица. - Ну, а теперь дальше. Если у тебя шесть комбинаций по три, а ты берешь еще четверку, сколькими способами можно ее добавить в каждую комбинацию?

- Четырьмя способами: спереди, после единицы, после двойки, после тройки. Выходит двадцать четыре. А к этим двадцати четырем комбинациям пятерку я могу добавить пятью способами. Понял, понял! И выйдет... выйдет... Постой-ка!.. Выйдет сто двадцать.

- 40 -

- Верно, - отвечала рожица.

- О, догадливый юноша! Ты не замечаешь никакого общего правила?

Илюша подумал и сказал робко:

- Кажется, замечаю. Надо перемножить все цифры, начиная с двойки и до той самой цифры, сколько шашек.

- Начнем уж лучше с единицы для простоты, - ответила рожица. - Ничего не изменится. Эта штука называется факториал. Никогда он тебе не попадался? Ну, так вот, попробуй, перемножь все цифры до восьмерки. Посмотрим, сколько получится.

Илюша долго множил и под конец убедился, что цифра действительно получается весьма внушительная.

- Ну, теперь возьмем, - сказала тетушка Дразнилка, - самого главного Дразнилку.

Длинный язык ее мелькнул в воздухе и притащил третью коробочку, в которой было шестнадцать деревянных квадратиков, причем все они были зеленого цвета, а один квадратик был

белый. Он стоял в правом нижнем углу. На квадратиках были красные буквы. И в общем получалось, как на верхнем рисунке.

- Ну вот, - произнесла тетушка Дразнилка, - познакомься друг мой, с моим тезкой. Переверни квадратики - на обратной стороне есть цифры.

Илюша перевернул шашки, но получились почему-то не цифры, а то, что нарисовано слева.

- Ну, переверни еще разок!

Илюша перевернул еще раз, вынул одну шашку, и получилось, как нарисовано на следующей странице.

Илюша спутал квадратики, расставил их и взялся за дело.

И опять вышло то же, что с восемью шашками: то выйдет всё как следует, а то последние цифры застрянут и вместо 13, 14 и 15 выходит 13, 15 и 14. И повернуть не удается!

- Ну-с, - произнесла сильно потолстевшая тетушка Дразнилка, - что же ты скажешь, превосходный юноша, насчет того, почему во всех дразнилках с двумя последними шашками что-то не ладится, а?

Илюша ничего не мог ответить. Он начал было думать, но в голову ему лезло что-то совсем другое...

- 41 -

Он думал о том, как ему узнать поскорей у Радикса: во-первых, кто такая богиня Лилавати, о которой каждую минуту вспоминает Розамунда; во-вторых, как получилось с этой странной дверью; в-третьих, что за нелепая надпись о приеме и непонятные часы; в-четвертых, ведь он так и не узнал, кто такой Бриарей, о котором говорил Великий Змий.

- Ну-с? - спросила тетушка Дразнилка. - Придумал?

Илюша густо покраснел, ибо он думал совсем о другом.

- Ну-с? - повторил квадратнорожий человечек.

- А тебе какое дело? - сердито спросил его Илюша. - Ты мне ничего не показывал!

- Невежливый мальчик, - произнесла скрипучим голосом тетушка Дразнилка, - явно нуждающийся в том, чтобы ему в общедоступной форме пояснили, что такое "коль скоро"...

При этих словах тетушка Дразнилка неожиданно сильно похудела. Квадратнорожий человечек гордо выпятил грудь, и показал на свою удивительную рожицу.

- Я, - сказал он важно, - не кто иной, как Кандидат Тупиковых Наук, я Доктор Четных и Нечетных Узлов, я Магистр Деревьев, а сверх того я ношу звание Первого Командора Великого Ордена Семи Мостов. Мое имя - Уникурсал Уникурсалыч Уникурсальян.

Илюша смотрел на него во все глаза и думал, что от таких объяснений только увеличивается громадная куча вопросов, с которыми не к кому обратиться, и больше ничего. Вдруг Илюше показалось, что к его ноге ластится кошка. "Откуда здесь кошка?" - подумал он с досадой и посмотрел вниз. Оказалось, что это все тот же противный язык Розамунды, который незаметно подкрался

из-под стола к Илюшиной ноге и уже успел трижды обвиться вокруг ноги. Илюша попробовал было вытащить ногу, но оказалось, что это совершенно невозможно.

Очень было похоже на капкан!..

Тогда Илюша очень грустно посмотрел на Розамунду и на Доктора Четных и Нечетных Узлов У. У. Уникурсальяна и сказал, несколько запинаясь:

- 42 -

- Нет-нет... я... то есть... во-первых, извините, потому что я не знал, что у вас есть такой... удивительный орден... и я, правда, никогда ничего про него не слыхал.

Вдруг Илюша почувствовал, что нога его понемножку освобождается. И тут его, что называется, осенило:

- А насчет Дразнилки я сейчас скажу! Только про самого маленького Дразнилку, про "икс". Я думаю, что их потому никак не переставишь, что они ходят друг за дружкой гуськом.

И ничего с ними не поделаешь... А я ведь не знал, Уникурсал Уникурсалыч, что вы доктор наук, и я даже хотел вас спросить: если взять самого главного Дразнилку, с пятнадцатью квадратиками, сколько же там получится комбинаций?

Уникурсал Уникурсалыч посмотрел на Илюшу довольно свирепо, но быстро смягчился.

- Не так много, - ответил он. - Если, например, пустышка тоже может стоять на любом месте, то выйдет всего каких-нибудь двадцать триллионов с небольшим.

- Триллионов! - сказал, охнув, Илюша. - Это ведь после биллионов, то есть миллиардов?

- Вот именно, - ответил важно Уникурсал Уникурсалыч. - Ну, другими словами, это будет столько, если два помножить на десять в тринадцатой степени. Ну и еще немножко... В общем, не так уж много, как сказал один задумчивый гусь, обнаружив, что его хозяйка принесла с базара два десятка яблок.

- 43 -

Схолия Пятая.

с помощью коей герой этой правдивой книжки, думая насладиться красноречием, начинает вместо этого водить пальчиком по лицу оратора, а затем выслушивает чрезвычайно полезный и нехитрый секрет относительно того, как решаются задачи, которые ты не можешь решить (очень важно для молодых людей, скучающих на контрольной работе!). После этого нашему герою приходится выслушать длиннейшую речь, состоящую из рассуждений о том, что такое смысл и каким образом можно его отличить от бессмыслицы, даже если таковая касается вопроса о том, что можно считать недвусмысленным. Вслед за этим Илюша сталкивается вплотную с центробежной силой и неожиданно узнает о том, что такое касательная, хотя до сих пор он думал, что она, в сущности, его не касается, и совершенно не собирался к ней прикасаться. Однако она-то и возвращает наконец Илюшу к Радиксу. Тут наш герой знакомится с такой особенной породой узлов, что водятся в большом изобилии на некоторых деревьях, но до которых можно добраться не иначе, как через целый ряд мостов, по коим строго-настрого воспрещается проходить второй раз. И вот тут-то бедный Илюша неожиданно встречается с ужасающим и известным из древности людоедом, по прозванью Минотавр, который долго питался самыми способными выпускниками средней школы, пока наконец не попался на ниточку... Все это производит на нашего героя несколько странное впечатление, которое, впрочем, довольно скоро рассеивается при непосредственном участии богини Лилавати и ее удивительных ровесниц, отнюдь не склонных к красноречию.

- 44 -

После этого почтенный Кандидат Тупиковых Наук У. У. Уникурсальян, кавалер Ордена Семи Мостов и даже командор оного, прошелся не спеша по комнатке и, обернувшись к Илюше и хорошенькой Розамунде, произнес:

- Почтеннейшие члены нашего ученого общества, которых объединяет, так сказать, бескорыстная привязанность именно к тому, к чему они так бескорыстно привязаны!..

Тут уважаемый Доктор Четных и Нечетных Узлов вдруг пошатнулся, ибо язык Розамунды незаметно подобрался к нему и дернул за локоть. Доктор Уникурсальян рассеянно взглянул на язык и продолжал:

- А сверх того, поскольку привязанность всегда может быть рассматриваема...

И опять почтеннейший доктор покачнулся, ибо язык Розамунды снова дернул его за локоть.

- Позвольте? - вопросительно сказал Магистр Деревьев.

- Невозможно! - ответила ему Розамунда.

- Что невозможно? - спросил нетерпеливо Доктор Узлов.

- Начнем сначала, - предложила примирительно Розамунда.

- Так это же и есть начало! - воскликнул в отчаянии командор.

- Тогда лучше с конца, - заявила Розамунда.

Командор прошелся по комнатке и взглянул на Илюшу.

- Мне бы очень хотелось посмотреть, какой у вас орден.

- Это немыслимо! - сердито заявил командор, обращаясь к Розамунде. - Это нарушает весь порядок дня и даже ночи.

- Пусть нарушает, - ответила Розамунда.

Командор У. У. Уникурсальян пожал в недоумении плечами, подошел к Илюше и гордо сказал:

- Прошу!

На груди его красовался Орден Семи Мостов самого первого класса, украшенный самоцветными камушками.

Илюша посмотрел на орден и сказал:

- Похож на лабиринт.

Командор скромно, но гордо улыбнулся. А Илюша стал тут же водить пальцем по белым дорожкам, в центре которых стояли римская цифра "VII" и буква "M".

- Темные пятна, - объяснил доктор, - представляют собой речку, а белые дорожки - это берега речки и мосты. Задача очень простая: обойти все мосты и по каждому пройти только один раз. Знаешь ли ты, что это за речка? Ты ведь иногда заглядываешь в атлас?

- Нет, - промолвил Илюша. - А разве есть на самом деле такая речка?

- Есть! - отвечал обладатель великолепного ордена. - Это речка Прегель с островом Кнейпгоф, а на ней стоит город Калининград, бывший Кенигсберг. Узнай же, о любознательный юноша, что эти-то мосты и оказались случайно причиной для

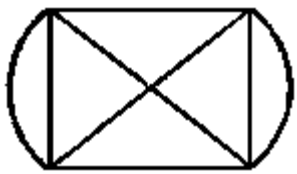
возникновения очень важной отрасли геометрии. Был на свете такой математик Леонард Эйлер, швейцарец по происхождению, член Санкт-Петербургской Академии наук, один из крупнейших ученых восемнадцатого века. Он был другом Ломоносова и, пожалуй, был один из первых ученых в то время, который оценивал научную деятельность Ломоносова по достоинству. Он долго жил в Санкт-Петербурге, там и скончался. Так вот однажды на одном вечере в обществе кто-то задал Эйлеру вопрос: можно ли пройти по всем семи кенигсбергским мостам, не проходя ни по одному по два раза? Эйлер заинтересовался этой задачей, доказал, что сделать это невозможно, и нашел общие правила, которым подчиняются задачи подобного рода. В честь этого замечательного события и учрежден этот превосходный и в высшей степени достопримечательный орден.

Илюша повел пальцем по дорожкам, но у него не вышло.

Он попробовал еще - не вышло. Попробовал в третий раз - опять то же самое.

- Не выходит, - сказал Илюша.

- Взгляни на мое честное и открытое лицо. Можешь ли ты обойти все его линии и по каждой линии пройти один раз?



Илюша попробовал, и очень скоро это ему удалось.

- Выходит! - сказал Илюша. - А на ордене никак не получается.

- О неопытный и трижды легкомысленный отрок! - произнес, покачивая головой, Командор Ордена Семи Мостов. - Во-первых, докажи, что это действительно невозможно, ибо ты получишь право утверждать это только тогда, когда сможешь твердо и определенно объяснить, почему одна такая задача решается, а другая не имеет решения.

- А какой смысл, - сказал Илюша, - заниматься задачами, которые не имеют решения?

- Смысл? .. - лениво протянула тетушка Розамунда. - А можешь ли ты толком объяснить, что значит: "решить задачу"? Попробуй реши вот эту: "Скорый поезд прошел за два часа сто километров.

Однако, если бы он шел не два часа, а столько часов, сколько километров прошел в течение второго часа, и при этом с той же скоростью, с какой шел в первый час, то он прошел бы не сто

километров, а две тысячи пятьсот два километра. Спрашивается: какова была скорость поезда в первый час и какова была его скорость во второй час?"

Услыхав условие задачи, доктор Уникурсальян презрительно нахмурился:

- Не сложна ли эта задача для такого богатыря, который только что пал бездыханным при осаде Квадратного Трехчлена?

Однако тетушка Розамунда была настроена довольно милостиво; она улыбнулась почти до самых ушей, а ее проворный язык быстро притащил откуда-то карандаш и бумагу и вручил их Илюше.

- Ничего, - отвечала тетушка Магистру Деревьев. - Эти волшебные предметы ему помогут. Он поумнеет. Он хороший мальчик.

- Разве это волшебные предметы? - спросил с напускным удивлением гордый Доктор Узлов.

- Да, - отвечала тетушка, - давно уж доказано, выяснено и принято всеми академиями к сведению и руководству, что карандаш и бумага суть волшебные предметы неограниченного могущества.

- Ах, вот как! - мрачно провозгласил командор. - Простите, я забыл.

Илюша прекрасно понял, что все это было одно притворство: ничего он, конечно, не забывал! Мальчик храбро схватил волшебный карандаш, но не прошло и нескольких минут, как он разочарованно пробурчал, что решить эту задачу немыслимо.

- Очень рад! Восхищен! - отвечал ему Доктор Четных и Нечетных. - А нельзя ли как-нибудь иначе изложить результаты этого маленького опыта? Что обозначает "немыслимо"?

- Нет на свете таких двух чисел, которые годились бы для этой задачи, - вот что это означает, - отвечал Илюша. - Следовательно... тут ни я, ни кто другой ничего сделать не может. Чисел таких нет. Вот мое решение.

- Согласен, - спокойно ответствовал доктор Уникурсальян. - Это действительно можно считать решением. Другими словами: раз ты доказал, что задача неразрешима, то у нас здесь считают, что ты ее решил. Заданный тебе вопрос исчерпан.

- Так, - сказал Илюша, - это я понимаю. Но мне неясно, зачем надо задавать такие вопросы? Мало ли что тут можно придумать!

- Эту важнейшую проблему надлежит с осторожностью рассматривать двояко.."

- Двояко! - повторила тетушка Розамунда.

- Вот именно! - громогласно возопил доктор. - Ибо дело не в

выдумке, а в том, что если бы наука не занималась вопросами, которые кажутся неразрешимыми, она бы не двигалась вперед. В том-то и сила, что неразрешимые требуют новых способов для своего разрешения, а каждый новый способ - это новый шаг вперед. Слушай внимательно: вот тебе простой и превосходный пример. Это будет у нас часть вторая, ибо с первой мы уже покончили. Есть возражения? Говори прямо.

- Возражений, - отвечал мальчик, - как будто бы и нет, но.,.

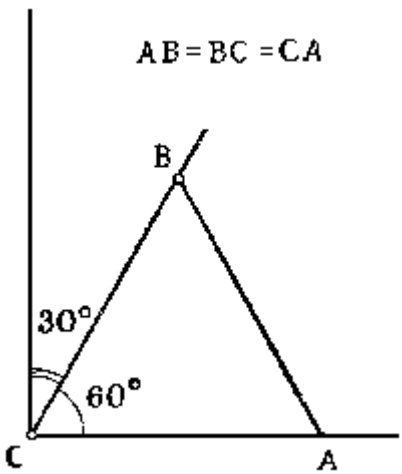
- Но ты желаешь, чтобы тебя убедили. Слушай, и все получишь... Итак, в геометрии издавна возникла необходимость разделить данный угол на несколько частей, скажем, на три. У геометра в руках есть линейка и циркуль. Может он с этими инструментами проделать это деление или нет? Со времен седой древности пробовали это сделать, но ни у кого не выходило. Вот тут-то и надо выяснить, почему не выходит.

В чем тут дело? Долго не могли добиться. Но наконец выяснили, что имеется бесконечное число таких углов, которые точно разделить натрое с помощью циркуля и линейки невозможно.

- А прямой угол как будто можно разделить? - осторожно осведомился Илюша.

- Как? Ты умеешь делить прямой угол на три? - с искренним изумлением сказала тетушка. - А умеешь, так рассказывай.

- Прямой угол - это девяносто градусов, - отвечал Илюша, - значит, надо получить тридцать. Отнимем шестьдесят, а это сделать нетрудно - ведь он один из углов равностороннего треугольника, потому что сумма углов треугольника равна 2d, то есть 180°. На чертеже совсем просто получается!



- Не смею спорить! - ответствовал свирепый доктор Уникурсальян, раскланиваясь с Илюшей очень любезно, но все же

ехидно. - Кто станет спорить? Прямой угол, поистине прямой, ты прав. Но с непрямыми не выходит.

- 48 -

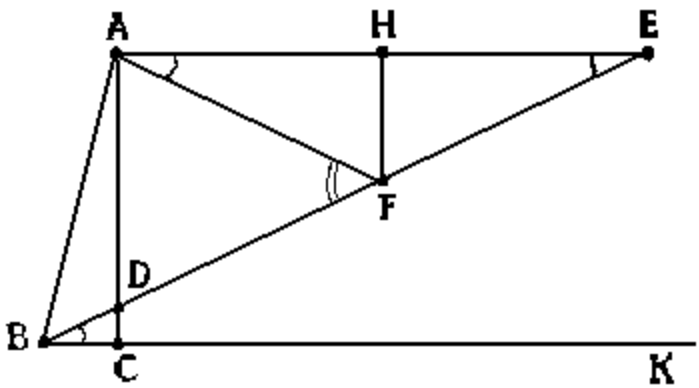
Еще в древности пытались, а причины затруднений еле-еле выяснили только во второй половине шестнадцатого столетия нашей эры. И ни один грамотный человек, кроме нелепых упрямцев-чудаков, заниматься этим не будет. К таким безнадежным задачам относятся еще древние задачи о квадратуре круга, когда требуется построить опять-таки с помощью циркуля и линейки квадрат, равновеликий данному кругу, затем задача об удвоении куба.

Впрочем, обо всем этом ты узнаешь попозже[5]. Но это еще отнюдь не все... Самое главное в том, что попутно с этими решениями выяснено вполне и до конца, какие именно задачи можно решать с помощью циркуля и линейки, а какие нельзя, и почему нельзя. Вот в чем дело. А если ты уяснил, и почему какая-нибудь задача не имеет решения, то тогда ты можешь узнать, что именно тебе требуется для решения подобных задач.

- Извините... - произнес Илюша. - А с другими углами очень трудно?

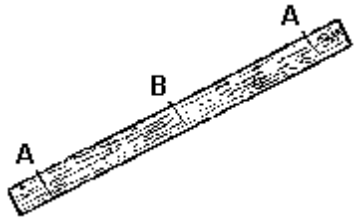
- Не столь трудно, - отвечал с усмешкой Доктор Четных и Нечетных, - сколь замысловато...

- Когда готово, то нетрудно! - кротко заметила тетушка Розамунда, а язык ее, громко прищелкнув, вдруг нарисовал в воздухе чертеж. Все линии были голубоватые и очень приятно светились.



DF = EF = AB; HF || AC; AH = HE; DE = 2 AB

ˆAFD = 2ˆAEF = 2ˆDBK; ˆABD = 2ˆDBK



Линейка для невсиса с двумя отметками.

- Прелестный чертеж! - вежливо заметил доктор. - Ну-с, вот тебе угол ABC - 75˚, а вот угол CBE - 25˚. Но делается это не линейкой и циркулем, а линейкой, на которой есть две отметки - одна за другой, и каждая равна отрезку AB. Этот способ в древности назывался способом невсиса. Через точку B надо провести прямую так, чтобы отрезок DE равнялся бы удвоенному отрезку AB. При помощи вспомогательных прямых на чертеже нетрудно доказать, что угол AFD равен двум углам AEF…

- Как внешний угол по отношению к треугольнику AEF, - догадался Илюша.

- 49 -

- Точно... - протянула тетушка.

И у Илюши на душе стало на минутку полегче - он все-таки догадался. Ему хотелось еще кое о чем спросить, но доктор Уникурсальян не дал ему и рта раскрыть.

- Сделать можно, - возопил доктор, - а вот объяснить, почему надо делать так, а не иначе, то есть, почему этот способ в данном случае приводит к цели, - это потруднее!

- А когда-нибудь... - робко начал Илюша.

- Все должно двигаться в самом удивительном порядке, - заявила тетушка Розамунда, а ее неукротимый: язык принес откуда-то линейку с двумя отметками, приложил ее на чертеже к отрезку DE, и вышло точь-в-точь.

- Вот именно! - воскликнул доктор Четных и Нечетных - Это невсис Паппа Александрийца. Замысловато, а зато точь-в-точь! Терпи, мой любезнейший, сами греки тоже помучались как следует. А разобрать до конца не удалось. Только в шестнадцатом веке Франциск Виета разобрал[6]. Вот и смекай - нехитрая на вид задача, а в руки попросту не дается. - Вслед за этим доктор мрачно покосился на Илюшу и пробормотал угрожающе: - Внимание и молчание!..

- А ведь, пожалуй, теперь я начинаю соображать... - сказал Илюша.

- Прелестно! - отвечал командор. - Я вижу, что вы, любезнейший юноша, делаете некоторые успехи, как сказала одна заботливая мамаша, ухватив за ухо своего предприимчивого отпрыска в ту минуту, когда он забрался во вторую банку с

вареньем.

- Только как это сделать? - со вздохом сказал Илюша. - То есть я не про варенье, а про невсис.

- Все в свое время, - отвечала Розамунда.

Она поглядела на Доктора Четных и Нечетных Узлов и сказала:

- Ну-с?

Доктор Узлов начал свою замечательную речь:

- Досточтимые и глубокоуважаемые друзья мои, слушательницы и слушатели! То, что я имею сказать вам в настоящей моей изумительной речи, так необыкновенно важно, так страшно серьезно, так дивно поучительно, что у меня, признаться, у самого заранее дух захватывает. И ты, о неопытный и желторотый юнец, неизвестно как затесавшийся в наш волшебный мир, повесь свои мохнатые уши на гвоздь внимания и восхищения...

- 50 -

Илюше очень хотелось обидеться, когда он услыхал про чьи-то мохнатые уши, но он решил, что лучше уж притвориться, что не понимает, о ком тут идет речь.

- Понимаешь ли ты, достопочтенный слушатель, куда ты попал? Постигаешь ли ты, что великая наука наша - одна из древнейших наук мира; что именно на ней некогда человек чуть не впервые учился размышлять и доказывать; на ее примерах человек учил сам себя рассуждать, сам с собой обсуждал свои замыслы, сам научился поправлять их и в течение многих и многих столетий шел осторожнейшими шагами, дабы наконец овладеть тем, чем он сейчас владеет? Можешь ли ты вообразить себе, что много и много человеческих жизней трудолюбиво и самоотверженно положено на то, чтобы мир мог сделать хотя бы еще один шаг в науке? Сумеешь ли ты представить себе, что ты легко можешь услыхать здесь какое-нибудь занимательное слово, но для того, чтобы объяснить тебе, что обозначает это слово, нам всем придется положить немало труда? И поверь, что все мы готовы это для тебя сделать, но и ты должен стараться и относиться к каждому нашему слову так вдумчиво и так серьезно, как только позволяют тебе твои способности! Итак, начнем сначала! Я утверждаю, что путешествовать по нашим чудесным краям невозможно без неких мощных вспомогательных аппаратов. Вот первое, что должен я открыть вам, опираясь на всю силу моего прославленного красноречия, сиречь элоквенции. Что же это за аппараты и как ими пользоваться? Во времена великого Архимеда это были палочка и песок, а в наше время - это карандаш и бумага. Хотя, впрочем, никому не возбраняется,

находясь на чистом воздухе, пользоваться для тех же целей палочкой и песочком. Кроме того, надо вооружиться самым прочным терпением: если ты чего-нибудь не понял, ты должен тотчас же возвратиться обратно и снова пуститься в путь в том же направлении. Имей в виду, что нет такого маршрута на свете, который не уступил бы твоему упорству. Все, что мы будем говорить и утверждать, должно быть полно совершенно определенного смысла, и все это должно быть выражено в сжатой, ясной, совершенно недвусмысленной и легко запоминающейся форме. Как это делается, понять очень легко: подражайте мне, и всё! Однако я вынужден идти еще далее. Дело в том, что я требую, и ты требуешь, и мы требуем, и все, кто может нас услыхать, требуют, чтобы все вводимые нами новые наименования, способы выражения и обозначения были исчерпывающим образом объяснены, то есть определены. Всякое заключение наше или вывод, то есть равенство, неравенство, какая-нибудь формула, а также всякое словесное или иное (а стало быть, бессловесное!) утверждение, с полной необходимостью должны вытекать из того, что было принято нами ранее в качестве условия или было ранее доказано, то есть из наших предпосылок.

- 51 -

Клянусь вам, что это самый непреложный закон в нашем хитроумном мире, где все подчинено Дедукции, что обозначает, как вам, быть может, известно, "вывод", или "заключение". Надо всегда подумывать и о том, есть ли на что сослаться, если ко мне начнут придираться по этому самому поводу самые хитрые, самые сварливые, самые несговорчивые придиры на всем белом свете?.. Когда ученым приходится удостовериться, что некоторая задача совершенно не разрешима известными им способами, то нередко это ведет к глубоким переменам в самой науке. Кажется, чего уж проще - вычислить диагональ квадрата со стороной, равной единице?

Извлек из двойки квадратный корень - и готово! Но когда в древности ученые греки впервые убедились в том, что в точности они это вычисление проделать не могут, то целая система математических воззрений была ниспровергнута! Наш волшебный мир, видишь ли, это очень серьезный волшебный мир: прошу не забывать!

Тут Магистр Деревьев надменно обвел сверкающим взором своих притихших слушателей и продолжал с новой силой:

- Помните: следует знать и нельзя ни в коем случае забывать о том, что-то, что необходимо, не всегда достаточно, а что достаточно, не всегда необходимо. А потом не забывайте о том,

чтобы весь ход ваших рассуждений определялся четко поставленным вопросом, чтобы вы не упускали на каждом шагу поставленную вами цель. С другой стороны, смотрите, не внесли ли вы в суждения ваши чего-либо лишнего, что не было предусмотрено теми условиями или ограничениями, которые вы имели в виду. Помните: раз вам даны для задачи некоторые условия, то все они до одного должны быть использованы в решении так или иначе, а если какое-нибудь условие окажется лишним, то и это должно быть установлено с полной убедительностью, о чем мы еще потолкуем с вами в Схолии Седьмой. При этом надо знать, что это правило касается не только тех случаев, когда речь идет об обычном, или "положительном", решении задачи, которое в то же время должно являться общим решением для многих задач, подобных данной. Оно касается также и тех, нередко гораздо более трудных случаев, когда мы собираемся установить, что у нас нет возможности найти в данной области искомое или выполнить заданное предписанным способом, как заметил один прилежный юноша, подавая своему преподавателю на контрольной работе чистый лист бумаги...

Командор прервал свою речь и задумался.

- 52 -

- Так вот-с... - произнес, помолчавши, доктор Четных и Нечетных Узлов. - Может быть, тебе еще не ясно, почему он такой серьезный, наш волшебный мир? Объяснить тебе? Слушай! При помощи нашего "волшебства" мы можем сделать некоторые довольно трудные вопросы более наглядными для нашего читателя - несколько облегчить их, другими словами.

Это - раз. Второе, и еще более важное, - это то, что наше "волшебство" позволяет нам вводить некоторые требования или, скажем, "условия", нужные для изложения. Такого рода "условия" необходимы и для самой науки. Со времен древности было сделано немало усилий, чтобы изъять из геометрии все неясности или недоказуемости. Однако, невзирая на то, что это повело, в частности, к замечательным открытиям, все это, вместе взятое, оказалось недостижимым. И некоторые определенные условия, или, так сказать, "соглашения", остаются в науке, и без них нельзя. По мере надобности мы и будем прибегать к "волшебству" для того, чтобы показать смысл и выводы из такого рода соглашений.

- Однако, - с трудом переводя дух, гордо воскликнул Кандидат Тупиковых Наук, - однако, хоть я теперь уж уверен, что вы все прекрасно усвоили содержание моей речи, заключающейся в том, в чем она заключалась, и утверждающей именно то, что

она утверждала! И хотя все это так, но тем не менее я должен опять начать все сначала...

При этих словах тетушка Розамунда тихо ахнула...

- Да! - во все горло гаркнул совершенно рассвирепевший Доктор Узлов. - Я по той причине должен начать сначала, что ведь дело-то совсем не в этом, а именно в том, чтобы...

Что не дальше разглагольствовал почтеннейший Уникурсал Уникурсалыч, тем речь его становилась все более витиеватой, все более сложной и непонятной. Он сыпал полнозвучными и высокопарными фразами, в которых внимательный слушатель мог обнаружить изрядное количество существительных, прилагательных, глаголов и всего такого прочего, однако что все это вместе значило, понять было - увы! - невозможно.

Сперва тетушка Розамунда слушала доктора внимательно, но теперь на лице ее было написано что-то вроде: "Караул! Помогите!" Язык хозяйки в недоумении завился огромным вопросительным знаком. Три тысячи серебряных колокольчиков вопросительно позвякивали то так, то сяк. Вдруг они все сразу зазвонили, да все громче и громче, заглушая премудрые речи Доктора Четных Узлов.

Розамунда махнула рукой, взяла Илюшу за левую руку и повела к двери. Однако Кандидат Тупиковых Наук вцепился в правую руку Илюши и стал тащить его назад, все время продолжая ораторствовать. Серебряные колокольчики звонили так оглушительно, что, кроме их звона, ничего услыхать было невозможно.

- 53 -

Розамунда тащила Илюшу налево, Магистр Деревьев - направо, и длиннейший язык Розамунды решил, что ему сейчас самое время вмешаться в эту непонятную историю, закрутился вокруг всех трех наших героев, ухватившись за какое-то колечко на потолке, и все они понеслись по кругу с такой невероятной быстротой, что теперь уже не только не было ничего слышно, но и ничего не было видно. Илюша, совершенно оцепеневший от страха и удивления, летал по Розамундину домику в полной уверенности, что сейчас его расшибут вдребезги, искренне удивляясь, как жестоко наказывает его судьба за то, что он забыл про квадратный трехчлен.

- 54 -

И вдруг...

И вдруг он почувствовал, что никто его не держит и он мчится по воздуху с быстротой пикирующего самолета.

"Центробежная сила! - подумал впопыхах Илюша, быстро перевертываясь в воздухе то вниз, то вверх головой и размахивая руками. - Оторвался и лечу по касательной. Вот так история! .."

Тут он почувствовал, что скорость его полета начинает понемногу ослабевать. Вдруг он перевернулся вверх головой и стал сразу на обе ноги.

- Наконец-то! - сказал ему с облегчением Радикс.

- А! - обрадовался Илюша. - Это ты! А я уж думал, что лечу прямо в тартарары. Фу! И как это я жив до сих пор?!

Я видел совершенно удивительные вещи, только вот беда -

мало что понял... Кое-что разобрал, да и то, по правде сказать, через пятое на десятое. А в общем... ужас что такое!

Надоело ужасно - слушаю, гляжу и ничего не понимаю. Если бы ты мне рассказал...

- Это можно, - сказал Радикс. - Ну, выкладывай, чего ты не понял.

- Во-первых, - начал Илюша, - часы...

В это время какие-то часы звучно пробили четыре. Илюша обернулся и увидел странный циферблат.

- Что такое? Бьют четыре, а показывают десять!

Илюша внимательно поглядел на часы. Раз-два-три... десять? .. Снова - раз-два-три и опять новый десяток?

- Ох! - воскликнул Илюша, хлопнув себя по лбу. - Другой циферблат! Да это не десяток! Чепуха какая! Это просто другая система исчисления. Четверичная система. Первый класс - единицы, потом второй - четверки класс будет четыре в квадрате, то есть шестнадцать. Как у нас на первом месте единицы, на втором - десятки, а третье место занимают сотни, а это ведь десять в квадрате. У нас число пишется так:

$a10^0 + b10^1 + c10^2 + ...$

а у них:

$a_1 4^0 + b_1 4^1 + c_1 4^2 + ...$

причем a, b, c... могут принимать все значения от нуля до девяти, но a1, b1 c1. .. могут принимать значения от нуля до трех. И так далее.

Если, значит, написать девятнадцать по этой системе, будет шестнадцать плюс три, то есть сто три. А если взять сто, то выйдет тысяча двести десять. Экая досада, что я не догадался!

- Штука нехитрая, - сказал Радикс.

- Вот то-то и обидно! - отвечал Илюша.

- Они тебя, - заметил Радикс, - все-таки немножко надули. То есть были приняты меры к тому, чтобы ты не догадался. Ведь

перерыв-то у них сдвинут так, что прием кончается раньше перерыва.

- Экая досада! - возмущенно повторил Илюша. - А все-таки я должен был догадаться!

- Разумеется. Зевать не надо. Ну-с, далее?

- Дальше вот что. Часы что - это пустяк, шутка...

- Не всегда, - заметил Радикс, посмеиваясь.

- Ну все-таки. А вот этот невсис... Я о нем даже не слыхал. Прямо удивительно. Поставь на линейке две метки - в сразу готово!

- В том-то вся и сила, что просто. Узнаешь немного погодя.

- А потом все эти мои скитания по коридорам. Ведь это был настоящий лабиринт. Так или нет?

- Не совсем настоящий, но вроде этого.

- Я решил, что если все время буду держаться правой или левой рукой (это все равно, только не менять руку) за стену, то можно дойти до середины и выйти назад.

- Почему ты так решил?

Илюша постарался изложить своему другу все, что придумал о сходстве лабиринта с тупиком.

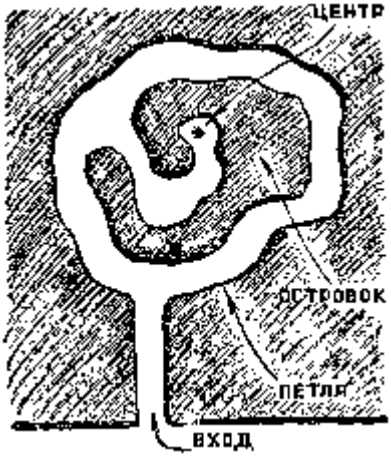
Радикс выслушал и процедил:

- Да-а... Но я берусь выстроить лабиринт, где твое правило правой руки ни к чему не приведет. В лабиринт надо войти, дойти до некоторой заранее определенной точки, которая будет центром этого лабиринта, и выйти обратно. Не так ли?

Илюша согласился.

- Так вот. Мой лабиринт будет представлять собой то, что ты называешь петлей. То есть тот же тупик, только вместо замыкающей стенки будет еще один кругообразный ход. В середине этого хода находится островок, в нем дверь, за ней коридор, который и кончается той точкой - центром. Далее я утверждаю, что какой бы рукой ты ни пользовался, правой или левой, ты обойдешь мой лабиринт, выйдешь обратно, но не попадешь в центр, и задача не будет решена. Что ты на это скажешь?

Илюша нарисовал чертеж и углубился в его рассмотрение.



Двойной лабиринт Радикса.

- Да, - сказал Илюша, - действительно, в центр не попаду. Тогда, мне кажется, можно поступить так. При обходе лабиринта по правилу правой руки я убеждаюсь, что в центр не могу попасть, и замечаю, что какой бы рукой я ни пользовался, всегда на противоположной от меня стене, то есть на той, которой я не касаюсь рукой, мне встречается дверь, и я в нее не попадаю. Если в лабиринте есть такая дверь, то я поставлю против нее крестик на моей стене, сменю руку и пойду кругом островка. Когда я попаду в эту дверь, то дойду до центра, выйду из него и, снова дойдя до моего крестика, сменю руку во второй раз. Мне кажется, что это получается лабиринт в лабиринте, и, по-моему, такой лабиринт надо называть двойным. Так можно и тройной построить!

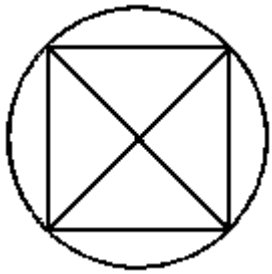
- Можно, - спокойно ответствовал Радикс. - Во-первых, эта система внутренних петель и островков может быть довольно сложной, а во-вторых, именно на такого рода усложнениях и основана путаница лабиринта. Ну, что у тебя еще есть? Выкладывай. А к лабиринту мы вернемся еще.

- Еще про этого противного Доктора Узлов. Почему он так называется?

- Начнем с его рожицы, - отвечал Радикс. - Ее линии, как ты заметил, легко можно обойти, пройдя при этом один раз по каждой линии. Такая фигура называется *уникурсальной*. Вот почему его так зовут.

Правда, это слово - "уникурсальный" - иногда применяется и в другом смысле, но уж этого мы касаться не будем. Уникурсальную фигуру можно начертить, не отнимая пера от бумаги, как говорится - одним росчерком. Конечно, так начертить можно не всякую фигуру. Попробуй, например, начертить фигуру,

нарисованную налево.



Попробуй начертить одним росчерком!

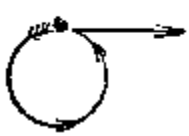
У тебя ничего не получится, как бы ты ни старался. Эта фигура не уникурсальная.

- 57 -

- В чем же тут дело? - спросил Илюша. - Как узнать, какая фигура уникурсальная, а какая нет?

Четный узел.

- Назовем каждый перекресток нашей фигуры узлом. Если от него отходит четное число путей, то это будет четный узел, а если нечетное - нечетный. Если узел четный, то ты можешь прийти к нему и уйти от него по новому пути. Сколько бы ни было четных узлов, они тебе не помешают.



Нечетный узел.

В каждый из них ты можешь пройти.

Другое дело - нечетный узел. Например, из него три пути...

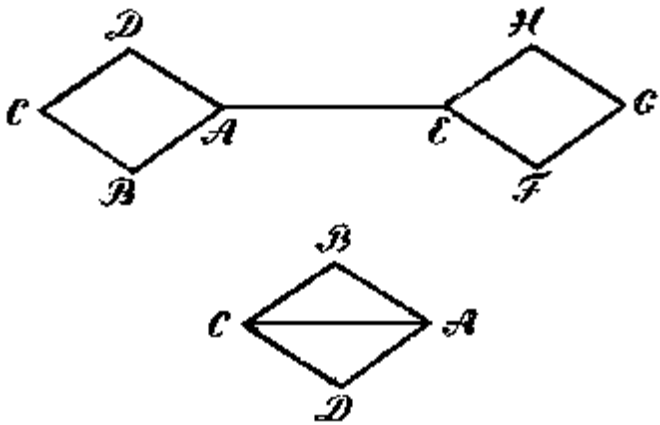
- Ясно, - подхватил Илюша. - Раз приду и раз уйду - значит, две дороги я уже использовал. А опять приду по третьей - и конец, потому что нехоженых дорог больше нет.

- Совершенно верно, - отвечал терпеливый Радикс. - Ну, а что будет, если ты встретишь два нечетных узла?

- Допустим, что они будут тройные.

- Два нечетных узла? .. - повторил Илюша. - Я сейчас нарисую.

Илюша нарисовал два чертежа.



Один изображал два ромба, соединенных прямой, а другой ромб с одной диагональю (рисунок на стр. 59).

- Ну вот, - сказал он, - две фигуры с двумя нечетными, тройными узлами. Попробую начать с первой. Итак, я выхожу из нечетного узла, то есть из точки A, потом возвращаюсь к нему через B, C и D и выхожу из него опять. Значит, я все его пути уже прошел. Иду по последнему пути, то есть через AE во второй узел (в точку E). Прихожу во второй, выхожу из него по второму пути и через F, G и H возвращаюсь в E обратно по третьему пути. Значит, выходит так: если у меня два нечетных узла, то я могу из одного прийти в другой, но во втором застряну, и дальше мне уже некуда будет идти...

- Так, - сказал Радикс. - Из этого, я думаю, тебе ясно, что больше двух нечетных узлов в уникурсальной фигуре быть не может, а четных может быть сколько хочешь. Ты можешь нарисовать фигуру с двумя нечетными узлами, а между ними наставить сколько угодно четных. И это будет уникурсальная фигура.

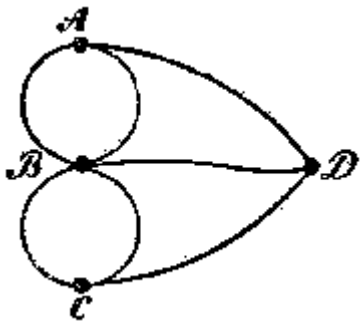
Если есть только одни четные узлы, то ты, обойдя фигуру, вернешься к тому узлу, с которого начал, а если в твоей фигуре

есть два нечетных узла, то ты уже вернуться к тому узлу, с которого начал, не можешь, а закончишь путешествие в другом. А теперь изобрази-ка мне схему путей на ордене Уникурсала Уникурсалыча и узлов, в которых эти пути сходятся.

- Как это? - спросил Илюша.

- Ты водишь пальцем по дорожкам и мостам, вот и покажи, по каким линиям ты при этом двигаешься. Поэтому давай изобразим условно оба берега и оба острова точками, а мосты - линиями, соединяющими эти точки.

Илюша начертил фигуру, нарисованную внизу.



- Ну вот, - сказал Радикс. - Это и есть схема путей и перекрестков на ордене Уникурсала Уникурсалыча. Ясно, что вопрос о том, можно ли обойти все мосты, проходя через каждый только один раз, сводится к вопросу, можно ли вычертить эту фигуру непрерывным движением, то есть уникурсальна она или нет.

Илюша начал рассматривать схему, раза два сбился и наконец ответил:

- Тут выходит четыре нечетных узла - A, B, C и D.

- Ну, вот тебе и решение! -усмехнулся Радикс. - Мы с тобой сейчас установили, что в уникурсальной фигуре может быть любое число четных узлов и не более двух нечетных. Если в фигуре есть только четные узлы, то обход фигуры можно начать с любой точки.

Если в фигуре есть два нечетных узла, то нужно начать обход именно с одного из них, а закончить в другом нечетном узле. А теперь представь, что тебе дана очень сложная фигура без нечетных узлов или с двумя нечетными узлами.

Какие основания утверждать, что ты, выйдя из первого нечетного узла, сможешь обойти ее всю, не проходя ни одного пути дважды?

- Если она не состоит из нескольких несвязанных частей, то я, конечно, могу попасть в любую точку, а в четных узлах застрять

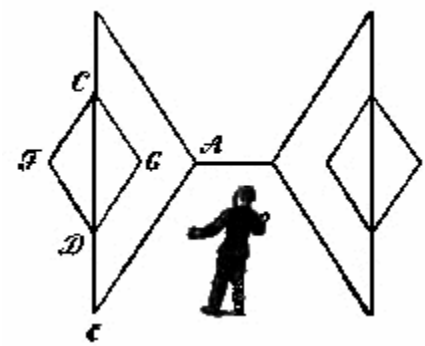
не могу...

- Таким образом, раньше всего надо сказать, что фигура должна быть связной. А не может ли случиться, что ты, проходя через четные узлы, оставишь в стороне какую-нибудь часть фигуры так, что к ней уже больше нельзя будет добраться, а потом застрянешь во втором нечетном узле и не обойдешь всю фигуру?

- Как же это может случиться? - спросил Илюша.

- А вот, например, если на нашем первом чертеже, где два ромба соединены перемычкой, ты сначала пойдешь не по сторонам одного из ромбов, а по этой перемычке. Однако то же самое может случиться и как-нибудь иначе, если ты незаметно для себя разобщишь две части фигуры и она потеряет связность. Это значит, что свободных, то есть еще не пройденных путей, соединяющих две эти части, уже не останется.

Представь себе, что путь, по которому ты только что прошел, тем самым вычеркнут: ведь второй раз по нему идти нельзя, и, следовательно, он для тебя уже больше не существует.



Вот тебе фигура: если ты пойдешь по пути ABCDEA, то вычеркнешь путь BCDE, а ромб CFDG окажется отрезанным.

- Значит, я шел неправильно. Мне надо было прежде из D попасть не в E, а обойти сперва ромб DFCG, то есть идти в F или G.

- Это, конечно, верно, но только для данного случая. Вот ты говоришь, что шел неправильно. Но для того, чтобы идти правильно, надо показать, что возможно найти правильный способ обхода и при этом не для какой-нибудь определенной фигуры, а в самом общем виде, то есть для любой заданной фигуры, как бы она ни была сложна. Не забудь, что при этом ты должен будешь рассуждать, не зная ничего об этой фигуре, кроме того, что это фигура связная и что в ней нечетных узлов или совсем нет, или только два. Именно так следует поставить задачу общего математического доказательства.

- Я буду рассуждать так. Раз это фигура связная, то, значит, я имею возможность так или иначе из первого узла попасть в тот, где должно закончиться мое путешествие, то есть либо во второй нечетный узел, либо, если это фигура только с одними четными узлами, вернуться обратно в начальный узел. Чтобы не путаться, я самый простой такой маршрут отмечу красной линией, а остальные оставлю черными. А затем пойду по этой красной линии, но в каждом узле буду останавливаться и проверять, нет ли из него еще черных путей, которые надо обойти раньше, чем отправиться дальше по красному маршруту. Вот это и значит "идти правильно".

- Нет, - ответил Радикс, - это еще не всё. Почему ты так уверен, что можешь обойти каждую из твоих черных фигур?

- Потому что все узлы у них четные. И если в точках, через которые проходят и красные пути, не считать этих красных путей, то для черных путей и эти узлы тоже будут четными...

- Справедливо! Но ведь таким образом мы приходим к той же самой задаче: снова надо доказать, что можно обойти эти фигуры. И вот мы подошли к самому важному пункту нашего рассуждения. Теперь будет не так трудно. Потому, что нам удалось привести задачу об обходе фигуры с некоторым данным числом путей к задаче об обходе фигуры с меньшим числом путей. Понимаешь?

- Понимаю! - воскликнул Илюша. - А эти новые, более простые задачи я опять сведу к таким же, но еще более простым... И так можно каждый раз уменьшать число путей, а ведь нам дано только некоторое определенное число путей...

- Будем говорить - конечное число путей.

- Хорошо. А так как нам дано конечное число путей, то в конце концов все они будут исчерпаны. А следовательно, я доказал, что всякую связную фигуру, у которой нечетных узлов или нет совсем, или их только два, можно обойти непрерывным движением, проходя по каждому пути только один раз, то есть, другими словами, что всякая такая фигура действительно уникурсальна. И при этом я нашел и общее правило такого обхода.

- Попробуй теперь изложить это правило коротко и ясно, то есть сформулировать его.

- 61 -

- Мы начинаем наше путешествие в одном из нечетных узлов, а если их нет, то в каком угодно. Потом наметим какой-нибудь маршрут, который вернет нас в начальный узел или в случае двух нечетных узлов приведет во второй нечетный узел. Затем идем в обход, погашая в каждом узле тем же способом все те черные

закоулки, которые не вошли в наш маршрут. Вот и всё.

- Хорошо, - отвечал Радикс. - А как ты полагаешь, надо ли заранее намечать маршрут или можно обойтись и без этого?

- Мне кажется, - начал Илюша, - что нельзя только упускать из виду того, что путь следует выбрать так, чтобы не нарушить связность фигуры. То есть я могу, например, при первой встрече с черным закоулком не обращать на него внимания, но надо обязательно обойти его из того узла, в котором я должен с ним расстаться. На чертеже (стр. 60) вот что получается: я могу пройти мимо черного закоулка - ромба CFGD, когда я дойду до узла C, но нельзя этого делать, когда я буду в узле D. Ну, разумеется, я говорю о том случае, когда мы двигаемся по направлению от B к E.

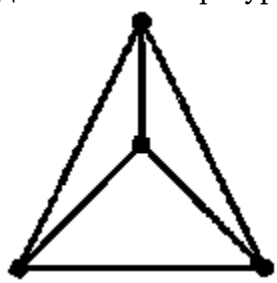
- Так, - благосклонно отвечал Радикс, - все это верно.

И, в общем, ты рассуждал довольно мило. Ну, а теперь уж тебе не так трудно будет доказать и еще один пункт, а именно: что всякое путешествие по уникурсальной фигуре, при котором ты, проходя через пути, не нарушаешь связности, приведет тебя к цели. Постарайся теперь это сформулировать?

- По-моему, это уже совсем просто. Мы идем вперед, не нарушая связности. Число путей у нас все время в силу этого уменьшается. Ясно, что в конце концов мы обойдем все пути.

- Точно, правильно, прекрасно! - задумчиво пробормотал Радикс. - А теперь вот что: дана фигура с несколькими нечетными узлами, и если их больше чем два, то она не уникурсальна.

Возникает вопрос: сколько надо сделать в таком случае обходов? Вот тебе фигура с четырьмя нечетными узлами.



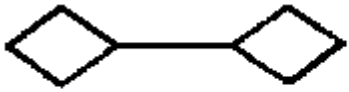
Фигура с четырьмя нечетными узлами.

Рассмотри, сколько надо сделать обходов. Ты увидишь, что обходов надо столько, сколько пар нечетных узлов имеется в фигуре. Это вполне естественно. Вот тебе еще задачка. Возьмем твой первый чертеж - два ромба, соединенных прямой (эту соединительную прямую в фигуре мы называем мостом).

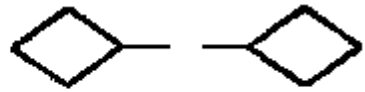
Теперь разорвем наш мост посредине. Подумай над таким вопросом: давай заполним разрыв моста какой-нибудь фигурой, то есть вставим в уникурсальную фигуру с двумя нечетными

узлами еще одну связную фигуру, и разберемся, какую фигуру и как можно вставить.

- 62 -



МОСТ ЦЕЛ.



МОСТ РАЗОРВАН.

Только с четными узлами или с двумя нечетными (стр. 65)? Это особенная геометрия. Она называется геометрия положения или топология. Вот тебе, кстати, прекрасная фигурка. Попробуй нарисовать ее одним росчерком. Ее придумал когда-то геометр Листинг.

- Так, значит, - сказал Илюша, - на свете есть не одна геометрия? Не только та, которую мы учим в школе?

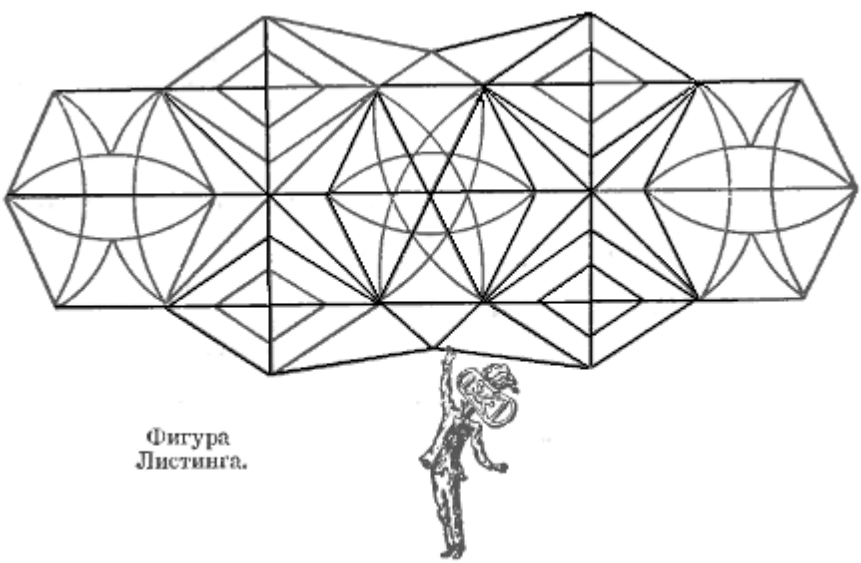
- Далеко не одна.

- А почему этот ваш командор еще и Кандидат Тупиковых Наук? Что это за науки?

- Ну, в лабиринте ты видел немало тупиков. Это они самые.

- А почему он Магистр Деревьев?

- Если из твоего первого чертежа с двумя ромбами я уберу мост, система путей потеряет связность, будет опять два отдельных ромба - и все. Линию, которая соединяет два узла, мы называем путем, а если путь имеет то свойство, что при удалении его система теряет связность и распадается, то мы такой путь и называем мостом. Может существовать система, состоящая только из тупиков и мостов.



Фигура Листинга.

Фигура Листинга.

Такая система называется деревом. В ней ни одного пути, который можно было бы удалить без того, чтобы система не распалась. Ну, а теперь давай подумаем, нет ли чего-нибудь общего между двумя такими задачами: нарисовать уникурсальную фигуру одним росчерком и обойти лабиринт, у которого только один вход. Ты, я думаю, понимаешь, что любой лабиринт можно считать лабиринтом с одним входом, потому что всякий лабиринт мы всегда можем "обнести" еще одним "забором".

- Уж не знаю, - вымолвил не сразу Илюша. - Правда, быть может, если начертить план лабиринта не так, как мы его чертили до сих пор, а изображать линиями не стенки, а самые пути, как раз и получится такая фигура, которую нужно обойти или начертить...

- Постой, постой минуточку! - прервал Радикс его рассуждения. - А как ты полагаешь, нужно ли в таком случае вычерчивать точный план путей?

- Я должен быть точен в том смысле, чтобы на плане было то число перекрестков, какое есть на самом деле, и то же самое относительно путей между ними. А как именно я нарисую самые пути - это неважно, лишь бы не спутаться, куда какой из них ведет.

- Правильно, - резюмировал его собеседник. - Следовательно, вообще можно сказать, что ты интересуешься топологической схемой путей. Если ты представишь себе, что линии путей изображены нитками, которые связаны в узлах-перекрестках, то можешь как угодно деформировать, или видоизменять, "сетку путей" - топологическая схема останется неизменной.

Ты только не должен рвать нитки, развязывать узлы или завязывать новые. Ну, а как же все-таки начертить такую фигуру?

В фигуру вставлен еще один ромб.

А теперь ромб вставлен по-другому.

В фигуру вставлен еще один ромб.

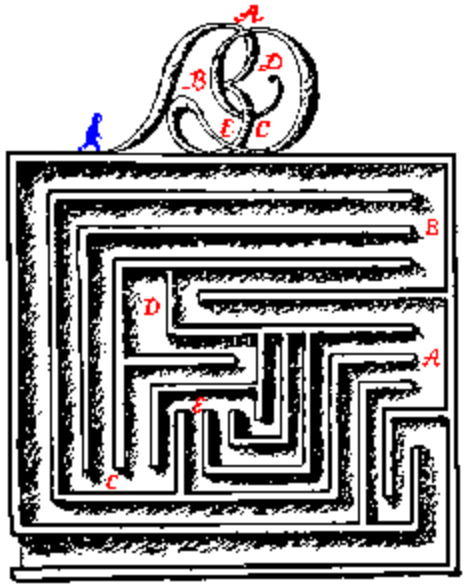
А теперь ромб вставлен по-другому.

- А вот тут, - признался Илюша, - я затрудняюсь: ведь в лабиринте может быть сколько хочешь всяких тройных и вообще нечетных перекрестков, то есть узлов... Как же с этим быть?

- Вот то-то и дело! - отвечал Радикс. - Это значит, что далеко не все лабиринты можно обойти, если ты решишь идти по каждому коридору только один раз. Но ведь это совсем не обязательно...

- Ну конечно! - радостно воскликнул Илюша. - Это как с моим тупиком, то есть я должен пройти именно по два раза по каждому коридору. Значит, и на чертеже лучше всего изобразить каждый коридор двумя линиями. А после этого все нечетные узлы станут четными, потому что они удвоятся: тройной, например, станет шестерным и так далее. И весь план лабиринта превратится в фигуру, у которой есть только одни четные узлы. А такую фигуру, как мы уже доказали, можно нарисовать одним росчерком.

Стало быть, всякий лабиринт можно обойти, проходя два раза по каждому из его коридоров. Вот это действительно замечательное доказательство!



- Нет сомнений, что это действительно доказательство, по только это еще не решение задачи лабиринта. И вот почему. Когда ты чертишь фигуру, тебе необходимо видеть ее всю, а иначе нельзя установить, правильно ли ты идешь и сохраняешь ли все время ее связность.

- 65 -

В лабиринте совсем иное дело: там плана нет и ты не знаешь, каков он в целом, а значит, надо придумать такое правило для его обхода, которое дало бы возможность обойти любой лабиринт, не зная заранее, каковы его нескончаемые коридоры.

- Да, это правда, - согласился Илюша. - Только как?

- Ты что-то толковал насчет правила правой руки? - услышал он в ответ. - А теперь что ты о нем скажешь?

- Когда мне пришло в голову это правило, я думал о тупике, у которого имеются разветвления, а они, в свою очередь, тоже тупики. Если лабиринт построен по этому правилу, то я, конечно, обойдя два раза каждый коридор, обойду весь лабиринт, если нет петель. А если есть петли, то все, что приходится внутри петли, я могу пропустить.

- А что такое "петля", как ее можно обнаружить на схеме путей лабиринта, о которой мы только что говорили?

- Это на схеме будет замкнутый путь, кольцо, то есть круговой маршрут внутри лабиринта. Если я попал на такой маршрут, то могу вернуться к тому месту, где вступил на него с другой уже стороны, причем я приду туда по еще нехоженому пути. В тупиковом лабиринте таких замкнутых маршрутов нет.

- Правильно. Мы можем даже это свойство - отсутствие

петель - принять за определение того, что такое тупиковый лабиринт. Теперь от простого случая попробуем перейти к более сложному. Скажи-ка, нельзя ли превратить какой-нибудь лабиринт с петлями в тупиковый и как это сделать?

- Если бы я был строителем этого лабиринта, то отметил бы все петли и перегородил их, чтобы нельзя было больше пройти по ним кругом.

- Превосходно. Ну вот и расскажи мне подробно, как бы ты на месте строителя лабиринта все это сделал.

- Раньше всего, конечно, я бы достал план лабиринта и на нем начертил бы дорогу, начиная от входа и все дальше в глубь лабиринта. Каждый раз у кольцевого маршрута отмечал бы, что здесь ставлю перегородку... Ну, где бы ее поставить? Поставим в том конце кольцевого коридора, где он выводит опять к моим старым следам. Если так сделать, каждая петля станет тупиком, стало быть, я пройду ее всю, дойду до перегородки, поверну обратно, выйду из этого нового тупика и пойду дальше по основной дороге. Да буду посматривать, не набреду ли еще на петлю, которую надо перегородить. Когда я пройду таким образом на плане весь лабиринт...

- А уверен ты в том, что пройдешь таким образом действительно весь лабиринт?

- Кажется, уверен, - отвечал Илюша, размышляя. - Да, разумеется, пройду весь лабиринт и даже дважды, потому что я ведь представляю себе лабиринт в виде хитро завинтившегося тупика с рядом петель. Но если лабиринт представляет собой тупик, то нет сомнений, что я его пройду дважды: один раз двигаясь в глубь тупиковых коридоров, а другой - возвращаясь из них обратно. Каждую петлю я превращаю перегородкой тоже в тупик, а следовательно, каждую петлю тоже обойду дважды. Так что у меня нет сомнении в том, что обойду весь лабиринт и пройду его два раза - туда и обратно.

Ошибиться можно только в том случае, если я пропущу какой-нибудь коридор, что может нарушить связность. Если этого не случится, то я обойду эту самую уникурсальную фигуру двойных путей.

- Молодец! - одобрительно пробурчал Радикс. - Теперь мы подошли к концу наших рассуждений. Подумай: нельзя ли обойтись без плана и ничего не замуровывать? Скажи, пожалуйста, знаешь ли ты древнегреческий миф о Тезее, Ариадне и страшном Минотавре?

- Как будто знаю.

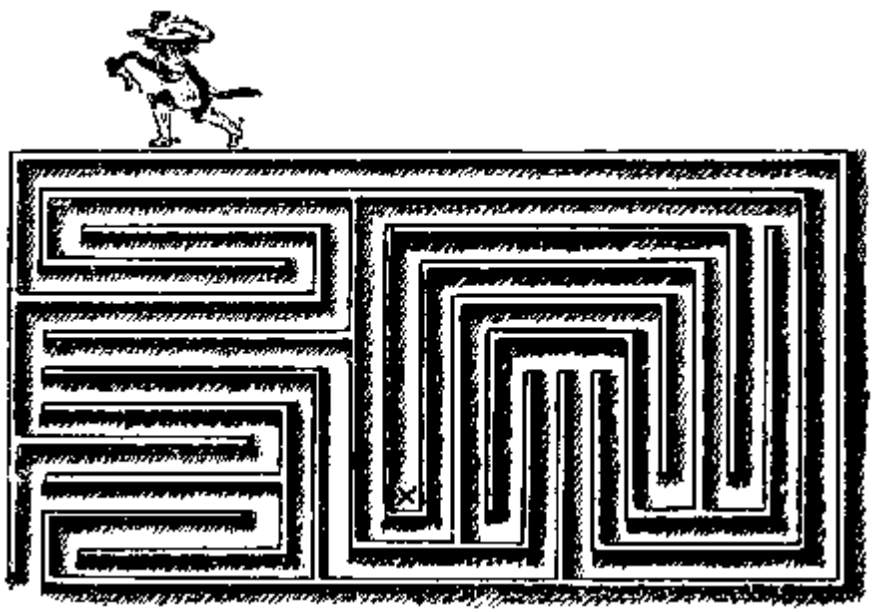
- А ну-ка расскажи мне.

- В то древнее время на острове Крит царствовал жестокий царь Минос. И вот он обложил Афинское царство ужасной данью: афиняне должны были каждый год отправлять Миносу в дар семерых юношей и семерых девушек. А коварный Минос посылал их в лабиринт на съедение чудовищу Минотавру - получеловеку-полубыку. В Афинах тогда царствовал Эгей, и вот его сын Тезей, когда подрос, попросил отца отправить его на остров Крит, к Миносу, в числе семерых несчастных юношей, чтобы положить конец этой ужасной дани критскому царю. Эгей долго колебался, но потом решил исполнить просьбу своего воинственного сына. Тезей поехал на Крит, там его полюбила царевна Ариадна и дала ему путеводную нить. Тезей сразился с Минотавром, убил его своей булавой и вышел из лабиринта. А затем он уехал с острова Крит вместе с Ариадной.

- Верно, - сказал, усмехнувшись, Радикс. - Я вижу, что эта история с лабиринтом тебе понравилась. Ну, а как ты полагаешь, что он сделал с нитью Ариадны, когда пришел к лабиринту?

- Ну разумеется, он укрепил один конец у входа, а с клубочком пошел дальше, разматывая его.

- Значит, ничего не замуровывал и не перегораживал?



Лабиринт УУ.

ПЛАН ЕГО ПУТЕЙ.

- Ясно. И плана у него не было. Он просто шел... Ведь нить Ариадны отмечала уже пройденный путь, так что если она попадалась ему поперек дороги - это значило, что он попал в петлю и пришел на то самое место, где уже был. И это, наверно, было сперва довольно жутко! Идешь, идешь и вдруг видишь - твоя нить лежит в новом коридоре. То есть это только так кажется, что он новый, а на самом-то деле ты уже в нем был (иначе откуда бы в нем взялась нить?). Что ж теперь делать?..

- 68 -

- Вот именно! - усмехнулся Радикс.

- Постой! - возразил мальчик. - Ты не торопись надо мной смеяться, это я просто рассуждаю вслух. Я хочу себе представить положение этого Тезея, которому казалось, что он идет вперед, а вдруг нить показывает, что он просто вернулся туда, где уже один раз был. Но ведь это как раз и означало бы, что он попал в петлю и находится в конце ее, там, где я ставил перегородку. Значит, чтобы правильно идти, он должен считать, что тот коридор, по которому он шел, перегорожен, то есть нужно вернуться, сдваивая нить. Тогда бы он шел точно так же, как я, когда превращал лабиринт в тупик. Значит, надо только следить за тем, чтобы идти ни разу не пересекать и не пропускать свободных коридоров, то есть идти как будто по тупиковому лабиринту.

- Отлично, юноша! - ответствовал Радикс. - Теперь ты, очевидно, сумеешь воспользоваться нитью Ариадны. Но у меня есть еще один маленький вопрос: нельзя ли эту нить из лабиринта вытащить обратно, чтобы вернуть ее с благодарностью царевне?

- Да очень просто: взять ее за конец и вытащить.

- Но ведь у тебя у выхода оба конца, то есть и начало и конец. Нельзя ли за оба конца взяться сразу?

- Из тупика можно, конечно, вытащить за оба конца...

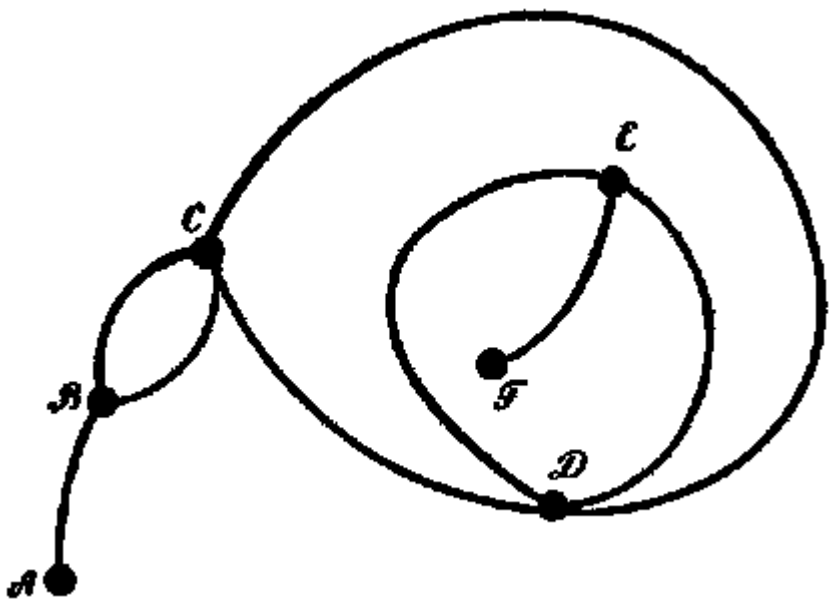
Ах да, она и тут ведь лежит как в тупике! Ну разумеется, можно за оба конца тянуть.

- То-то и есть! А если бы ты бродил по лабиринту как попало, то за оба конца мог бы и не вытащить. Положим теперь, что ты уже дошел до центра лабиринта и надо идти назад. Не помогла бы тебе еще раз нить, то есть не смогла ли бы она указать, как сократить обратный путь?

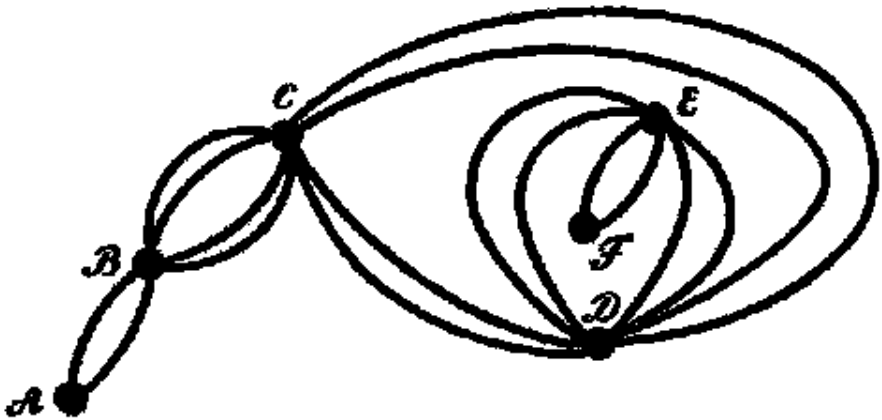
- Если бы я, находясь в центре, натянул нить, прикрепленную у выхода, до отказа, наматывая ее на моток, то вытянул бы ее из всех лишних петель и тупиков и нашел бы самый короткий путь из центра к выходу.

- Самый короткий, ты полагаешь? Нет, братец, это неверно. Ты торопишься. Это не самый короткий, а только наибольшее сокращение того пути, по которому ты двигался и который был отмечен нитью. В центр от входа может вести несколько путей, и ты мог с самого начала попасть не на самый короткий из возможных маршрутов. Теперь мы все это разобрали, и остается только решить, как же обойти лабиринт, если нити Ариадны у нас нет.

- Тогда ничего другого не остается, как отмечать каким-нибудь способом на перекрестках те коридоры, по которым я прошел. Я бы ставил черточку на стенке того коридора, по которому пришел на перекресток, и на стенке того, по которому собираюсь уходить с этого перекрестка, и еще черточку, если я второй раз отправляюсь по уже пройденному, отмеченному коридору.



Топологическая схема его путей.



Уникурсальная фигура обхода.

- Допустим, что ты ставишь эти черточки. Ну, а как же ими надо пользоваться?

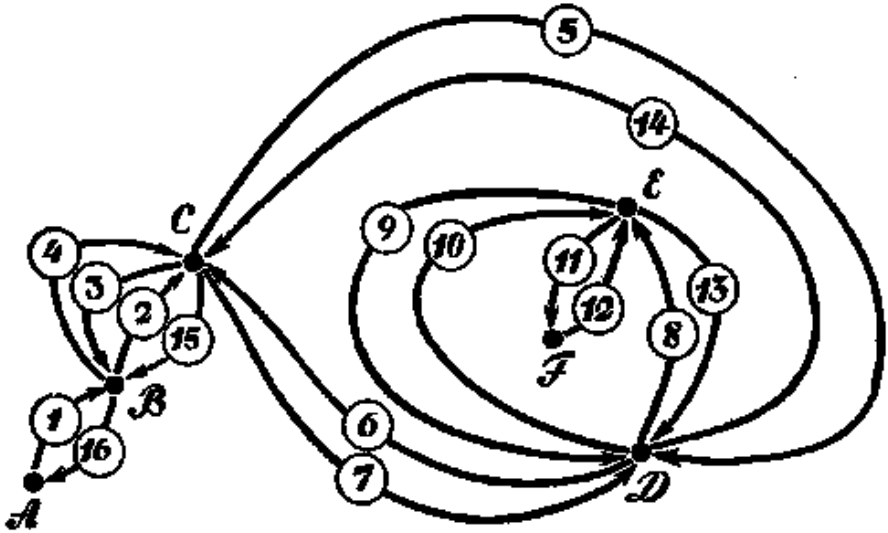
- 70 -

- Основное правило такое: каждый раз, когда я прихожу на перекресток, где уже был, я должен возвращаться обратно, если только это возможно. Так будет в том случае, если я пришел по новому коридору, в котором раньше не был (я бы это сразу заметил, потому что на стенке не было бы черточки). А если черточка уже есть, то я сейчас же ставлю вторую, которая запретит мне возвращаться на этот путь, потому что он обойден дважды. Тогда я должен идти по какому-нибудь - все равно по какому - из нехоженых коридоров, а если их больше нет, это означает, что я тут все исследовал и, следовательно, могу смело отправляться обратно по тому самому коридору, по которому пришел на этот перекресток в первый раз.

Этот коридор меня и поведет по правильному пути.

- Верно. Вот это и есть правило для двойного обхода всякого лабиринта. Но все ли случаи ты предусмотрел? Не может ли случиться так, что тебе и обратно идти некуда будет и нехоженых коридоров больше нет, а отмеченных по одному разу - несколько, и ты не знаешь, какой выбрать?

Схема обхода лабиринта УУУ.



Придя в B по пути № 3, я вижу по отметкам, что уже был на перекрестке B, и поэтому возвращаюсь по тому же коридору путем № 4, чем погашается весь участок BC по пути № 3-4. Так как в C я вижу теперь свободные коридоры, то выбираю один из них (№ 5), избегая пока коридора CB, по которому я пришел в C первый раз. Из D я выбираю произвольный путь, например № 6, и, наткнувшись в C на свои отметки, возвращаюсь тем же коридором (путь № 7) в D, откуда одним из свободных коридоров (№ 8) попадаю в E. Избрав путь № 9, я обязан вернуться тем же коридором (путь № 10) и теперь неизбежно попадаю в центр лабиринта (путь № 11 и 12), откуда возвращаюсь ко входу по единственной оставшейся дороге (№ 13, 14, 15, 16).

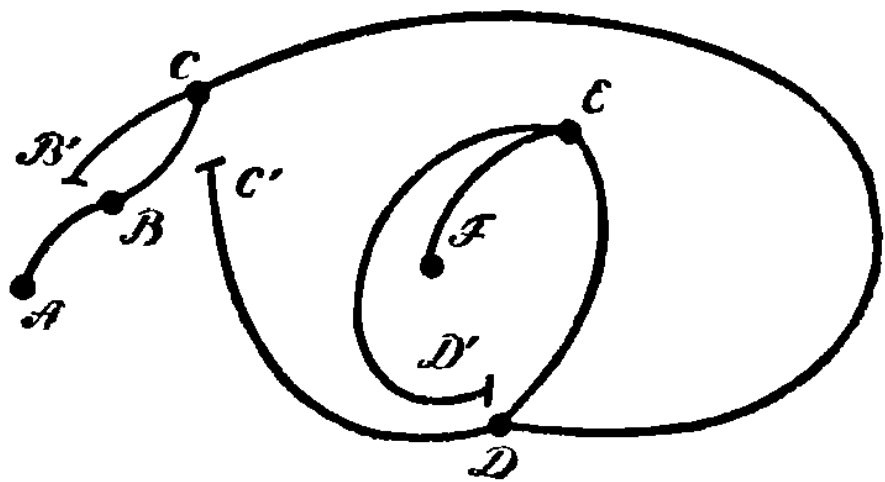


Схема превращения лабиринта УУУ в дерево.

- Нет, так случиться не может: ведь я пройти сквозь перекресток, придя по свободному коридору, не могу - в этом-то и заключается суть главного правила. Если я стою и размышляю, куда дальше идти, это значит, что я вернулся по тому самому коридору, который выбрал для того, чтобы уйти с перекрестка: теперь он отмечен уже двумя черточками. Значит, надо найти коридор с одной черточкой. Это будет первый коридор, по которому я пришел, и эта одна черточка указывает обратный путь. Если я очень устану прежде, чем обойду весь лабиринт, то могу по этому признаку в любой момент выбрать правильный путь для возвращения к выходу. С нитью это совсем просто: если натянуть ее, она пройдет через каждый перекресток, который мне необходимо пройти при возвращении по своим следам; один конец будет тянуться ко мне, а другой - к выходу.

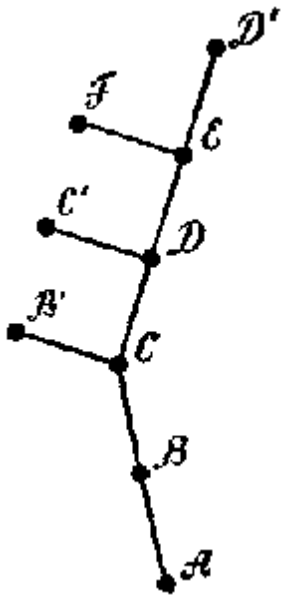
- А теперь, - сказал Радикс, - рассмотрим еще раз наш способ двойного обхода в несколько иной форме. Ты помнишь, что мы с тобой говорили о дереве, когда толковали об уникурсальных кривых?

- Помню. Дерево - это такая связная фигура, которая состоит только из мостов и тупиков.

- Верно. Ну, а чем же отличается схема путей лабиринта от дерева?

- В лабиринте могут найтись петли, то есть замкнутые пути, а в дереве, как и в настоящем, ветки обратно в ствол его не врастают.

А если мы этот чертеж развернем:



- Вот именно! Но представь себе, что тебе пришлось

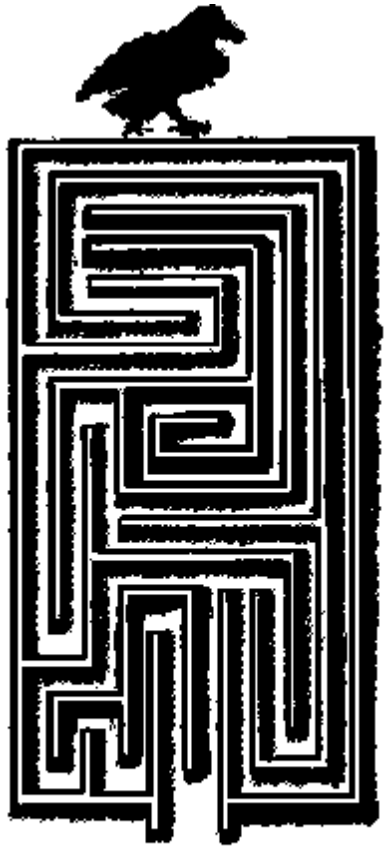
повстречаться как раз с таким деревом-уродом, у которого некоторые ветки вросли обратно своими концами в ствол и друг в друга. Что бы ты стал делать, чтобы обратить такого урода в обыкновенное дерево, в смысле расположения его ветвей, разумеется?

- 72 -

- Взял бы пилу или топор, залез на это дерево и стал отделять приросшие концы веток друг от друга и от ствола.

- Правильно. Так ведь это и есть твое первое правило, по которому ты, придя на перекресток, где уже был, возвращаешься обратно.

Именно таким образом ты и превращаешь весь лабиринт в дерево. Если ты возвращаешься снова к своему пути, это означает, что ты пошел как бы по вросшей в ствол ветке и сделал круг. А когда ты не хочешь снова идти по основному пути и идешь вспять, то как раз и "отделяешь вросшую ветку", правда, действуя не топором, а просто запрещая себе перескакивать на основной путь.



Начерти-ка сам схему путей этого лабиринта и схему его обхода!

- Так, - отвечал Илья. - Теперь как будто все ясно. Действительно, если я должен облазить все Начерти-ка сам схему путей этого лабиринта и схему его обхода! дерево, значит, надо облазить каждую ветку, а спускаться вниз я начну только тогда, когда отмечу все ветки. Именно это я и буду делать в лабиринте, превращенном в дерево или в тупиковый лабиринт, если буду соблюдать второе наше правило, то есть не уходить с перекрестка по первому пути, пока есть другие, еще не пройденные дважды коридоры.

- Вот ты разберись хорошенько во всех наших схемах, особенно в схеме УУУ, и тогда все ясно станет. А потом попробуй сам на досуге поразмыслить вот над чем. Наше правило обеспечивает двойной обход лабиринта. А может быть, можно обходить дважды не все коридоры? Ведь схему коридоров лабиринта все же иногда удается превратить в уникурсальную фигуру, удваивая не все коридоры лабиринта. Ну-ка, попробуй

найти какое-нибудь общее правило для этого. Ты сам пробовал ходить по лабиринту и знаешь, что это довольно утомительно. Нельзя ли как-нибудь уменьшить количество этих скучнейших, а быть может - кто знает? - и совершенно лишних хождений взад и вперед по одним и тем же коридорам?

При этом, конечно, надо сделать так, чтобы весь лабиринт обойти, и в центре его побывать, и выйти на белый свет от туда.

- 73 -

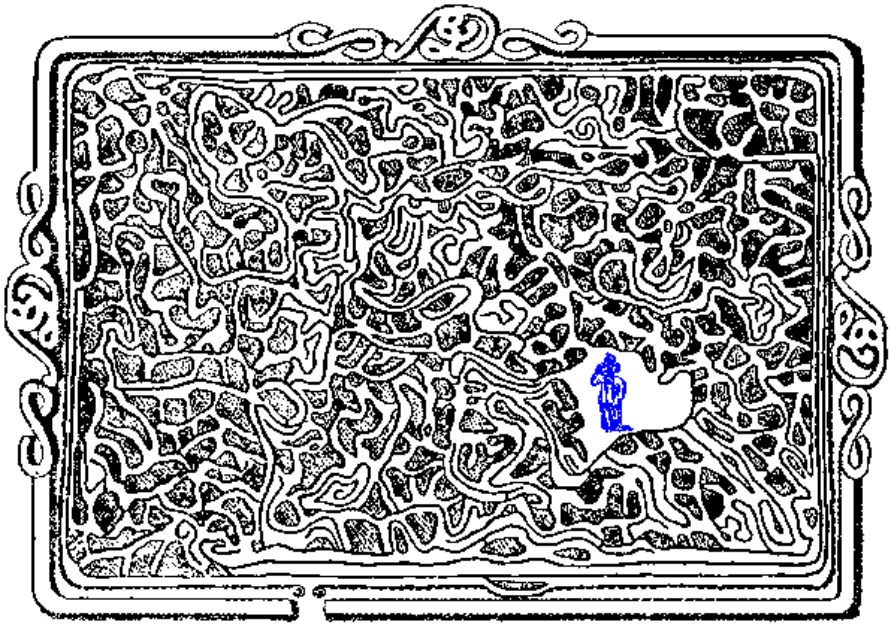
Вот тут-то, друг Илюша, тебе и придется вспомнить кое-что из того, о чем мы с тобой толковали. Например, о топологической схеме лабиринта, затем о четности перекрестков-узлов в лабиринте и еще кое о чем...

Илюша посмотрел на Радикса и задумался.

- Вот уж не думал, - сказал он через минутку, - что задача о лабиринтах такое сложное дело! Читал я про них в разных книжках, и мне казалось, что это очень просто[7]. Мне только вот еще что приходит на ум. Мы с тобой разбирали лабиринты на плоскости. А могут существовать лабиринты в пространстве?

- Разумеется! Больше того, ведь только такие лабиринты и существуют в действительности. Коридоры копей, каменоломен, шахт, катакомб, как и сплетение подземных ходов, которые роет крот, можно рассматривать как пространственные лабиринты. И все наши правила отлично годятся и в этом случае, ибо они от числа измерений не зависят. Только твое правило правой руки тут никак не удастся применить.

Лабиринт, который построил специально для любителей элоквенции У. У. Уникурсальян, К. Т. Н., Д. Ч. и Н. У., М. Д., К. и К. О. С. М., П. В. В. М.



- 74 -

- Уф! - воскликнул Илюша. - Все-таки это все довольно хитро. Но на досуге я все обдумаю и разберу как следует...

- Итак, - заметил Радикс, - мы с тобой не торопясь разобрали подробно две немаловажные задачки, а в продолжение этого разбора коснулись некоторых довольно серьезных вещей.

Не так уж плохо! Чем с большей старательностью ты отметаешь все излишнее, тем скорее приближаешься к решению...

Илюша задумчиво посмотрел на своего всеведущего друга и промолвил:

- Да... пожалуй... Что ж еще осталось мне спросить у тебя? А, вспомнил! Что это за интересный зверек бегал все время через лабиринт то вперед, то назад, точно заводной, у этой страшной тетушки Розамунды?

- А-а, - засмеялся Радикс, - тебе понравилась ее мышка! Она, братец, не простая мышка, а даже очень умная. Эта мышка - электронный робот. У нее превосходная электронная память, и для нее решить задачу лабиринта довольно просто. Она быстро запоминает свои ошибки и во второй раз уже не ошибается, а бежит по лабиринту, как по садовой аллее[8].

- 75 -

- Интересно!.. А кто такая богиня Лилавати, которую тетушка поминает через каждые два слова?

- Лилавати - прекраснейшая и благороднейшая богиня, - сказал Радикс. - Древние индусские математики называли ее "Прекрасная дева с блистающими очами". А попросту сказать, так

называется одна глава из старинного сочинения индуса Бхаскара Ачария "Венец Астрономической Мудрости". Слово это в данном случае значит "благородная наука", а речь идет о решении уравнений. Ну, а у тетушки это просто такая поговорка.

- Так, - отвечал Илюша. - Ну, это по крайней мере хоть нетрудно. А древние индусы очень любили математику, если они придумывали для нее такие красивые имена?

- Ну еще бы! - произнес почтительно Радикс. - Ведь это они придумали нуль. А вычислять с нулем гораздо легче. Наши арабские цифры на самом деле индусские цифры. Вот, например, еще пифагоровы числа, - хоть они и называются пифагоровыми, на самом деле их надо называть вавилонские числа, ведь вавилоняне их знали раньше греков.

- А что такое пифагоровы числа? - спросил Илюша.

- Неужели ты не знаешь? - удивился Радикс. - это очень... Тесс! - вдруг сказал он, сделав серьезное лицо - Постой-ка... Ты ничего не слышишь?

Илюша прислушался и услыхал какие-то довольно медленные, ровные и тихие шаги.

- Кто-то идет сюда, - сказал он.

- Тише, тише! - зашептал Радикс. - Давай спрячемся.

Ты сейчас увидишь замечательное зрелище. Только смотри - ни одного звука. Тесс!..

Илюша и Радикс быстро юркнули в темный угол. Тихие шаги медленно приближались. И они звучали так приятно и гармонично, что казалось, будто слушаешь удивительную музыку, которая становилась вся яснее. И вот из мглы показались какие-то стройные, высокие фигуры.

Одна за другой перед глазами удивленного Илюши выходили из неопределенного тумана и двигались вперед высокие прекрасные женщины в легких одеждах, ниспадавших с их стройных фигур. Они смотрели куда-то вдаль, словно не замечая, что делается кругом, и странно улыбались, будто думая о чем-то, что только им одним известно. Илюша смотрел на них и думал, что эти женщины похожи на тех прекрасных мраморных греческих богинь, которых он в прошлом году видел с напой в Московском музее изобразительных искусств на Волхонке.

- Какие красавицы! - прошептал Илюша. - А я-то думал, что у вас здесь только и есть страшилища, вроде Розамунды.

- 76 -

- Тесс! - зашипел на него Радикс. - Говори потише.

Впрочем, это, брат, такие важные особы, что они, конечно, нас с тобой заметить не могут.

Илюша снова посмотрел на медленно двигающихся стройных

молодых женщин и заметил, что у первой на платье выткана цифра "6", у другой- "28", у третьей - "496", у четвертой- "8128". У следующих были, кажется, вытканы тоже какие-то числа, но этого Илюша не мог разобрать.

- Да кто же они такие?

- Тесс!.. - прошипел Радикс. - Говори потише... Это - Совершенства.

Схолия Шестая,

благодаря которой читатель узнает очень простое правило, как из септиллиона, то есть из 1000 000 000 000 000 000 000 000 000 = 10^{26},

отобрать восемь бесподобных красавиц, и так как это правило применялось с успехом в течение двух с лишним тысяч лет самыми рассудительными людьми, то на него вполне можно положиться. Однако приятные рассуждения на эту тему неожиданно прерываются появлением довольно солидной особы, которую было бы затруднительно осмотреть обычными средствами, поэтому наши путешественники отправляются за помощью к очень юркому, трудолюбивому и словоохотливому маленькому народцу, и затем Илюша узнает немало неведомых ему до сей поры вещей по вопросу о четных и нечетных числах, их квадратах и о том, чем занимаются, с одной стороны, высшая арифметика, а с другой - разные бездельники.

Илюша поглядел на Радикса недоверчиво и спросил:

- То есть как - Совершенства?

- Тише! Тише! - сказал Радикс. - Впрочем, они уже удаляются. Эти удивительные существа суть совершенные числа великого Евклида...

- Это тот ученый грек, который написал "Начала", про геометрию?

- Он самый, а случилось это за три века до нашей эры. Поистине это был великий человек, - ответил очень серьезно Радикс. - "Совершенство же этих чисел заключается в том, что каждое из них равняется сумме своих делителей, разумеется исключая его самого. Например, число "шесть". Его делители - 1, 2 и 3. Сложи и опять получишь шесть. Или число "двадцать восемь". Его делители - 1, 2, 4, 7 и 14. Сложи их, и снова получается двадцать восемь.

Следующее число будет 496, и оно опять-таки равно сумме своих делителей - 1, 2, 4, 8, 16, 31, 62, 124 и 248. Совершенно так же и с числом 8218, что ты и сам можешь легко проверить.

- И много этих чисел? - спросил Илюша.

- Если по натуральному ряду чисел добраться до десяти в двадцать четвертой степени...

- Это будет, значит единица с двадцатью четырьмя нулями! А как называется такое громадное число?

- Оно называется **септиллион**. Это будет девятый класс

чисел: единицы, тысячи, миллионы, биллионы, триллионы, квадриллионы, квинтиллионы, секстиллионы и, наконец, вот эти септиллионы. Так вот, если до них добраться (а как ты сам понимаешь, это не так просто), то на всем этом протяжении чисел окажется всего-навсего восемь совершенных чисел. Они были найдены триста лет тому назад математиком Мерсенном. Еще Евклид дал общую формулу этих чисел, которая, разумеется, была выведена из наблюдений над ними.

И все же формула выводится на основании общих соображений. Формула очень простая. Но обращаться с ней тоже не очень просто. Вот она какова:

$2^n (2^{n+1} - 1)$.

При этом n может быть любым числом, однако выражение $(2^{n+1} - 1)$ должно быть обязательно простым числом, то есть не иметь никаких делителей, кроме единицы и самого себя.

- Я знаю эти числа: 1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23 и так далее. [9]

- Ясно, - ответил Радикс. - Но если ты сам попробуешь применить эту формулу, то скоро убедишься, до чего это трудная задача. Я назвал тебе четыре совершенных числа. Для них в Евклидовой формуле n = 2, 3, 5 и 7. Если хочешь ознакомиться и с другими, то имей в виду, что для них число и будет равняться 13, 17, 19 и 31. Восьмое число начинается с квинтиллионов. Позже было найдено девятое совершенное число (для него n = 61), а затем - десятое, для которого n = 89. Для одиннадцатого n = 107. Для двенадцатого n = 127; в этом числе больше семидесяти пяти цифр. Ты заметил, что все указанные совершенные числа четные? Так вот, греческий математик Ямвлих говорит (и в правильности этого легко убедиться), что из всех четных чисел совершенными могут оказаться только те, которые подходят к формуле Евклида. Что формула Евклида дает в итоге четное число, это как будто ясно. Не - правда ли?

- Мне тоже так кажется, - отвечал Илюша поразмыслив, - потому что первый множитель - это два в какой-то степени, а степени двух все ведь четные?

- Да. И при этом никто никогда еще не мог найти ни одного нечетного совершенного числа. Однако, с другой стороны, все-таки никому так и не удалось доказать, что совершенное число не может быть нечетным... Сколько их? Тянутся ли они до бесконечности? Или на каком-либо обрываются? Никто сказать не может. В семнадцатом веке Антонио Катальди доказал, что все совершенные числа, кроме "шести", можно представить формулой (9n + 1). Это верно, однако ничего особенного из этого не

следует. В двадцатом веке пытались доказать о них хотя бы то, что они могут быть только четными. Однако удалось доказать только то, что нечетные совершенные числа, если, конечно, они существуют, должны делиться по крайней мере на пять различных простых чисел и должны быть чрезвычайно велики.

- Да-а!.. - протянул Илюша. - Действительно, странная задача. А какой, собственно, толк от этих совершенных чисел?

Мне кажется, что какое-нибудь квадратное уравнение гораздо полезнее. При его помощи решаются разные задачи, которые нужны в физике или в технике, ну и в геометрии тоже. Ни химики, ни инженеры, ни астрономы в этих совершенных числах, по-моему, не нуждаются. Они, конечно, очень красивые, эти Совершенства, но только... мне показалось, немножко похожи на кукол. А что с куклами делать? Поиграть да и бросить. И они молчат. Ты вот говоришь со мной, а они нет.

Я не понимаю, зачем ими заниматься. Не все ли равно, четные они или нет? Ведь с их помощью плотину не выстроишь, самолет не сделаешь?

- 80 -

- Конечно, - сказал Радикс, - ими сейчас вряд ли кто занимается, но, видишь ли, так рассуждать тоже нельзя, хотя с первого взгляда кажется, что ты совершенно прав и твое рассуждение тоже в своем роде совершенство. Однако... (АЛ-1, IX).

В эту минуту Радикс чуть было не свалился наземь, потому что откуда-то сбоку подул сильный ветер.

- У-у! - сказал Радикс, причем на его лице изобразилось нечто очень почтительное.

Снова завыл сильный ветер, и наши собеседники вынуждены были забиться в угол, чтобы их не унесло. Илюша всмотрелся в ту сторону, откуда дул ветер (а надо сказать, кстати, что он дул как раз с той стороны, откуда появились эти совершенные красавицы), и различил, что на громадном расстоянии от него двигалось что-то очень большое. Это было нечто вроде облака, вернее, это был левый край облака, и довольно правильно закругленный. Двигаясь, это облако колыхалось толчками, и, по-видимому, от этого-то и возникал такой ветер.

Когда же Илюша поднял глаза, то увидел, что облако и в вышину тянется так далеко, что не поймешь, где у него конец.

А ветер все гудел так громко, что Илюше стало даже страшно.

Эта громадина быстро приближалась.

- Тебе повезло! -крикнул ему Радикс изо всех сил в самое ухо, ибо свист ветра не давал говорить. - Но только отсюда ничего не увидишь. Бери меня за руку. Ты увидишь, какие могучие прыжки

могу я совершать. А этот страшный вихрь будет дуть нам в спину и помогать двигаться.

- Бежать, конечно, надо, - сказал ему Илюша, тоже крича во всю глотку. - А то еще раздавит!

- Ничего! - отвечал Радикс. - Мы сейчас добежим до Лежандровой горы, где у нас выстроена замечательная консидератория, и оттуда кое-что увидим.

Радикс схватил Илюшу за руку и прыгнул. Они оба взлетели вверх, порыв ветра подхватил их, и они пронеслись но крайней мере километров пять, и при этом довольно скоро.

- Вот это прыжок! - самодовольно произнес Радикс, опускаясь на землю. - Так не всякий прыгнет. Ну-ка еще раз!

И они снова взлетели.

- А что такое консидератория? - спросил Илюша на лету.

- Ну, это, - отвечал Радикс, снова опускаясь на землю, - вроде обсерватории, только в обсерватории наблюдают, а в консидератории рассматривают.

На этот раз они пролетели не так далеко, так как ветер на этом расстоянии был значительно слабее.

И они прыгнули еще раз.

- А там есть телескопы? - спросил Илюша.

- 81 -

- Нет. Зачем там телескопы? Там куммерскопы.

- Куммерскопы? - повторил Илюша. - А это еще что за штуки?

- Ну, как телескопы - аппараты для наблюдения, так куммерскопы - аппараты для рассмотрения. Между прочим, там ты увидишь очень много моих детей.

- Разве у тебя есть дети?

- И немало! - отвечал самодовольно Радикс. - Один философ назвал их "чудовищами идеального мира", но это сущий вздор, потому что все мои ребятишки очень трудолюбивые и в высшей степени полезные существа.

В продолжение этого разговора они постепенно приблизились к красивой горе, на которой возвышалась странной формы башня. Очевидно, это и была консидератория. Перед башней стоял большой обелиск, на основании которого были написаны три цифры - 3, 5 и 7, окруженные лавровым венком.

Когда наши путешественники подошли к дверям башни, Илюша увидел, что над этими дверями в два ряда написаны цифры: сперва - 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, а потом - 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89 и 97.

- 82 -

Цифры эти были высечены на громадной цельной плите из красивого синевато-зелено-серого камня нефрита и немного

светились удивительно приятным, чуть-чуть розовым огнем. При этом цифры 37, 59 и 67 горели более ярко, чем остальные. Вокруг башни было тихо, и только легкие порывы ветра, достигавшие наших путников, давали им понять, что тот колосс, от которого они ускакали, все еще движется в том же направлении.

На дверях башни был вырезан сложный орнамент, где Илюша увидел массу корней разных степеней, и все они извлекались почему-то из единицы.

Тут они вошли в здание, и к ним немедленно подлетел какой-то крохотный человечек, личико которого было чрезвычайно странно устроено. Слева это было лицо как лицо, но правая сторона была до того неопределенная, что когда Илюша смотрел на правую половину лица этого человечка, никак не мог понять, есть ли у него эта правая половина или нет.

- Дорогой папенька! - воскликнул человечек, бросаясь к Радиксу.

Радикс приветливо улыбнулся и сказал человечку:

- Позволь тебе представить одного любознательного юношу, с которым мы сюда зашли на минуточку посмотреть в куммерскоп. Он, видишь ли, осматривает наш мир...

Тут Радикс прошептал что-то человечку на ухо, но что, Илюша разобрать не мог. Человечек быстро закивал головкой.

- Очень-очень рад, милейший Илюша! - сказал он, пожимая мальчику руку. - Позвольте, кстати, представиться: я - комплексное число. Мое имя Мнимий Радиксович. Мы, конечно, с вами встречались. Узнаете?

- Конечно, я вас знаю. Вы получаетесь из квадратного уравнения, когда под корнем оказывается отрицательное число. Слева у вас вещественное число и справа - мнимое.

- Совершенно справедливо! - воскликнул в восторге Мнимий Радиксович. - Именно таким образом, при помощи моего уважаемого папеньки, квадратного корня, я и получаюсь. Поэтому меня и зовут Мнимий. Некоторые думают, что я что-то загадочное и несуществующее, но вы, конечно, этого не думаете, да это и трудно думать, видя меня перед собой воочию!

- Я не буду вам все показывать, - сказал Мнимий Радиксович, - ибо у нас есть здесь аппараты и более сложные, чем куммерскоп, но они требуют не объяснений и даже не лекций, а нескольких годов изучения. Я проведу вас наверх; оттуда в люк вы сможете увидеть общин вид куммерскопа. А потом я отведу вас к экрану. При помощи нашего экрана вы сможете обозреть Великую в доступных нам пределах. А затем я вас сведу в музей, где есть несколько простеньких старинных моделей, доступных почти всякому.

- 83 -

Радикс и Илюша, разумеется, не стали спорить. Они остановились перед маленькой дверью, и через минуту лифт унес их на самый верх высокой башни.

- Пожалуйте! - сказал Мнимий Радиксович.

Все трое осторожно подошли к небольшому балкончику, откуда открывался вид в глубь башни. Все внизу было залито ярким светом. Бесчисленное множество комплексных человечков суетилось там, как муравьи на муравейнике. Бесшумно и неопределенно поворачивались какие-то громадные круги, какие-то знаки появлялись и исчезали в воздухе. Непрестанно проплывали в разных направлениях стрелки. Они появлялись, поворачивались, удлинялись, отражались в громадных зеркалах и исчезали. Несколько бледных фигур легкими движениями рук управляли всей этой сложной и беззвучной суетой. В этом непрерывном, очень быстром, но четком движении была какая-то строгая правильность. Илюша смотрел, затаив дыхание.

- Ну, идемте, - шепнул им Мнимий Радиксович. - Тут ведь идет настолько тонкая работа, что даже наше безмолвное присутствие может ей помешать. Пойдемте к экрану. Он находится в зале Трех Великих Знаков.

Они обошли балкончик и подошли к тяжелым, литым бронзовым дверям, на каждой из которых среди множества узорных украшений были изображены буквы e, π, i. Гости проникли в самую верхнюю часть башни. Это был громадный сумрачный зал со сводчатым потолком. В глубине стояла огромная пустая рама, а неподалеку от двери - несколько кресел.

- Присаживайтесь! Сейчас я приведу экран в действие.

А когда он начнет работать, то вы простым движением руки сможете его поворачивать, куда вам будет удобно.

Свет в зале потух. Громадная пустая рама заполнилась мягким светом. Это и был экран.

- Сейчас, - крикнул откуда-то из глубины Мнимий Радиксович, - сейчас увидите! А когда увидите, тогда уже управляйте сами. Правой рукой. Это очень просто.

Желтоватое сияние на громадном экране начало местами бледнеть, местами разгораться, и тут Илюша стал постепенно разбирать на нем несколько неопределенные формы того колоссального существа, от которого они недавно так поспешно ускакали.

- 84 -

Понемногу эти формы становились яснее. Илюша двинул рукой влево, и изображение переместилось. Тут он ясно увидел тот левый край этого колосса, который он только что видел

своими собственными глазами. Теперь ему показалось, что это край платья. Он начал двигать изображение в другую сторону. Край платья, легко колтыхаясь, все двигался и двигался, а конца не видно было. Наконец Илюша заметил какую-то неясную тень громадных размеров, которая мелькнула на экране, напомнив своей формой ногу, обутую в красивую туфлю странного, очень старинного фасона. Затем, все время передвигая экран, чтобы наконец дойти до правого края фигуры, Илюша рассмотрел и другую ногу, которая тоже мелькнула и быстро исчезла. Наконец Илюша добрался и до правого края фигуры.

- Каково же расстояние от одного края до другого? - робко спросил Илюша.

- В точности это вам никто сказать не может, - услыхал он в ответ.

Поднимая экран, Илюша наконец разобрал кое-как, что перед ним, по-видимому, необозримо громадная фигура женщины в старинном платье; он еле-еле мог рассмотреть ее до пояса. Далее шли облака и тучи, сквозь которые ничего не было видно.

- Это какая-то невероятная великанша! - воскликнул Илюша.

- Так ведь она так и называется, - отвечал ему Мнимий - Перед вами Великая Теорема Ферма, одного из величайших математиков мира, жившего в семнадцатом веке. Скоро пройдет три столетия, как он высказал ее, и до сих пор наука еще не нашла ее доказательства, а с другой стороны, и не смогла показать, что эта теорема несправедлива. Проблема эта до такой степени громадна и необъятна, что, как вы сами могли убедиться, нет возможности осмотреть ее целиком. Даже наши исключительно мощные аппараты могут показать вам только часть того, что есть на самом деле. Идемте в музей.

И все они спустились на лифте и вошли в широкую комнату, где по стенам висели различные чертежи и формулы.

- Ну вот, - сказал проводник наших героев, - номер первый. Позвольте вам представить. Вот сама теорема. Рассказать ее - минутное дело. Надо доказать, что если взять вот такую сумму:

$a^n + b^n = c^n$,

причем показатель и равняется любому целому положительному числу больше двух, то невозможно отыскать три таких целых положительных числа, которые удовлетворяли бы этому равенству. Другими словами, только сумма двух квадратов может быть тоже квадратом. Это так называемые вавилонские, или пифагоровы, числа, без сомнения вам известные.

- Да-да... - сказал несколько растерянно Илюша.

- Ну! - произнес Мнимий Радиксович, видя его затруднение. -

Ну, например, три в квадрате плюс четыре в квадрате - это будет пять в квадрате. Девять плюс шестнадцать будет двадцать пять.

- А! - вспомнил Илюша. - Это по пифагоровой теореме!

Сумма квадратов катетов равняется квадрату гипотенузы в целых числах. Так ведь это очень просто!

- Разумеется, - отвечал Мнимий, - это несложно. Но если сумма двух квадратов может быть квадратом, то уж сумма двух кубов не может быть кубом. И вообще ни одна степень, кроме второй, не годится. Это еще никому не удавалось опровергнуть. Наоборот, чем дальше идут наши работы, тем больше мы убеждаемся, что это справедливо. Но дело в том, что надо доказать, что это так. Доказать не для отдельного случая, а вообще, то есть для любого случая. И вот до сих пор, несмотря на все труды, это не удавалось. Заметьте, в постановке задачи ничего трудного нет, это любому грамотному человеку можно рассказать. А доказать, что эта задача не решается, все-таки пока еще невозможно.

Комплексный человечек перешел к другой формуле.

- 86 -

- Ну вот, позвольте теперь дать вам некоторые указания об пифагоровых числах. То есть о сумме квадратов. Начнем с того, что мы будем рассматривать всегда три таких числа, чтобы никакие два из них не имели общих делителей. Нам ведь нет смысла рассматривать равенства, вроде вот такого:

$6^2 + 8^2 = 10^2$,

потому что такое равенство можно сократить на 2^2, и тогда мы придем к тому, с чего начали, то есть к равенству

$3^2 + 4^2 = 5^2$.

А с другой стороны, поскольку это сумма, то если какая-нибудь пара чисел делится на некоторое число, то и третье на него делится. Следовательно, нам нет смысла рассматривать такие случаи. Ясно?

- Ясно, - ответил Илюша.

- Прекрасно, - отвечал терпеливый лектор. - Теперь далее. Вы видите, что если взять "три" и "четыре", то одно из этих чисел четное, а другое - нечетное. Может ли быть иначе? Очевидно, нет. Потому что если бы оба эти числа были четные, то у них был бы общий делитель "два", а мы только что выяснили, что это нам не подходит. Теперь: могут ли оба эти числа быть нечетными? Нет, потому что тогда сумма их квадратов должна была бы быть четным числом. Это очень просто проверить. Возьмем два нечетных числа, возведем их порознь в квадрат, а эти квадраты сложим:

$(2m+1)^2 + (2n+1)^2 = 4m^2 + 4m + 1 + 4n^2 + 4n + 1 =$

$= 4(m^2 + n^2) + 4(m + n) + 2 = 2[2(m^2 + n^2 + 2(m + n) + 1]$.

Ясно, что наша сумма есть четное число. Однако если квадрат какого-нибудь числа есть число четное, то само число и подавно четное. Если же это так, то наша сумма должна делиться без остатка на четыре, ибо всякое четное число можно написать в виде 2n, откуда квадрат его есть $4n^2$, и он, очевидно, делится на четыре. Попробуем теперь разделить на четыре нашу сумму квадратов двух нечетных чисел:

$[4(m^2 + n^2) + 4(m + n) + 2]/4 = (m^2 + n^2) + (m + n) + 2/4$.

Ясно, что эта сумма на четыре не делится, и мы получаем и остатке "два". Следовательно, наше предположение ведет к противоречию. И два числа в правой части равенства не могут быть оба нечетными. А так как мы видели, что они не могут быть и оба четными, то ясно, что одно из них четное, а другое нечетное. Вы с этим согласны?

- 87 -

- Согласен, - отвечал внимательно слушавший Илюша.

- Теперь очевидно, что третье число должно быть также нечетным, ибо квадрат четного числа есть четное число, а квадрат нечетного - нечетное. Ясно, что их сумма опять будет числом нечетным. Положим теперь для определенности, что z (сумма) будет нечетным числом, x (первое число) тоже нечетным, а y (второе) - четным. Тогда можно написать, что

$y^2 = z^2 - x^2 = (z - x)(z + x)$

Отсюда ясно, что выражения (z - x) и (z + x) представляют собой снова четные числа, ибо они суть разности двух нечетных чисел. Следовательно, можно положить:

$z + x = 2m$; $z - x = 2n$,

а отсюда

$z = m + n$; $x = m - n$.

При этом m и n не имеют общих делителей, и они, как у нас говорят, разной четности, то есть одно из них четное число, а другое нечетное. Но если все это так, то тогда можно написать:

$y^2 = (z + x)(z - x) = 4mn$

и отметить, что, очевидно, m и n суть квадраты. Ибо если бы m содержало какой-нибудь простой делитель в нечетной степени, то недостающий делитель должен был бы входить в n, а в и его не может быть, ибо m и n не имеют общих делителей. Но если это справедливо, то можно написать, что

$m = p^2$; $n = q^2$,

а отсюда окончательно получаем формулы для всех трех наших чисел:

$x = p^2 - q^2$; $y = 2pq$; $z = p^2 + q^2$.

Это и есть формулы пифагоровых троек. По этим формулам

можно получать любое количество пифагоровых чисел. Например, если у нас p равно пяти, а q равняется четырем, то наши пифагоровы числа будут 40, 9 и 41. Проверим. Сорок в квадрате будет 1600, девять в квадрате - 81, а сорок один в квадрате - 1681. Все в порядке. Ясно?

- Ясно, - скромно ответил Илюша, которому очень правилась эта маленькая лекция.

- Конечно, если наши p и q будут оба нечетные, то наши индусские числа неизбежно будут иметь общий множитель, равный двум. Проверьте, коли не поленитесь! Впрочем... Этими числами даже в древнем Вавилоне занимались! Сохранились таблетки с росписями.

Илюша тщательно проверил вычисления и убедился, что лектор прав.

- Теперь я скажу вам еще несколько слов о судьбе Великой Теоремы. Видите ли, это началось с того, что в семнадцатом веке один из крупнейших математиков всех времен, Пьер Ферма, однажды, читая своего любимого автора - древнего математика Диофанта, записал на полях этой книги свою теорему, о которой мы только что говорили. А записав ее, он добавил следующие слова: "Я нашел поистине удивительное доказательство этой теоремы, но на полях книги слишком мало места, и оно здесь не упишется". И вот с тех пор математики всего мира триста лет бьются и не могут найти это доказательство. Один крупнейший математик, Леонард Эйлер, тот самый, кто впервые обозначил отношение окружности к диаметру греческой буквой π, доказал, что для третьей и четвертой степени теорема Ферма правильна. Но надо вам сказать, что уже для третьей степени его доказательство вводит понятия более сложные, чем те, которые были известны математикам во времена Ферма. В частности, он должен был в этом случае прибегнуть к нашей помощи, то есть к помощи комплексных чисел, частным случаем которых являются обыкновенные числа. И мы ему, разумеется, в этом деле, как умели, помогли. Ведь если посмотреть на все это дело, как говорится, попросту, то легко можно сказать: зачем эти бедные комплексные чудачки возятся в этой башне с такими сложнейшими аппаратами? И все только для того, чтобы доказать, что некоторая задача не может быть решена? И триста лет математики бьются над задачей, от которой никому ни тепло ни холодно! Но это не совсем так. Уже Леонард Эйлер должен был вводить для этой задачи новые числа, то есть расширять понятие числа. А это великое дело. Ибо когда построена новая система чисел, то она работает уже не только для этой задачи, а

для всех математиков и для всех проблем. А когда за эту задачу взялся математик Куммер, по имени коего и наш главный аппарат, как вы знаете, называется куммерскопом, то он построил целую теорию, где было очень много нового. И при помощи этой новой теории он доказал нашу Великую Теорему сразу для всех тех показателей степени, которые вырезаны на камне над дверями нашей башни.

Причем для трех чисел, которые светятся над дверями особенно ярко, ему пришлось построить дополнительную теорию. Он расширил наши представления в области математики и дал нам совершенно новые аппараты, которые годятся для очень многих вопросов, в частности и для таких, которые задевают интересы инженеров и других практических деятелей. Я уже не говорю о том, что только благодаря Куммеру вы могли разглядеть на нашем экране Великую хотя бы по пояс. До Куммера можно было рассмотреть разве что бахрому ее мантильи, ибо теорема была доказана только для чисел 3, 5 и 7. В настоящее время теорема доказана вплоть до очень больших показателей степеней.

Вычисления для этого понадобились не шуточные! Чтобы вы могли себе составить представление о том, с какими громадными числами в таком случае приходится иметь дело, укажу, что если возвести число "два" в степень "семьсот", то в результате мы получим число, в котором будет двести с лишком знаков, а если возвести "три" в ту же степень, получим число, в котором будет более трехсот знаков. Я слышал, как вы недавно говорили, что септиллион кажется вам довольно внушительным числом, а ведь в нем всего-навсего только двадцать пять знаков! Вопросами такого рода занимается высшая арифметика, которая называется **теорией чисел**. Исследования в этой области раскрывают очень много серьезных проблем, с которыми приходится сталкиваться математику.

Вы знаете, что существуют иррациональные числа, как, например, $\sqrt{2}$, которые не могут быть выражены никаким конечным числом десятичных знаков. Но $\sqrt{2}$ может быть корнем алгебраического уравнения с целыми коэффициентами, например:

$x^2 - 2 = 0$.

Однако есть числа, еще более сложные по своему строению.

Таково, например, число π, которое мы называем трансцендентным числом. Оно уже не только не может быть выражено конечным числом десятичных знаков, но не может быть, кроме того, и корнем никакого алгебраического уравнения с целыми или вообще рациональными коэффициентами. И вот это в

высшей степени важное его свойство и доказывается способами теории чисел. Кстати, когда наконец это доказательство было получено (а ведь это случилось не так давно, в конце девятнадцатого века), то тем самым был положен конец всем решительно попыткам найти квадратуру круга, то есть построить равновеликий данному кругу квадрат при помощи циркуля и линейки. Об этом, я думаю, вы слышали?

- Конечно, - отвечал Илюша.

- Так что с этой задачей, которая долгое время занимала умы людей просвещенных... (правда, к сожалению, не только просвещенных!), было покончено.

- Это вроде как с "вечным двигателем", то есть с perpetuum mobile? - вставил Илюша.

- Н-да, - согласился Мнимий, - в этом роде.

- Но ведь теорема Ферма - это все-таки не квадратура круга и не perpetuum mobile?

- Ну конечно, нет! - воскликнул Мнимий. - Это все же серьезная проблема, хотя и частного характера. Заметьте, что теория чисел славится среди математиков тем, что постановка ее задач на первый взгляд кажется очень несложной, но зато решение их дается ученым с таким трудом, что, пожалуй, в этом отношении с теорией чисел не может поспорить никакая другая отрасль математики. Из наиболее важных проблем этой науки я укажу вам на проблему распределения простых чисел в ряду целых чисел. Ясно, что среди всех этих чисел самое важное значение имеют именно простые, ибо все остальные суть произведения простых, а они в силу этого, очевидно, являются элементами, из которых образовано каждое целое число. Вопросом о том, сколько этих чисел, занимался с успехом еще Евклид, показавший, что простых чисел в ряду целых имеется бесконечное множество. Гораздо позже над вопросом о распределении простых чисел трудился Эйлер, а затем важнейшие результаты были получены крупнейшим русским математиком **П. Л. Чебышевым** уже в девятнадцатом веке. На решение многих проблем теории чисел нередко требуются не то что годы, а целые столетия. Например, в конце восемнадцатого века английский математик Варинг предложил одну задачу по теории чисел. На первый взгляд она совсем не хитра: надо доказать, что всякое целое число можно представить в виде суммы ограниченного числа энных степеней целых чисел. Для n, равного двум, это сделать не очень трудно, и вывод гласит: всякое целое число можно представить в виде суммы не более чем четырех квадратов.

Например:

$2519 = 43^2 + 25^2 + 6^2 + 3^2$.

Но доказать надо не только для квадратов, а для всех степеней. И только уже в начале двадцатого века было дано решение этой труднейшей задачи с помощью самых тонких средств математического анализа.

- 91 -

Вот еще пример. В середине восемнадцатого века академик Х. Гольдбах в письме к Эйлеру высказал предположение, что всякое целое число больше трех может быть разложено на сумму не более чем трех простых чисел. Задача эта оказалась до такой степени трудной, что еще в начале нашего века на международном математическом конгрессе один из видных ученых заявил, что она "превосходит силы современной математики". Оказалось, впрочем, что это не так. Основные результаты в решении этой задачи были достигнуты советским математиком Л. Г. Шнире Аьманом, который доказал, что, составляя суммы достаточно большого (но заранее ограниченного) числа слагаемых, каждое из которых есть простое число, можно получить все натуральные числа. Уже это было достижением, которое вызвало удивление математиков всего мира. Но, конечно, еще труднее было доказать, что для разложения четных чисел достаточно двух, а для разложения нечетных чисел - трех слагаемых, каждое из которых есть простое число. Это последнее утверждение удалось доказать замечательному советскому математику И. М. Виноградову, которому и принадлежит, таким образом, помимо ряда блестящих работ в других областях теории чисел, решение этой никому не покорявшейся проблемы Гольдбаха (для нечетных чисел; для четных метод Виноградова дает четыре слагаемых). Решение Виноградова быстро облетело весь мир и увенчало советскую математику заслуженной славой...

Однако должен добавить ко всему сказанному вот еще что.

Допустим, что завтра найдется гениальный математик и докажет теорему Ферма[11]. Конечно, это не будет переворотом всей математики. И возможно, что разговоров будет больше, чем дела. Все это так. Однако нельзя сомневаться в том, что методы, которыми действует математика, благодаря этому обогатятся, и даже очень. Ну вот, теперь, мой милый гость, мне кажется, что я, насколько мог, удовлетворил вашу любознательность.

- Я даже не могу выразить, до чего я вам благодарен!

Мне кажется, я никогда еще не слыхал ничего такого интересного. Я всегда очень любил математику, а теперь... теперь мне кажется, что это самая интересная вещь на свете!

- Что ж, молодой человек, - ответил ему Мнимий Радиксович, приветливо улыбаясь, - я, конечно, в этом деле не судья, но возможно, что вы не так далеки от истины.

После этого Илюша и Радикс сердечно распрощались с гостеприимным хозяином и не спеша, стали спускаться с Лежандровой горки. Радикс пояснил Илюше, что горка эта называется так, но имени математика Лежандра, который высказал о теореме Ферма некоторое очень тонкое замечание.

- Как все это интересно! Что за прелесть, эти комплексные человечки! - воскликнул Илюша.

- 92 -

- Не забудь, однако, - заметил Радикс, - что все это довольно трудно. Мир этих человечков отличается рядом свое образных и неожиданных особенностей, которые не так-то просто изучить. А без такого изучения ты от них не многого добьешься!

- Пусть трудно, но, по-моему, лучше заниматься трудным делом, только чтобы оно было интересное. Ты как думаешь?

- Точно! - сказал Радикс.

- Вот бы, - сказал мечтательно Илюша, - мне все это выучить, стать математиком и доказать эту теорему!..

Услыхав это, Радикс посмотрел на Илюшу так странно и пристально, что Илюше на минутку стало не по себе. Радикс смотрел на него не отрываясь. Илюша хотел было спросить, чего это он на него так уставился, как вдруг что-то громко ухнуло сзади, точно громадная хлопушка, и Радикс со страшной быстротой полетел вверх. Илюша не успел и ахнуть, как все, что было вокруг него, тоже понеслось вслед за Радиксом ввысь. И тут только Илюша сообразил, что это он сам куда-то провалился и падает с ужасной скоростью. В ушах у него свистело, все неслось вверх с треском и грохотом, и он совсем было потерял голову. Вдруг все неожиданно остановилось и разом утихло.

Илюша осмотрелся и увидел, что стоит почти впотемках на гнилых досках каких-то очень грязных сеней. Перед ним облезлая дверь, в которую кое-как вколочен ржавый гвоздь вместо ручки. Где-то жалобно пищит кошка. Илюша растерянно потянул за гвоздь. Дверь с унылым скрипом распахнулась, и Илюша попал в убогую каморку с подслеповатым окошечком, завешенным густой паутиной. Было холодно. И стало вдруг ужасно скучно. Илюша оглядел каморку в величайшем унынии. Радикса и след простыл! Перед Илюшей стоял колченогий столик, а за ним на старом ящике сидел какой-то старикашка в порыжевшем от времени пальто, подпоясанном веревкой. Перед ним стояла старая жестянка с водой, на ней лежал кусок заплесневевшего хлеба. Старичок что-то старательно чертил циркулем. Илюша

нерешительно кашлянул.

- Сейчас, - сказал старичок, - сейчас, голубчик! Вот только начерчу еще одну окружность - и готово. Только одну.

Одну-единственную.

- А что вы делаете? - спросил Илюша.

- А видишь ли, - отвечал тот, - я заслуженный специалист по Великой Теореме Ферма, а сейчас это так, забава, пустяк - трисекция угла с помощью циркуля и линейки.

Пустяки! Очень легко сделать.. Надо только начертить двести двадцать две окружности, провести сто одиннадцать хорд и секущих, и все готово. Очень просто!

- Как так? - жалобно спросил Илюша.

- 93 -

- Очень просто. Ну, совершенно так же, как делается с циркулем и линейкой квадратура круга.

- Квадратура круга?! - повторил в ужасе Илюша.

- Ну да. Это тоже очень просто. Только надо переставить числа хорд и окружностей. Хорд надо двести двадцать две, а окружностей сто одиннадцать. В общем, то же самое...

- Как у вас холодно! - сказал Илюша, надеясь переменить разговор.

- Машина не в порядке, - с огорчением ответил старичок. - Она, понимаешь ли, требует керосина для смазки. То есть теперь требует. Потом, когда я ее еще усовершенствую, этого тоже не будет нужно. Все время работала, а без керосина никак не выходит.

- Какая машина? - спросил Илюша.

- Для отопления. Это perpetuum mobile...

- Perpetuum mobile? .. - еле прошептал Илюша. - У вас и perpetuum mobile есть?

- А как же! - гордо сказал старичок. - Она у меня вертит крыльями. В жестянке. Воздух от этого нагревается, а потом я открываю жестянку, теплый воздух выходит, и в комнате становится теплее. Да я вот сейчас доделаю, потом закончу еще одно доказательство теоремы Ферма...

- Как так "еще одно"? Разве у вас уже есть доказательство?

- Доказательство! - усмехнулся старичок. - У меня, их есть уже пятьсот пять штук. Это будет пятьсот шестое.

- А зачем же так много? - спросил Илюша.

- Зачем так много? - задумался старичок. - Вот уж не знаю. Всё говорят - нехороши! Будто бы неверные. А уж такие хорошие доказательства! Одно другого лучше! Оставайся у меня. Будем вместе доказывать. У меня есть еще одна идейка. Доказательств на двадцать хватит. Вот посмотри мое четырехсот второе

доказательство теоремы Ферма.

Илюша взял в руки замусоленный кусочек бумажки, начал разбираться в выкладках и вдруг с ужасом обнаружил, что почтенный ферматист был уверен, что если некоторое число делится на каждое из двух чисел a и b порознь, то оно должно разделиться и на их произведение. Илюша опустил бумажку и начал дуть себе на замерзшие пальцы.

- Но хочу я доказывать вашу теорему! - вдруг вскрикнул Илья в отчаянии. - Пустите меня отсюда, я замерз!

- Ах, так ты не хочешь? Вот как! - сказал, ядовито ухмыляясь, ферматист. - А ты ведь сказал, что хочешь? Поворачивайся! Нечего рассуждать! Раньше надо было думать.

И снова все засвистало, и Илюша помчался обратно вверх.

- 94 -

Все кругом трещало, ухало, грохало, а Илюша мчался наверх с такой скоростью, о которой раньше даже и понятия не имел.

Вдруг снизу, сквозь страшный грохот, раздался зычный крик:

- Вот он! Держи его! Стой! Поймать! Остановить! Изловить!

Илюша чуть не лишился чувств от страха. Он узнал страшный голос, взглянул вниз и увидел, что за ним с криком несется ужасный Уникурсал Уникурсалыч, Кандидат Тупиковых Наук, Д. Ч. и Н. У.

- Лови его! Держи! Он забыл про тысяча семьсот семьдесят пятый!.. Я ему покажу, как такие вещи забывать!..

"Что такое? - подумал Илюша. - Что это такое за тысяча семьсот семьдесят пятый? .."

- Не помнишь! - кричал снизу Доктор Четных и Нечетных. - Я тебе покажу! Я тебе напомню! А вот я сейчас!..

И вдруг перед Илюшей, откуда ни возьмись, появился старинный том, на переплете которого было вытиснено золотыми буквами: "Решения и постановления Парижской Академии Наук за 1775 год". Кинга открылась, несколько страниц перевернулось, и Илюша прочел:

"Академия постановила: отныне и впредь не рассматривать представляемых ей разрешений задач удвоения куба, трисекции угла, квадратуры круга, а также машин, долженствующих осуществить вечное движение".

- Вот что, друг любезный, - вымолвил довольно сурово встретивший его Радикс, - имей в виду, что у нас здесь очень не любят, когда люди, плохо знакомые хотя бы с тем, что в теории чисел называется "арифметикой целых алгебраических чисел", и с тем, какие возникают затруднения при рассмотрении делимости на "алгебраические числа", начинают заглядываться на теорему Ферма. И не следует так быстро решать, что ты будешь делать в

областях, которые тебе пока еще очень мало известны. А насчет теоремы Ферма надобно быть особо осторожным. Дело в том, что формулировка этой теоремы очень проста, и на первый взгляд неопытному человеку кажется, что и вся проблема проще простого, что надо только не быть "ученым педантом" и обладать в небольшой степени тем, что именуется "здравым смыслом", чтобы разобраться и покончить со всей проблемой одним махом. В дальнейшем ты и сам увидишь, что на свете существует немало задач, которые очень просто формулировать, но которые отнюдь не просто решить, и что никакой связи между простотой формулировки задачи и простотой ее решения не имеется.

Укажу тебе еще вот на какое обстоятельство. Я совершенно уверен, что ты забрался в эту книжку главным образом для того, чтобы в дальнейшем ознакомиться с другими, более трудными книжками...

- 95 -

- Да-да! - перебил его Илюша. - Конечно! Вот из-за этого-то...

- Хорошо, - спокойно отвечал ему Радикс. - Я понимаю это. И вполне тебе сочувствую. Но имей в виду, что когда ты доберешься до этих более трудных книжек, то очень скоро убедишься, что в теории чисел, науке вообще очень трудной, существуют уже решенные задачи - кстати сказать, тоже на первый взгляд не очень сложные, - но разобраться в том, как они решаются, и усвоить, какова основная идея решения, может только человек с куда более основательной, подготовкой, чем у тебя, и то не сразу, а после долгих и упорных трудов, измеряемых для отдельного случая не часами, а неделями. Осмелюсь тебе еще доложить, что на свете было, есть и будет несметное число всяких бездельников, которые отравляют жизнь настоящим ученым, заваливая их своими творениями по вопросу о квадратуре круга и доказательствами теоремы Форма и требуя не только внимания и помощи, но и тысячных премий, и поднимают дикие вопли о бесчеловечности, когда их просят по-хорошему не приставать с чепухой и отвязаться. Я, конечно, не думаю, чтобы ты в будущем пристал к этому стаду, потому что сам видел сейчас, что эту задачу голыми руками не возьмешь, но все-таки, дружок, надо быть поосторожнее! Ты должен понять вот что, милый друг: если ты подходишь к теореме Ферма всерьез, как подобает ученому, то надлежит вооружиться всеми средствами современной науки, иначе ничего не сделаешь. А чудаки, которые надеются одолеть ее с помощью элементарных средств, напоминают того дурачка, который, увидав в первый раз телескоп, наведенный на луну, решил, что только заведомые глупцы могут пользоваться таким сложным аппаратом, а он, умник, поступит попроще: просто

сколотит большую деревянную лестницу, залезет на небо, достанет оттуда луну, поставит ее к себе на стол, разглядит и всем желающим расскажет.

Вот как!

Схолия Седьмая,

где Илюша открывает еще кое-что насчет обычаев и нравов веселого карликового народца, у которого он был в гостях, и, в частности, узнает о том, как можно натянуть нос одному неуклюжему существу, причем натягивание это мнимое, а нос-то получается совершенно вещественный. После этого наш герой пытается играть с зеркалом в "Дразнилку", а затем наши добрые друзья встречаются с тремя недогадливыми испанцами и тремя храбрыми дипсодами, то есть людьми из Страны Жаждущих (которая подробно описана в знаменитой истории Гаргантюа и Пантагрюэля, неутомимых острословов, великанов и мудрецов). И только благодаря этой встрече Илюша узнает, сколько врагов надо уложить, когда на тебя нападают со всех сторон, ибо до сих пор он думал, что сторон в три раза меньше, чем это оказывается на самом деле. Тут же выясняется, почему любители чужого добра вдруг становятся такими кроткими, когда им растолкуют наконец, какие симпатичные треугольнички для них приготовлены в царстве ВОЛШЕБНОГО ДВУРОГА.

Илюша и Радикс продолжали свой путь в самом приятном расположении духа. Однако через несколько времени Илюша задумчиво промолвил:

- Эх! Я забыл спросить у этого человечка еще одну штуку.

- Что именно? - вопросил Радикс.

- 97 -

- Я никак не пойму: какое отношение эти комплексные человечки могут иметь к такой задаче, в которой есть только вещественные, да еще притом целые числа?

Тут Илюше показалось, что на него кто-то смотрит сзади.

Он обернулся и к своему неописуемому удовольствию увидел, что невдалеке позади, под синей стеной, в креслице сидит Мнимий Радиксович собственной персоной.

- Могу, - сказал любезный человечек, - вам рассказать о некоторых наших хитроумных проделках. Это вам кое-что пояснит. Вы, конечно, помните, что разность двух квадратов распадается на два множителя - на сумму и разность первых степеней.

- Ну еще бы, - отвечал Илюша.

- А мы, - продолжал словоохотливый человечек, - умеем делать то, чего вещественные числа делать не умеют: мы можем разложить на множители сумму квадратов. Это очень просто.

Смотрите.

И на стене около кресла сейчас же появилось следующее:

$x^2 + y^2 = (x + iy)(x - iy)$.

- Буква i, как всегда, обозначает $\sqrt{-1}$. Перемножьте, и вы убедитесь, что это равенство справедливо. Кстати сказать, формулы для пифагоровых троек я мог бы получить тоже не без помощи этого выражения, а именно вот как. Если нам нужно, чтобы $x^2 + y^2 = z^2$,

то положим, что оба множителя, то есть $(x + iy)$, а также $(x - iy)$, суть квадраты каких-то чисел, разумеется тоже комплексных, так что, например:

$x + iy = (p + iq)^2 = p^2 - q^2 + 2pqi$.

Теперь я сравниваю левую часть с правой и заключаю, что

$x = p^2 - q^2$; $y = 2pq$,

откуда уже сразу следует, что

$z = p^2 + q^2$.

Это, правда, не совсем строго, хотя бы потому, что из $a \cdot b = z^2$ не следует, что a и b непременно квадраты, но формулы получаются как раз те, какие нам нужны. Обратите, кстати, внимание еще на то, что одно равенство комплексных чисел заменяет собой два равенства обычных чисел. Это тоже ведь преимущество немалое! Теперь позвольте вам указать еще и на то, что если мы возьмем не разность квадратов, а разность кубов (а ведь куб-то как раз и является первой из тех степеней, о которых идет речь в Большой теореме Ферма!), то вещественные числа умеют разлагать эту разность только на два множителя, то есть на разность первой степени и неполный квадрат суммы. Не так ли?

Илюша утвердительно кивнул. И тотчас на стене появилось:

$(x^3 - 1) = (x - 1)(x^2 + x + 1)$.

- Ну, а мы можем разложить вам эту разность не на два, а на три множителя, и получится вот что...

$$(x^3 - 1) = (x - 1)\left(x - \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

- Вы легко можете убедиться в справедливости этого равенства, либо просто перемножив эти три скобки, либо решив квадратное уравнение, которое представляет собой ваш неполный квадрат суммы.

$x^2 + x + 1 = 0$.

- Ну вот, - продолжал Мнимий, - отсюда вы легко можете видеть, что мы вполне можем иметь прямое отношение к задачам, в которых есть только вещественные числа. С этим несложным, но

очень полезным разложением мы еще встретимся в дальнейшем, когда займемся вопросами довольно хитрыми (но при этом замечательно интересными) через каких-нибудь двенадцать Схолий. Причем мы способны делать то, о чем вещественные числа и понятия не имеют. А так как наша арифметика очень похожа на арифметику вещественных чисел, то вы можете прийти к нам, а потом вернуться к вещественным числам, и никаких недоразумений у вас не получится. А мы будем вам с удовольствием помогать теми своими способностями, которых у вещественных чисел нет. Мало того, мы еще вам что-нибудь подарим на память, чего вы даже у нас не просили. Вот, например, разложим разность кубов на три множителя, а если вы внимательно присмотритесь к этому разложению, то увидите, что наше решение имеет непосредственное отношение к геометрической задаче о том, как вписать в окружность равносторонний треугольник. И это потому, что мы друзья с синусами и косинусами, а коэффициенты, которые мы вам вывели, равны: один - синусу тридцати градусов, а другой - косинусу тридцати градусов.

Илюша не мог сразу сообразить, при чем тут равносторонний треугольник, но, вспомнив, что синус 30° действительно равен одному из приведенных Мнимием Радиксовичем коэффициентов (то есть половине), не решился спрашивать и дал себе слово, что на досуге возьмет геометрию и сам все разберет.

- Теперь, - сказал Илюша, - я, кажется, начинаю понимать, как вы помогаете. Это замечательно!

- Милый юноша, - отвечал ему Мнимий Радиксович, - все, что вы здесь увидите, все вам будет помогать. Только надо научиться пользоваться нашей помощью. Это кажется трудным, но ведь вы когда-то и читать не умели, однако научились! Так и здесь то же самое. А если вы меня спросите теперь, почему мы с такой охотой беремся помогать вам в чужой задаче, то я вам отвечу, что, во-первых, всякому охота показать, на что он способен, ну, а потом, знаете, это все-таки довольно забавно - натянуть нос этим неповоротливым вещественным числам, чтобы они не важничали, потому что они народ ужасно спесивый, но совершенно не могут быть такими юркими, догадливыми и любезными, как мы! Однако, не всякий сразу с нами освоится. Вот, например, число шесть - поговорите о нем с вещественными числами, и они вам скажут, что это просто "дважды три". Справедливо, разумеется! Но с нашей точки зрения его можно еще немного иначе написать:

$2 \cdot 3 = 6 = (1 + \sqrt{-5})(1 + \sqrt{-5})$.

Попробуйте проверьте! Надо, видите ли, еще иметь в виду,

что вопросы делимости могут касаться даже и алгебраических выражений, а ведь это очень важно, ибо алгебра-то и учит нас решать вопросы в общем виде. Вот задачка: дано выражение

$m^3 + 6m^2 + 11m + 6$.

Спрашивается, делится оно на три или нет? Что вы на это скажете?

- Не знаю, - ответил смутившийся Илюша, - может быть, попробовать разложить на множители?

- 100 -

И мальчик получил:

$(m + 2)(m + 3)(m + 4)$.

- А теперь заменим $(m + 2)$ на n. И тогда?

Илюша написал, а затем ответил нерешительно:

- Три натуральных числа подряд. Произведение! Коли так... то должно делиться на три! Вот странная задачка! Сразу не разберешься. А ведь мне нужно еще узнать про Дразнилку, - обратился Илюша к Радиксу, ибо Мнимий уже исчез. - Ты расскажешь?

- Отчего же! - ответил Радикс, беря со стола три картоночки, каждая величиной с почтовую карточку, и протягивая их Илюше. - Мы с тобой сначала рассмотрим самый простенький случай - тройного Дразнилку, который у тебя назывался "икс". Помнишь?

- Помню! - сказал Илюша, разглядывая карточки. На каждой стояла цифра: 1, 2 и 3.

- Так вот, - продолжал Радикс, - положи их на стол в обычном порядке. Запиши мелом на стене эту первую комбинацию, исходный порядок, то есть 1-2-3. А теперь перекладывай их так: ту, которая стоит спереди, клади в самый конец и повторяй дальше тем же порядком. Это круговая, или циклическая, перестановка.

Илюша переложил несколько раз, потом сказал:

- Больше не выходит. Опять то же самое получается.

- А теперь разложи их в обратном порядке: 3-2-1 и перекладывай опять так же.

- И тут то же, - ответил Илюша. - Опять я пришел к тому же, с чего начал, то есть к 3-2-1.

- Ну, теперь запиши.

Илюша записал так:

А)

1 - 2 – 3

2 – 3 – 1

3 – 1 - 2

Б)

3 – 2 - 1

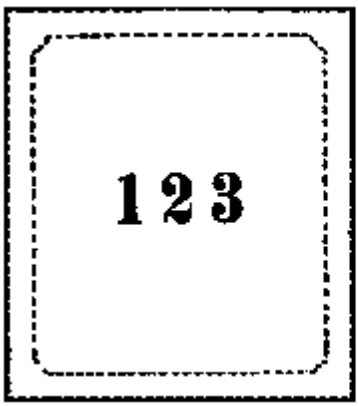
2 – 1 - 3

1 – 3 - 2

- Вот они и все, - сказал Илюша, - их всего шесть штук.

- Попробуй, - посоветовал Радикс, - взять опять комбинацию 1-2-3 и перекладывать не переднюю назад, а заднюю вперед.

- Не стоит, - отвечал Илюша, - это я уже пробовал там, у Розамунды. То-то и дело, что они ходят друг за дружкой гуськом. И все равно в какую сторону двигать.



- Правильно, - сказал Радикс. - А теперь положи карточки рядом в порядке 1-2-3 и посмотри в зеркало, что у тебя получится.

Илюша посмотрел в зеркало и увидел, что из его комбинации 1-2-3 в зеркале получается 3-2-1.

- Как раз наоборот! - сказал он. - Из "А" получается "Б".

- Ну, теперь переставляй их вкруговую. И смотри, что выходит в зеркале.

Из 2-3-1 в зеркале вышло 1-3-2; из 3-1-2 получилось 2-1-3.

- Ну, как ты думаешь, - спросил Радикс, - можно ли уложить карточки так, чтобы и перед зеркалом и в зеркале получилось одно и то же расположение?

- Н-нет, - сказал в недоумении Илюша. - Ну как же это возможно? Нет, нельзя!

- Так, - отвечал его наставник, - Значит, там один круг, а здесь другой. Ну, вот и всё. Весь секрет Дразнилки в том, что там при наличии одной пустышки, в сущности, возможны только круговые перестановки. Игра в Дразнилку, как ты и сам понимаешь, это игрушка, почти безделка, но вот именно из-за того, что в этой игре участвуют эти круговые перестановки, о которых мы еще наговоримся впоследствии, игрушка эта получает довольно серьезный смысл. А перевести 1-2-3 в 3-2-1 циклической перестановкой нельзя, как нельзя добиться, чтобы в

зеркале было то же, что перед зеркалом. Значит, если у тебя стоит с самого начала какая-нибудь комбинация из круга "А", то ты можешь прийти к основной комбинации 1-2-3.

- 102 -

Это будет четный круг. Но если у тебя стоит комбинация из круга "Б", то ее перевести в основную комбинацию невозможно. Но это - круг нечетный. Попробуй теперь в основной комбинации 1-2-3 переставить две какие-нибудь рядом стоящие цифры.

Илюша переставил. Из 1-2-3 получилось 1-3-2, потому что он переставил 2 и 3.

- Вот теперь получился круг "Б".

- Переставь еще двух соседей.

Илюша поменял местами 3 и 1 и получил 3-1-2.

- А теперь получился круг "А".

- Ну, вот и всё! - сказал Радикс. - Ты, я думаю, и сам видишь, что если переставляешь соседей четное число раз, то получается тот же круг. А если переставишь нечетное число раз любых соседей, причем неважно - этих ли самых или каких-нибудь других, то ты переводишь все расположение во второй круг, и тогда вернуться к первому кругу, не вынимая шашек из коробочки, невозможно. А теперь возьмем какую-нибудь комбинацию шашек в самом маленьком Дразнилке. Ответь мне: можно ли сказать сразу, выйдет у тебя в данном случае или не выйдет?

- Сказать я могу, - отвечал мальчик, - потому что помню, какие комбинации относятся к какому кругу.

- Та-ак... - довольно кисло протянул Радикс. - Однако не в числе шашек дело, потому что всего интереснее располагать правилом, которое было бы пригодно для любого числа шашек. Разумеется, мы начнем с того, что выясним, какие комбинации относятся к какому кругу, но в дальнейшем нам придется рассуждать уже по-иному. Не так ли? Как тебе кажется?

- Мне кажется, что нам нужно найти правило, по которому можно было бы сразу установить, выйдет данная комбинация или нет. Ты говорил, что все дело в том, сколько раз я переставлял соседние шашки...

- Так. Ну и что же?

- По-моему, можно так рассуждать. Каждый раз я меняю местами две шашки, то есть одну пару. Значит, надо сосчитать, сколько есть таких пар, которые поменялись местами.

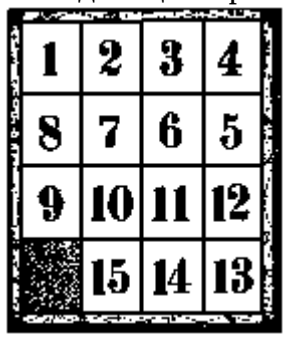
Так как я не знаю, как именно они переставлялись, то надо пересмотреть все пары, которые стоят не в том порядке, который нужен. Вот, например, я начинаю с комбинации 1-2-3, затем идет комбинация 2-1-3. Тут только одна пара нарушает порядок:

единица и двойка.

- Можно сказать, - вставил Радикс, - что эта пара образует беспорядок, инверсию.

- 103 -

- Хорошо. Значит, у нас здесь одна инверсия. Каждую пару я буду считать только один раз. Дальше беру комбинацию 2-3-1. Здесь есть две пары, образующие инверсии. Первая пара - единица и двойка, вторая - единица и тройка.

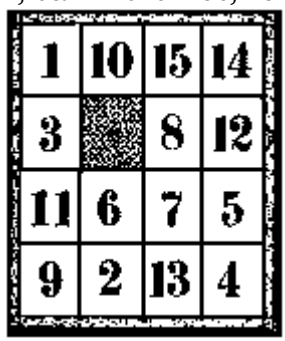


Двойка и тропка стоят относительно друг друга в порядке. Значит, здесь две инверсии. Беру еще одну комбинацию: 3-2-1. Здесь три пары шашек нарушают порядок. Первая пара- тройка и двойка. Вторая пара - тройка и единица. Третья пара - двойка и единица. Всего здесь три инверсии. Как ты и говорил, при четном количестве инверсий задачка решается...

- А если нет ни одной?

- Если нет ни одной, то и делать нечего, все и так в порядке.

- А если нечетное число инверсий, то задачка не может быть решена. Если подсчитать число инверсий в любой комбинации, то можно сразу сказать, выйдет или не выйдет. Если инверсий четное число, то выйдет; если нечетное, то не выйдет.

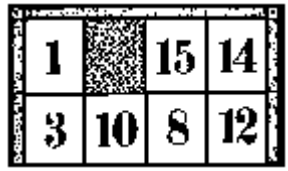


- Хорошо, - сказал Радикс, - а теперь перейдем к большому Дразнилке. Как там надо считать число инверсий и какой установить порядок?

Илюша задумался.

- Да, - промолвил он, - они просто по кругу не располагаются.

Это ясно. Сейчас я попробую во всем разобраться. Ты не торопи меня. Ага, кажется, я начинаю кое-что понимать.



Начальный порядок там идет змейкой (верхний рисунок).

- Правильно. Так вот мы и будем далее считать, "змейку" как нормальное начальное расположение в Дразнилке. Если двигаться по "змейке", то инверсий не получится. Вдоль нашей "змейки" мы и будем отсчитывать число инверсий.

Теперь посмотрим, как вообще будет изменяться число инверсий, если мы возьмем какое-нибудь - любое - расположение (рисунок средний) и в нем передвинем на пустое место (оно у нас во втором столбце и во второй строке) одну из шашек той же строки, то есть "три" или "восемь".

- 104 -

- Если идти вдоль по "змейке", - отвечал внимательный Илюша, - то число инверсий не изменится. Только разрыв в "змейке", который образует пустышка, перейдет на другое место, а в остальном расположение останется такое же.

- Прелестно! - отметил Радикс. - Ну, а если я на это место подвину одну из шашек того же столбца, то есть "десять" или "шесть", тогда что случится?

- Можно сосчитать! - сказал Илюша. - В первом случае мы перейдем к положению нижнего рисунка, то есть от ряда (по "змейке")

1, - , 15, 14, 12, 8, 10, 3.

Раньше "десять" образовывало инверсию с "восемью", а теперь этого не будет, но зато появятся инверсии "пятнадцати", "четырнадцати" и "двенадцати" с "десятью"; в общем, окажется на три инверсии больше и на одну меньше - в итоге на две инверсии больше. Если же передвинуть не "десять", а "шесть", то в средних строчках вместо ряда мы получим ряд

12, 8,-, 3, 11, 6, 7, 5

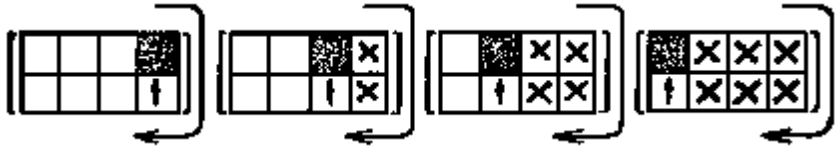
мы получим ряд

12, 8, 6, 3, 11, - , 7, 5:

значит, "шесть" перескочит через "три" и "одиннадцать" и будет теперь образовывать новую инверсию с "тремя", потеряв свою старую с "одиннадцатью", - число инверсий совсем не изменится.

- Вообще, - сказал Радикс, - где бы ты ни оставил пустышку, каждый раз, когда на ее место подвинешь соседнюю шашку сверху

или снизу, число инверсий или вовсе не изменится, или изменится на четное число.



Большая стрелка показывает, как идет "змейка".

- Да-а, - протянул Илюша. - Из этих примеров выходит так. Но я не пойму: как надо рассуждать, чтобы убедиться в том, что всегда так будет выходить?

- Ну хорошо! - примирительно сказал Радикс. - Давай теперь соберем все наши наблюдения над Дразнилкой. И попробуем подытожить все вместе. Итак - шашка может обойти только четное число других шашек: две, четыре и шесть. Это и есть основа всей системы Дразнилки: если есть возможность, комбинируя друг с другом такие четные обходы, достигнуть желаемой позиции - задачка решается. Если нет, то и нет решения. Надо сравнить заданную позицию с желаемой: если между ними четное число инверсий - все в порядке! Если нечетное, ничего добиться нельзя. Вот и все! Любая позиция из круга иной четности переходит в обратный круг при перестановке с места на место одной-единственной (но не двух!) шашки. Если внимательно посмотреть на зеркальное отображение самого маленького трехшашечного Дразнилки, то ясно, что один круг переходит в другой как раз через зеркальное отображение. Но если это так, то всегда из задачи, которая "не выходит", можно сделать другую, которая "выходит". Это будет та же искомая позиция, но в зеркальном отображении.

Конечно, как это в каждом случае сделать - уж вопрос другой (АЛ-1, VIII).

- Понимаю, - сказал Илюша. - Выходит верно, но как-то не очень складно. Ведь должна же быть какая-нибудь общая причина, благодаря которой число инверсий всегда меняется на четное число при скачке через четное число шашек...

- Ишь какой хитрец! - воскликнул, рассмеявшись, Радикс. - Причина-то как раз в том и заключается, что ты перескакиваешь через четное число шашек, а ведь всякое четное число состоит из двоек. А если взять две шашки, то уже мы с тобой установили... Впрочем, можно этого отдельно и не рассматривать. Будем рассуждать так. Пусть шашка перепрыгивает по "змейке" через четное число 2n шашек. Причем есть p шашек, с которыми у нее были инверсии, и q = 2n - p шашек, с которыми инверсий не

было. Ясно, что 2n - четное число. Но если это так, то числа p и q, как говорится, одной четности, то есть либо они оба четные, либо оба нечетные, иначе их сумма не могла бы быть четной. Если же я теперь вычту эти два числа одной четности, p и q, друг из друга, то я обязательно получу четное число, так как разность двух четных, как и двух нечетных, чисел неизбежно четная. Можешь проверить, коли тебе не лень. Другими словами, разность двух чисел всегда одинаковой четности с их суммой.

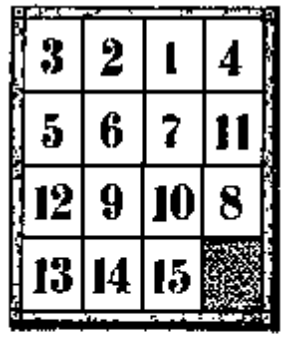
Иначе говоря, алгебраическая сумма некоторого числа единиц с любыми знаками всегда будет одной четности с числом этих единиц. Вот в чем тут сила! Ну, вернемся к нашей задаче. Изложи мне коротко и ясно: что же мы доказали этим рассуждением?

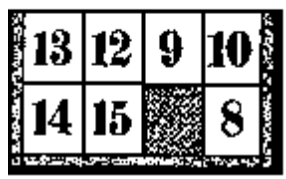
- Мы доказали, что при всякой перестановке шашки на пустое место число инверсий меняется на четное число. Значит, здесь, как и в маленьком Дразнилке, вернуться к исходному положению (то есть к такому, в котором нуль инверсий) можно только из расположения, в котором подсчет вдоль по "змейке" показывает четное число инверсий.

- Великолепно! - отвечал, вздохнувши, чтобы перевести дух, Радикс. - Вот теперь мы можем сказать, что установили необходимое условие того, чтобы Дразнилка вышел. А то, что это условие еще сверх того и достаточное, можно доказать совершенно строго, но мы этим заниматься не будем.

- Ну! - произнес огорченно Илюша. - Это мне не очень нравится. Ведь выходит, что мы только полдела сделали.

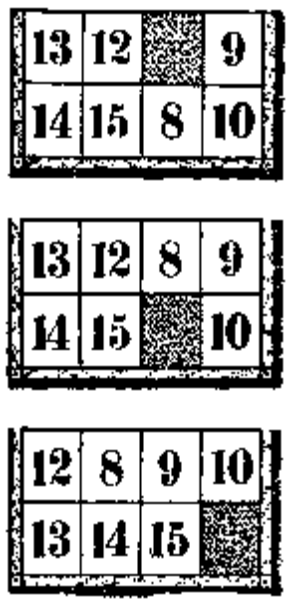
И, наверно, это самое интересное и есть, потому что мы не получили правила, как приводить шашки в порядок.





- Конечно. Хотя одно общее доказательство вовсе и не должно указывать, как добиться цели скорей всего. Но только дело в том, что это доказательство не простое, и я не уверен, захочешь ли ты его слушать.

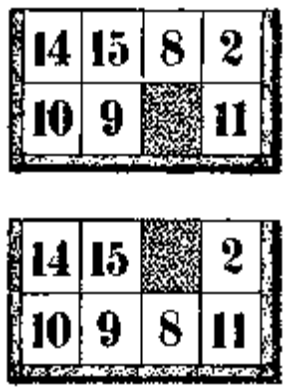
- Захочу, захочу! - обиженно сказал Илюша. - Мне очень нравится, когда я наконец начинаю разбираться в таких вещах, которые сперва кажутся такими уж хитрыми, что не знаешь, с какой стороны и подойти.



- Хорошо, - покорно отвечал Радикс. - Давай попробуем. Начнем вот с чего: убедимся в том, что с помощью перемещения шашек на пустое место мы всегда можем перепрыгнуть через любые две шашки по линии "змейки". Это совершенно ясно, если они обе стоят по соседству с пустышкой у того края, где "змейка" переходят из строки в строку. Но если они стоят где-нибудь рядом в одной строке, то мы можем поступить так: переместим их на край, не нарушая циклического расположения трех шашек (третья - та, которую надо перевести), так, чтобы они стали на краю друг под другом; затем, освободив место для переводимой шашки, перемещаем ее через них и вернемся, не нарушая циклического расположения трех шашек, к исходному порядку, но с перемещенной уже шашкой. Приведем пример, и все станет ясно (верхний рисунок, стр. 107). Шашку "восемь" переведем через "девять" и "десять". Сперва мы передвинем шашки в двух нижних строках (нижний рисунок на стр. 107). Затем, как показывают три рисунка рядом, мы постепенно передвигаем шашки, потом перескакиваем и возвращаемся обратно. Как

видишь, все осталось на месте, только шашка "восемь" перепрыгнула через двух своих соседок.

А теперь нам осталось доказать еще, что все шашки можно поставить на место такими скачками при любом исходном положении, содержащем четное число инверсий. Для этого давай поставим сначала шашку "единица" на первое место, если она еще на нем не стоит. Ясно, что, перескакивая через две шашки, мы ее доведем либо до второго, либо до первого места. Но если "единица" попадет не на первое, а на второе место, мы заставим шашку, которая стоит на первом месте, перепрыгнуть через две шашки направо. Тогда шашка "единица" очутится на первом месте.

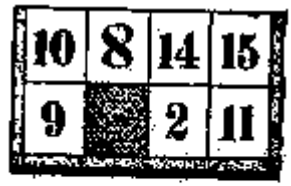


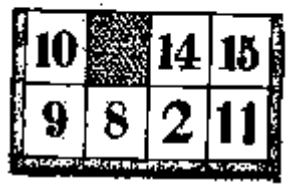
Восьмерка перепрыгивает через две шашки ("2" и "11")

Поступим затем тем же порядком и с шашкой "двойка", то есть поместим ее на второе место, и так далее.

Но когда мы дойдем до предпоследнего места, то поставить на него шашку, которая стоит на последнем месте, не удастся, потому что ей ведь для этого надо перепрыгнуть через одну, а не через две шашки. В таком случае в самом конце "змейки", в четвертой строке, мы получим расположение 13-15-14 вместо 13-14-15, и если все остальные шашки уже стоят по местам, то получается только одна инверсия, между "четырнадцатью" и "пятнадцатью". Однако это может случиться только в тех расположениях, где уже с самого начала было нечетное количество инверсий.

Следовательно, при четном числе инверсий все шашки в конце концов неизбежно станут на свои места.





Восьмерка перепрыгивает через четыре шашки ("14", "15", "11" и "2")

Как видишь, мы попутно еще доказали, что когда Дразнилка "не выходит", то на свои места можно поставить все шашки, кроме двух последних, что ты, как я полагаю, и сам не раз замечал. Если ты пожелаешь разобрать это доказательство на примере, расставь все шашки для упрощения в одну шеренгу и перепрыгивай через две, как указано. Конечно, в квадратике Дразнилки ты можешь для ускорения дела иногда перепрыгивать и через четыре или шесть шашек, как мы выяснили раньше. Ну вот, а теперь поставь нашу "змейку" в ее натуральном порядке.

Илюша поставил (см. рис. на стр. 110).

- Погляди, как в зеркале отражается, и запиши.

Илюша глянул в зеркало и написал то, что видно на рисунке на следующей странице внизу.

- В первой строке "четыре" дает инверсии с "тройкой","двойкой" и "единицей", "тройка" - с "двойкой" и "единицей", наконец, "двойка" - с "единицей".

Всего в первой строке одна плюс две плюс три - шесть инверсий. Во второй строке столько же. В третьей тоже столько же. Всего восемнадцать. А в последней строке только три инверсии. В конечном счете получается двадцать одна инверсия.

- То есть в итоге нечетное число. Значит, если зеркальное расположение "не выходит", его можно перевести в натуральное расположение с одной инверсией. Но раз так, значит, и расположение с одной инверсией можно перевести в зеркальное. А поэтому всякое расположение, которое "не выходит" (и которое, как мы доказали, можно свести к одной инверсии), ты можешь перевести в зеркальное. Так вот, когда у тебя "не выйдет" (возьмика поставь в большом Дразнилке пример с перестановкой только двух шашек - "единицы" и "пятнадцати"), то ты можешь для утешения стремиться не к натуральной расстановке шашек, а к

зеркальной.

- Вот это так! - вскричал Илюша. – Беспроигрышный Дразнилка! Здорово! Знаешь, это мне напоминает то странное слово, которое язык тетушки написал в Схолии Четвертой.

- 109 -

Илюша попробовал прием и убедился в его доброкачественности.

1	2	3	4
8	7	6	5
9	10	11	12
	15	14	13

- Мне потому нравится Дразнилка, - заявил Илюша, - что все у него выходит просто. Только торопиться не надо!

Радикс усмехнулся.

- Как сказать! - проворчал он. - Как сказать! Если ты уж так хорошо все понял, то возьми-ка переверни шашки. На них ведь сзади, как ты помнишь, написано "Тетушка Дразнилка".

Вынь одну шашку... Ну, для памяти вынем ту, на которой стоит буква "ша". Потом перепутай шашки и проверь на буквах, как получается насчет правила "выйдет-не-выйдет". А коли заметишь какие-нибудь особенности, не поленись дать исчерпывающее объяснение. Да, кстати, вот еще что. Скажи, пожалуйста: известно ли тебе, что бывают уравнения со многими неизвестными?

4	3	2	1
5	6	7	8
12	11	10	9
13	14	15	

- Ну еще бы! - отвечал Илюша - Конечно, известно.

Так вот, представь себе, что Дразнилка имеет довольно близкое касательство к решению систем уравнений со многими и даже весьма многими неизвестными.

- Да что ты? - удивился мальчик.

- Дело в том, - продолжал Радикс, - что если тебе, допустим, придет в голову точно определить, как можно вывести общие

формулы, определяющие значения неизвестных в зависимости от коэффициентов в уравнениях, то придется заняться тем же самым, чем мы сейчас с тобой забавлялись, а именно - подсчитать число инверсий. Если не струсишь, то советую проверить это. Давай напишем систему уравнений:

$a_1x + b_1y + c_1z = d_1$

$a_2x + b_2y + c_2z = d_2$

$a_3x + b_3y + c_3z = d_3$

и найдем, чему равняется y.

- Это что-то трудновато, - неопределенно заметил Илюша.

- Для простоты положим, что x и z уже известны и нам надо определить через них y. Ну-ка попробуй, что получится.

Илюша взял карандаш, задумался на минутку и написал следующее выражение для y:

$y = (d_1 - a_1x - c_1z) / b_1$

- Очень мило! Ну, а еще чего-нибудь ты не придумаешь?

- Можно подставить это значение y в остальные два уравнения, тогда останутся неизвестными только x и z.

- Можно. А далее?

- А далее поступаю подобным же образом. Определю из одного из уравнений z и подставлю его в последнее оставшееся уравнение. Получу, очевидно, значение для x. А его можно подставить в предыдущую формулу для z и так далее.

Все определится очень просто. Только бы не запутаться во всех этих подстановках.

- Так, - закончил Радикс, - верно. Придется тебе еще подумать, кстати, о том, чтобы у этих твоих дробей, которые определяют неизвестные, знаменатели не обращались в нуль.

Но если оставить это пока в стороне, то формулы ты получишь верные. О них-то я и хотел тебе сказать несколько слов.

Займись-ка, выпиши, что получается окончательно в знаменателе дробей. Если ты нигде не напутал, то получится алгебраическая сумма произведений:

$a_1b_2c_3$; $a_1b_3c_2$; $a_2b_1c_3$; $a_2b_3c_1$; $a_3b_1c_2$; $a_3b_2c_1$;

А что касается знаков перед ними, то они как раз тем и определяются, какое число инверсий, четное или нечетное, образуют числа "один", "два" и "три" в подписных значках у букв a, b и c, если мы будем писать эти три буквы каждый раз в их алфавитном порядке, как это у нас и сделано. Если при четном числе инверсий брать знак плюс, а при нечетном - минус, то получится алгебраическая сумма, которая называется определителем, или детерминантом, данной системы уравнений. Ты можешь еще заметить, что и числители дробей построены так

же, только там вместо одной из букв a, b или c (в зависимости от того, какое ты неизвестное определяешь) поставлена буква d (для икса d заменяет букву a, для игрека - букву b, для зета - букву c). Если мы захотим определить знак перед каждым произведением, то для этого достаточно того, что мы вывели, когда разбирали маленького Дразнилку. А дальше дело пойдет, разумеется, похитрее. Мы еще вспомним нашего друга Дразнилку, когда будем разбирать одну довольно сложную задачу в Схолии Девятнадцатой.

- 111 -

- Теперь уже я буду относиться к Дразнилке посерьезнее. Вот какая он, оказывается, знатная персона!

- Кстати, - задумчиво произнес Радикс. - Ты, кажется, уверял меня по поводу младшего Дразнилки, что из трех элементов можно образовать всего шесть комбинаций?

- Разумеется, - уверенно ответил Илюша.

- Как это мило! .. - еще более задумчиво произнес его приятель. - И ты уверен, что больше шести не может быть?

- Конечно, уверен!

- Так, значит, шесть! И все разные. Это очень важно.

Ровно шесть, говоришь ты?.. Это приводит мне на память один престранный случай. В архиве одного нотариуса города Толедо, в Испании, была обнаружена следующая запись, относящаяся к началу восемнадцатого столетия:

"После кончины достопочтенного дона Диего дель Кастильо в его доме было найдено завещание, согласно которому три драгоценных ларчика - бронзовый, серебряный и золотой - были оставлены трем его друзьям юности: дону Альваро, дону Бепито и дону Висенте, причем условие завещания гласило:

"Означенные предметы переходят во владение моих друзей по их выбору, который должен происходить в следующем порядке:

1)тот, кто видел меня в зеленом плаще, не может выбирать раньше дона Альваро;

2)если дон Висенте не был в Саламанке в тысяча шестьсот девяносто четвертом году, то, значит, тот, кто будет выбирать первым, никогда не давал мне своей табакерки;

3)дон Альваро и дон Бепито могут выбирать во вторую очередь только в том случае, если дон Бепито будет выбирать раньше того, кто первый стал носить шпагу..."

Когда вышеупомянутые лица, как того требует закон, были вызваны в суд, то они показали, что завещание это было составлено лет пятнадцать назад и поэтому сейчас никто из них не может вспомнить, о каком зеленом плаще идет речь, какое имела табакерка отношение к городу Саламанке, и так далее.

Однако им известно, что в то давнишнее время дон Диего не раз говорил о том, что он имеет намерение оставить каждому из них хороший подарок. Тогда судья прочел им заключительные строки этого удивительного завещания, где говорилось:

"Настоящим я, завещатель, торжественно утверждаю во всеобщее сведение, что три вышеприведенных условия, которые определяют, кто и в какую очередь должен выбирать ларчики, вполне достаточны для этой цели, и ни одно из них не является лишним".

- 112 -

Однако и это не помогло тропы наследникам, вслед за чем судья, дон Базилио, закрыл заседание суда, а через неделю он, призвав к себе наследников, объявил им порядок выбора, определенный доном Диего в его завещании, сообщив им одновременно, кто видел завещателя в зеленом плаще, кто давал ему свою табакерку, кто первым стал носить шпагу и был ли дон Висенте в Саламанке в тысяча шестьсот девяносто четвертом году".

- Так вот, - продолжал Радикс, - ты теперь знаешь об этом деле столько, сколько знал судья. Представь себе, что к тебе обратились за решением того же вопроса, и ответь, каков же назначенный доном Диего порядок выбора.

- Не знаю, - сказал Илюша.

- Ну, брат, это не решение! - ответил ему Радикс. - Вспомни своего друга младшего Дразнилку и все шесть его переодеваний, хорошенько подумай и давай-ка решать...

Говорят, Илюша впоследствии все-таки нашел это решение. И, как это ни удивительно, в дальнейшем выяснилось, что туманные речи Радикса насчет шести переодеваний младшего Дразнилки, волшебника Икса, оказались в высшей степени полезными для этого. Пришлось еще припомнить и знаменитую речь У. У. Уникурсальяна из Схолии Пятой, о которой забывать вообще не советую... Очень странная история! ..

- Ну хорошо, - пробурчал, немного помолчав, Радикс - А слышал ли ты, кстати, когда-нибудь знаменитую историю с девятью бутылями вина Атоса, Портоса и Арамиса?

- Трех мушкетеров? - изумленно спросил Илюша.

- 113 -

- Ну да. История эта заключается в следующем. Однажды, после путешествия в Пино-Гри, Медок, Барзак, Грав, Шато-Икем, Бургундию и прославленную Шампанью, трое друзей съехались вместе, и между ними произошел следующий великолепный разговор. "Пусть меня подведут к единственным воротам славного города Кагора, - вскричал Арамис, - и повесят на них три раза

подряд! Пусть шесть шпаг и десять пистолетов разом будут направлены в мое неустрашимое сердце! Пусть меня разорвут на двести пятьдесят три куска бешеные гиены из проклятых ущелий! Пусть мне в глотку немедленно вобьют ровно двести семьдесят шесть каленых пушечных ядер! Клянусь Геркулесом, Вулканом и самим длиннохвостым Вельзевулом - я не паду духом и не отступлю! Даже если бы я сам был пушечным ядром и на меня напали сразу все мои соседи справа, слева, сзади и спереди, еще с двух сторон, а кроме того, сверху и снизу, то и тогда бы я не дрогнул, а доблестно сразился бы со всеми этими двенадцатью врагами!" Услыхав эту бесподобную клятву, Портос и Атос мигом вскочили со своих мест, выхватив свои шпаги, и грозно гаркнули: "Мы готовы немедленно вступить в бой с миллионом горилл и людоедов, если кто-либо из них усомнится в том, что то, что ты сейчас сказал, чистая правда!"

Но Арамис грустно посмотрел на своих друзей и тихо промолвил: "И все же есть одна чудная сила, перед которой я слабею и падаю ниц..." Портос и Атос так были удивлены этим признанием, что не могли вымолвить ни слова. "Да, дорогие соратники, - повторил Арамис, - такая сила существует, клянусь моей непобедимой шпагой, и эта сила - жажда". Тут Портос и Атос, подумав недолгое время над этой фразой, сообразили, что все это было очень веселой шуткой, и, повалившись на диваны, начали хохотать. "Клянусь жареной головой кабана, начиненной говорящими попугаями, - вскричал в восторге Портос, утирая радостные слезы, - этот кавалер может уложить одной шуткой целый эскадрон королевских кирасир! Но что же нам делать с этим чудовищем - жаждой? Как же нам одолеть его?" Тут друзья отправились втроем в погреб гостеприимного дома, и там судьба послала им девять бутылей с вином. В первой было девять кварт вина, во второй - восемь, в третьей - семь, и так далее до девятой, в которой была только одна кварта. Вино было во всех бутылях разное, и одно только утешало наших мудрецов: все эти девять сортов вина отличались одним общим удивительным качеством - все они превосходно утоляли жажду. Дело было только за тем, чтобы откупорить бутыли и выпить все это вино. Но тут начались очень шумные пререкания. Затруднение заключалось в том, что Атос уважал сладкие вина,

Портос отдавал предпочтение кисленьким, в то время как Арамис пил только такие вина, которые были до того крепки, что уже невозможно было разобрать, кислые они или сладкие, и ни о каких других слышать не хотел. Мало этого, никак нельзя было догадаться, как бы поделить это вино, не смешивая его. А так как

всем было до смерти некогда и их мучила жажда, а никто не хотел пить то вино, которое он не любит, то ты можешь вообразить, какая там поднялась суматоха! Однако отважный Арамис вдруг хлопнул себя по лбу и воскликнул: "Да здесь не без черта!

Мне даже кажется, что я слышу некий адский серный запах.

Ясно, что в это дело запуталось какое-то ужасное колдовство.

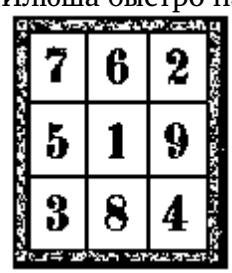
Но так как я прошел с большим успехом полный курс магии всех цветов, начиная с черной, то сейчас же я разрешу это дьявольское недоразумение при помощи таинственного заклинания, сообщенного мне под страшным секретом знаменитым волшебником Чу-Син-Чьеном, который подарил мне драгоценное "Зерцало Четырех Стихий". Вслед за этим Арамис быстро разрешил вопрос о том, как поделить безобидно эти девять бутылей, не смешивая вина, а -при этом еще предложил друзьям несколько решений, чтобы бутылки не только можно было поделить поровну, но всякий мог отобрать себе те вина, которые ему больше нравятся. Вот что гласит эта замечательная история. Не скажешь ли ты мне теперь, как поделить эти бутылки и как получить несколько решений задачи?

Илюша быстро сложил все кварты вина и получил "сорок пять". Значит, каждый кавалер мог рассчитывать на пятнадцать кварт вина. Несомненно, этого было вполне достаточно, чтобы утолить их благородную жажду, принимая во внимание, что кварта - это литр с лишним. Но как поделить эти девять бутылей, чтобы в каждых трех было пятнадцать кварт?

- В этой задаче, - произнес Радикс, - тебе бы мог помочь средний Дразнилка. Поставь-ка в коробочку все девять шашек, а потом подбери их так, чтобы...

- Понял! - воскликнул Илюша. - Так, чтобы каждый столбец из трех цифр давал в итоге "пятнадцать".

При помощи шашек Илюша быстро нашел решение.



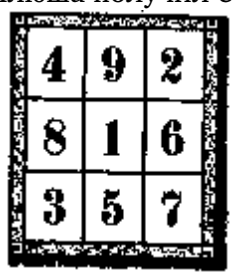
- Получаются сразу два решения, - заявил Илюша, - потому что и по столбцам сумма дает "пятнадцать" и по строкам тоже выходит "пятнадцать". Постой-ка! Эта штука, кажется, называется магическим квадратом? Я где-то читал о них. Вот, значит, почему Арамис вспоминал о магии! А что же это за волшебник?

- Был такой волшебник математик в тринадцатом веке, и книга его действительно носит такое странное название.

Квадраты эти иногда называют "серебряными", так как в старину некоторые чудаки так их любили, что вырезали их на серебряных дощечках и были уверены, что эти квадраты прекрасное предохранительное средство против чумы. Европейцы узнали их из сочинения ученого византийца Мосхопулоса, который жил в четырнадцатом веке. Но на Востоке их знали много раньше, чем была написана книга Чу-Син-Чьена. Магические квадраты были найдены на стене развалин одного индийского храма, построенного в одиннадцатом веке. Арабы писали о них в девятом веке. А потом ими занимались многие, включая Ферма.

- А ну-ка, - воскликнул мальчик, - я попробую найти еще одно решение этой головоломки!

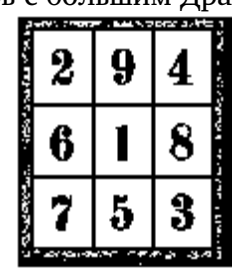
И довольно быстро Илюша получил его.



- Вот еще! - сказал он весело. Но, присмотревшись, добавил: - Впрочем, это тот же самый квадрат, который у меня получился в первый раз, только переставленный. Левый столбец, начиная снизу, стал третьей строчкой, средний столбец сделался второй строчкой, третий - первой.

Тут Илюша случайно взглянул в зеркало и увидел, что там его квадрат отражается еще по-иному[10].

- А вон, - весело воскликнул Илюша, - в зеркале еще решение! Ну-ка, я попробую теперь с большим Дразнилкой.

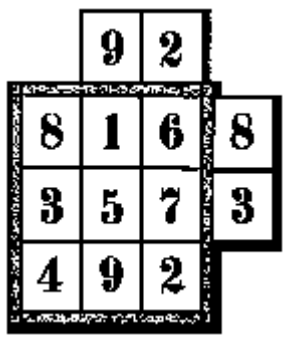


Но с большим Дразнилкой Илюша застрял основательно. Он высчитал, что должна получиться сумма столбца или строки, равная 34. Однако задачка оказалась довольно головоломной.

Все-таки наконец он одолел этот упрямый квадратик. Его столбцы или строки тоже можно было переставлять и ловить отражение в зеркале со всех четырех сторон. Кроме того, оказалось, что если магический квадрат вращать вокруг точки, находящейся между четырьмя средними шашками, то есть вокруг центра коробочки, поворачивая каждый раз на 90°, то можно получить еще несколько квадратов.

- 116 -

При первом повороте магического квадрата на четверть круга в положительном направлении, то есть против часовой стрелки, первая строка превращалась в первый столбец, поворачиваясь так, что последняя ее шашка становилась верхней шашкой первого столбца, и так далее...



- Все-таки долго делать! - сказал Илюша. - А что будет, если взять квадрат побольше? Например, в двадцать пять клеток или в тридцать шесть. Совсем пропадешь!

- Как ты скоро пропадаешь! - отвечал Радикс. - Есть несколько способов составлять такие квадраты. Вот, например, как строится серебряный квадрат с нечетным числом клеток по старинному индийскому способу. Представь себе, что твой квадрат со всех сторон окружен такими же квадратами; их всего будет восемь, то есть к каждой стороне твоего квадрата приставлен такой же квадрат и к каждому его углу тоже. Начинаешь ты с того, что ставишь единицу в среднюю клеточку первой строки. Затем дальше ты всегда двигаешься по диагонали снизу вверх и, следовательно, слева направо. Если пойдешь по диагонали от единицы, ты попадаешь в тот приставной квадрат, который стоит сверху, и двойка попадает на его последнюю строку. Ты ее сейчас же переносишь в ту же самую клетку основного квадрата. Затем опять идешь по диагонали. Если ты снова попадешь в приставной квадрат, то опять переносишь цифру в соответствующую клеточку основного квадрата. Если же, когда ты двигаешься по диагонали или переносишь цифру из приставного квадрата в главный, попадаешь в клеточку, которая уже занята, то ты ставишь эту цифру как раз под той же клеточкой, которую только что

заполнил. Для тройного квадрата ты получаешь то, что нарисовано на этой странице.

Илюша попробовал сделать по этому способу серебряный квадрат с двадцатью пятью клетками и убедился, что индийский способ очень прост[11]. Он отодвинул бумажку с цифрами и сказал:

- А все-таки хорошая книжка про мушкетеров! Он был молодчина, этот Арамис! Двести семьдесят семь пушечных ядер!..

- Положим, - заметил Радикс, - не двести семьдесят семь, а двести семьдесят шесть.

- Хм... - задумчиво протянул Илюша. - Ну, пусть двести семьдесят шесть. Это не так важно. На единицу больше, на единицу меньше...

- 117 -

- Значит, в таком случае, ты но будешь спорить, когда тебе скажут, что одиннадцать равно двенадцати? Там ведь тоже на единицу разница.

- Ну, это совсем другое дело!.. Но я вот про что. А как он собирался быть пушечным ядром и сражаться сразу с двенадцатью врагами со всех сторон? Я что-то не пойму.

- Он был человек военный, - отвечал Радикс, - и, конечно, любил вспоминать о ядрах. Попробуй-ка сообразить: когда ядра уложены на земле в кучу, со сколькими ядрами соприкасается каждое ядро, лежащее внутри кучи?

- Я где-то видел такую кучу, - припомнил Илюша, - кажется, во фруктовом магазине... Значит, я - ядро и лежу внутри кучи ядер. А все соседи нападают на меня. И сверху, и снизу, и со всех сторон! Сколько же их будет?.. Постой-ка!

Ведь наверху лежит только одно ядро?

- Одно.

- Хорошо. Мне кажется, что об этом очень трудно рассуждать...

- Постой! - перебил его Радикс. - А если я тебе предложу несколько превосходных ядер?

Илюша обернулся и увидел, что на полу уже лежит ровная треугольная куча ядер. Ему показалось, что теперь он уже не запутается.

- Значит, - сказал он, - наверху одно ядро. Так! Теперь я его снимаю. Сколько во втором слое? Куча ядер треугольная, следовательно, и каждый ее слой - треугольник. Так?

- Конечно.

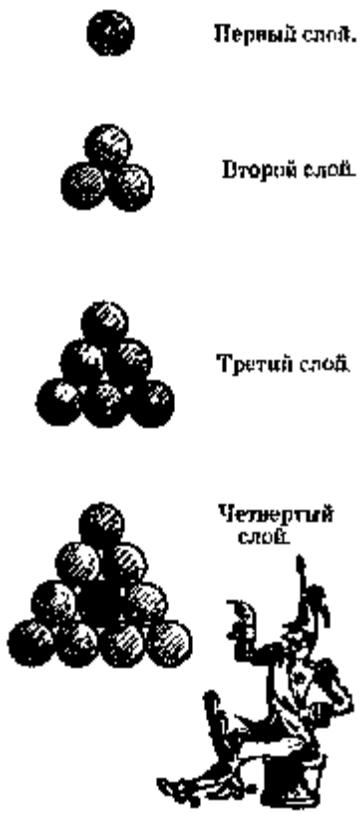
- Следовательно, самый малый треугольник, на котором лежит верхнее ядро, составлен из трех ядер. В нем есть только одна-единственная лунка, и в ней-то и лежало верхнее ядро.

Теперь следующий слой, третий. Сбоку у него с каждой стороны по три ядра. Конечно, этот второй ядерный треугольник тоже равносторонний, и сторона его равняется трем ядрам. В нем всего шесть ядер. Как он устроен? Очень просто.

Взят второй слой из трех ядер, и к нему добавлено с одной стороны еще три ядра. В этом третьем слое есть четыре лупки, но из них идут в дело только три, потому что для четвертого ядра уже места нет. Теперь четвертый слой. Он получается из третьего путем добавления с одной из сторон еще четырех ядер. В нем всего десять, ядер и девять лунок, по заняты только шесть - для остальных трех ядер нет места.

- Расскажи-ка мне подробно про эти лунки, - предложил Радикс.

- Дело вот в чем: если я на чертеже соединю центры ядер прямыми, то из каждых трех ядер получу равносторонний треугольник, сторона которого равна диаметру ядра.



Среднее черное ядро в четвертом слое - первое из тех, которые нельзя увидеть сбоку.

В четвертом ядерном слое всего десять ядер. Они образуют на чертеже (стр. 120) шесть заштрихованных ("черных")

треугольничков. Эти треугольнички соответствуют тем лункам, на которые можно положить ядра третьего слоя. Центры шаров (ядер) этого третьего слоя придутся как раз над средними точками этих треугольничков, и расстояния между ними опять будут теми же самыми.

Но есть еще треугольнички, которые не заштрихованы ("белые"): их три. Они-то и дают еще три лунки, на которые нельзя положить ядра, потому что расстояния от их средних точек до средних точек заштрихованных треугольничков вдвое меньше, чем требуется. Но можно было бы, разумеется, поступать и наоборот, то есть пропускать "черные" лунки и класть ядра только на "белые".

- Хорошо, - отвечал Радикс, - пусть будет так. Но как же ты решил насчет двенадцати ядер, с которых начался наш разговор?

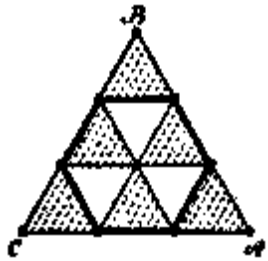
- Сейчас подумаю. Для этого я возьму тот же четвертый слой. В схеме треугольничков я оставляю без внимания три крайние точки - A, B, C. Тогда, если обвести жирной линией периметр оставшейся фигуры, получится шестиугольник, правильный, разумеется. В нем один шар (то есть одно ядро) посредине, а кругом шесть точек для ядер.

- Значит?

- Значит, кругом ядра, находящегося внутри кучи, лежат по сторонам шесть ядер.

- Ясно. А сколько лежит сверху его и снизу? Ну-ка, подсчитай!

- Так как мой шестиугольник состоит из трех "черных" треугольников, то, значит, он образует три лунки для ядер (остальные будут лишними), а следовательно, сверху можно положить m p и ядра. Снизу же седьмое, то есть центральное, ядро, о котором мы толкуем с тобой, тоже опирается на три ядра, что ясно из тех же самых соображений. Итого: шесть, да три, да еще три - выходит двенадцать. Так оно и есть. Вот так здорово вышло!



Шесть треугольников четвёртого слоя.

Шесть треугольников четвертого слоя.

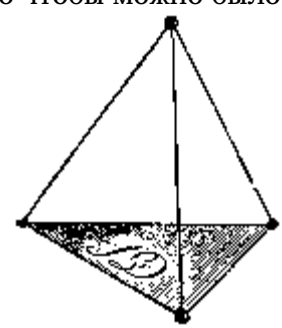
- Здорово-то здорово, но дело в том, что ты все это делал с ядрами в руках. А как бы это нам с тобой рассудить вообще, не касаясь ядер? Вот что интересно.

Илюша задумался. Ему казалось, что и без того все ясно, но высказать эту храбрую мысль он почему-то не решился. Радикс немного поморщился и произнес:

- Вот передо мной кучка ядер в два слоя: в первом слое, как обычно, одно ядро, во втором - три. Ясно?

- Вполне.

- Прелестно и очаровательно! Теперь пусть фигура не разрушается, пусть линии, соединяющие центры ядер, не расплываются и не укорачиваются, а ядра уменьшатся почти до размеров точки, только чтобы можно было заметить глазом.



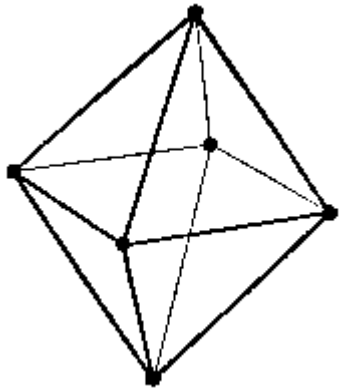
Тетраэдр.

Немедленно все совершилось как по-писанному. И вскоре перед Илюшей на полу стояла некая геометрическая фигура, очень похожая на те проволочные модели, с которых рисуют начинающие живописцы. Ядра стали толстыми "точками" в углах фигуры, а центры ядер соединились тонкими линиями.

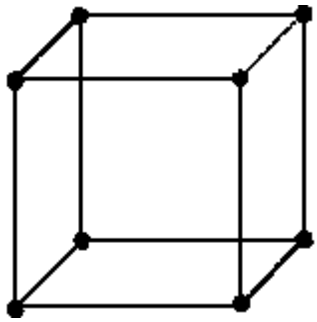
- Это, - сказал Радикс, - не что иное, как тетраэдр, один из правильных многогранников, каждая грань которого есть равносторонний треугольник. Их всего четыре, столько же у него и вершин (вспомни, что в той фигуре, с которой мы начали, было тоже четыре ядра), а ребер у тетраэдра шесть. Пять правильных многогранников были известны еще грекам, в частности о них писал Платон, почему их нередко называют Платоновыми телами. Вот они каковы: тетраэдр, ограниченный четырьмя правильными треугольниками; октаэдр, ограниченный восемью правильными треугольниками; икосаэдр, ограниченный двадцатью правильными треугольниками; куб - известное тебе тело, ограниченное шестью квадратами, и додекаэдр, ограниченный двенадцатью правильными пятиугольниками. Так вот, перед тобой здесь тетраэдр. Рассматривая его, можно легко понять, как лежат ядра в куче. Надо иметь в виду, что нужно уложить ядра так, чтобы они располагались наиболее плотно. Чтобы нам в этом разобраться, начнем с более простой задачи. Как уложить на плоскости возможно больше кругов, которые должны частично соприкасаться, но нигде не перекрываться? Рассуждение приводит нас к выводу, что наиболее плотное (решетчатое) расположение кругов на плоскости получается, если центры трех кругов, из которых только два лежат в одном ряду, образуют равносторонний треугольник, сторона которого, очевидно, равна диаметру круга.

Когда мы теперь переходим к расположению не кругов на плоскости, а шаров в пространстве, то очевидно, что пока речь идет о расположении шаров в одни слой, остается верным правило равностороннего треугольника, которое мы формулировали для кругов на плоскости. Но когда дело касается наиплотнейшего расположения шаров в пространстве, тут задача несколько усложняется. Как ты уже отметил (и совершенно правильно), мы не имеем возможности укладывать шары в следующем слое в каждую лунку - для этого шары слишком велики, - следовательно, нам надо выбирать те или иные лунки. Ты сам это заметил, когда говорил о шестиугольнике. Помнишь?

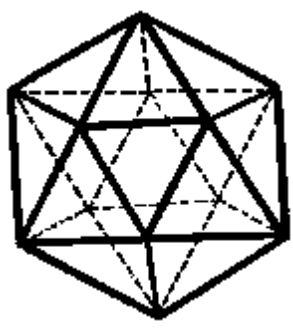
- Конечно, помню.



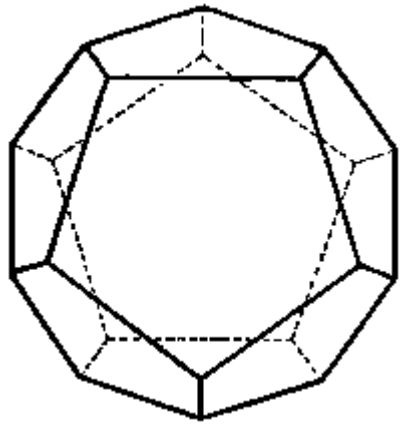
Октаэдр.



Куб.



Икосаэдр.



Додекаэдр.

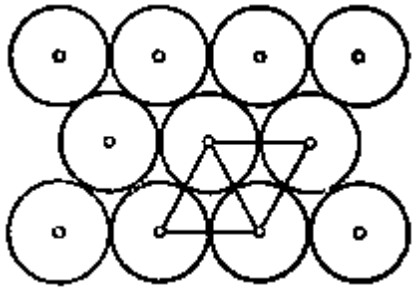
- Так вот. Для изображения двух слоев ядер ставим рядом три тетраэдра, чтобы их соприкасающиеся точки слились.

Немедленно перед Радиксом стали на полу три тетраэдра, и указанные точки слились.

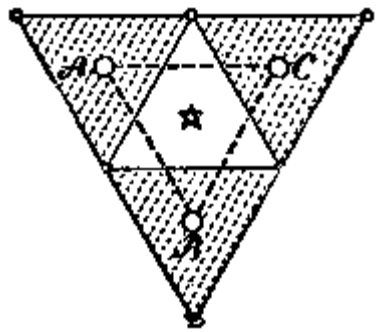
- Так, - сказал Илюша, - теперь я как будто понимаю.

Точки в углах тетраэдров - это ядра. В нижнем ряду шесть ядер, в верхнем - три. Все правильно. Основание каждого тетраэдра - это те треугольнички, которые мы называли "черными". А треугольник, который лежит в глубине впадины между тремя тетраэдрами, назывался у нас "белым". Его мы пропускаем. То есть здесь среди шаров и будет та лунка, которую мы не заполняем. А если я сверху, на вершины этих трех тетраэдров, поставлю еще один так, чтобы три точки его основания слились с тремя вершинами нижних трех тетраэдров, то ясно, что на трех шарах будет лежать один. Я получу тогда один большой тетраэдр. Теперь я понял.

- Но это еще не все, - добавил Радикс. - Дело в том, что наиплотнейшее расположение шаров в пространстве, даже в три только слоя, зависит от того, в какие лунки ты кладешь ядра и какие ты пропускаешь. Чтобы это стало совершенно ясным, составим тетраэдры в два слоя так, чтобы соприкасающиеся углы их совпали, и допустим, что эти два слоя тянутся безгранично далеко. У каждого из тетраэдров есть вершина, которая изображает в нашей схеме шар второго слоя. Теперь я хочу добавить еще третий слой, но добавить его не сверху, а снизу. И при этом я могу действовать двумя способами. Либо я к каждому основанию моего тетраэдра приклею основание еще одного (чтобы они совпали и слились воедино), и тогда вершина второго тетраэдра будет стоять симметрично относительно вершины первого. Это первый способ наиплотнейшего расположения шаров в пространстве.



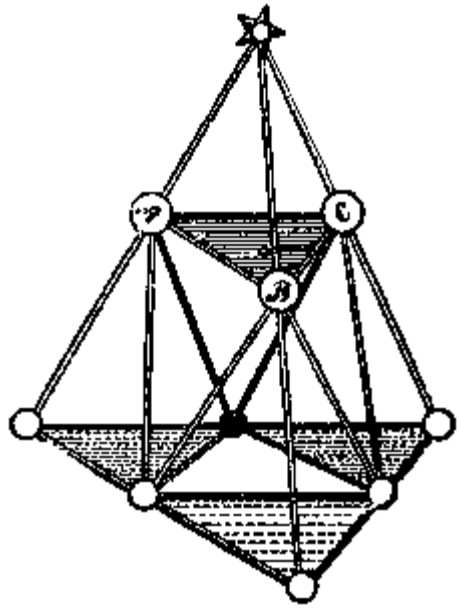
Наиболее плотное расположение кругов на плоскости.



Четыре тетраэдра (план). Заштрихованные треугольники - основания трех нижних тетраэдров; кружки - вершины этих тетраэдров (А, В.С); звездочка - положение верхнего шара, то есть вершины четвертого тетраэдра, основание которого совпадает с пунктирным треугольником АВС.

Однако можно действовать и по-другому, то есть приложить основание второго тетраэдра к той впадине, которая образуется менаду двумя рядом стоящими тетраэдрами. Тогда третий, нижний слой шаров будет расположен так, что его можно перевести в первый при помощи того же смещения, которое переводит первый ряд во второй. Комбинируя эти два основных способа укладки, можно получить различные расположения шаров в пространстве. Так вот, куча из ядер, о которой мы с тобой сейчас толкуем, построена по...

- Второму способу! - закончил Илюша. - Ну, теперь ясно, что на Арамиса должны нападать трое сверху, трое снизу и шесть человек со всех сторон! Выходит не так, как всегда говорят: "со всех четырех сторон", а со всех двенадцати сторон! Интересно, сколько же в куче будет всего ядер? Наверху - одно, в следующем слое - столько, сколько видно сбоку в первом треугольнике, то есть три, а в следующем - столько, сколько во втором треугольнике; это будет еще на три ядра больше, значит, шесть. Потом будет уже на четыре больше - десять. Как же считать?

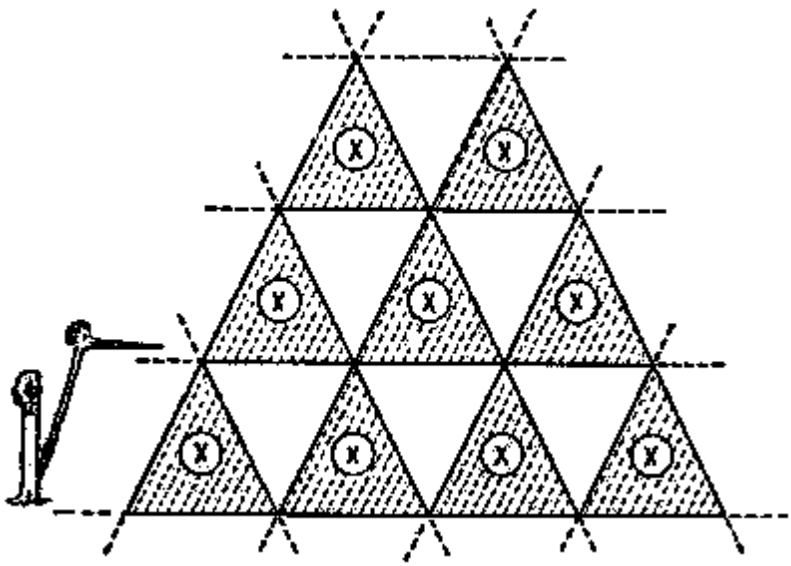


Четыре тетраэдра (вид сбоку).

- Об этом ты узнаешь в Схолии Одиннадцатой, а пока продолжай складывать.

- В первом и втором слоях вместе: один да три - четыре.

- Квадрат двух, - подсказал Радикс. - А во втором и третьем?



Первый способ наиплотнейшего расположения шаров. Шары верхнего слон (кружки) закрывают шары нижнего слоя (крестики). опять квадрат. А шесть и десять-шестнадцать, опять квадрат.

- Три и шесть - девять, опять квадрат. А шесть и десять -

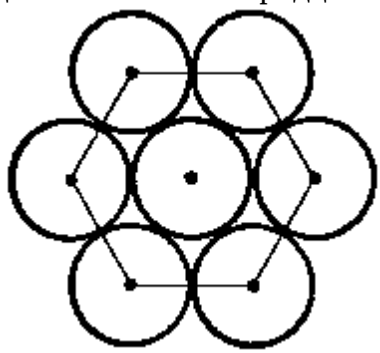
шестнадцать, опять квадрат.

Как интересно! Значит, очень просто эти слои считать: вычти число последнего слоя из следующего квадрата и получишь то, что надо. Следующий квадрат будет двадцать пять. Вычитаю десять, и выходит пятнадцать. Так?

- Твое наблюдение правильно. Это треугольные числа.

- Как интересно! - воскликнул Илюша. - И для всякого числа есть свое название! А выходит, что шесть - это очень знатное число: оно и совершенное и треугольное! Теперь: сколько же всего ядер выходит в куче?

Один слой - одно. Два слоя - четыре. Три слоя - десять. Четыре слоя - двадцать. Пять слоев - тридцать пять.



Строение селитры по М.В. Ломоносову (1763 г.)

- А это пирамидальные числа.

- Ну да, потому что выходит пирамида из ядер.

- Конечно, - сказал Радикс. - Такое расположение имеет важное значение при изучении места отдельных атомов или молекул в кристаллах. Они там тоже так уложены. Представь себе, что математики пришли к этой мысли раньше, чем физики! И все эти числа получить очень просто. Возьми-ка мел и пиши. В первом столбике напиши одну под другой пять единиц; во втором - те числа, которые ты видишь в пирамиде ядер сбоку; в третьем столбике - треугольные числа, а в четвертом - пирамидальные.

1	1	1	1
1	2	3	4
1	3	6	10
1	4	10	20
1	5	15	35

Илюша взял мел и написал то, что изображено справа.

- Смотри, какая у тебя получилась табличка. Каждое число в любой строке равно сумме того числа, которое стоит над ним, и того, которое стоит слева от него. Видишь?

- Верно, - отвечал Илюша. - Например, десять равно шести плюс четыре!

- А теперь, - продолжал его друг, - ты видишь, что эту табличку очень легко продолжить по этому правилу.

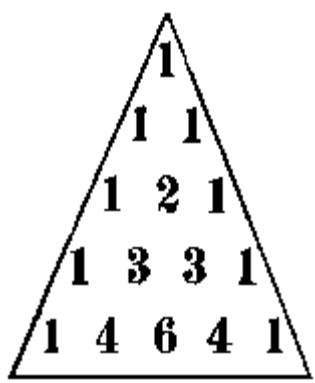
1	1	1	1	1	1	1	1
1	2	3	4	5	6	7	
1	3	6	10	15	21		
1	4	10	20	35			
1	5	15	35				
1	6	21					
1	7						
1							

Добавь-ка еще четыре единички в первой строке и три в первом столбце и заполни таблицу. И в каждой строке пиши одним числом меньше, чем в верхней. Ну-ка, пиши поскорей!

Илюша написал единицы, и у него получилась табличка, изображенная слева.

- Эта замечательная табличка называется треугольником Паскаля, - сказал Радикс, - потому что она была составлена французским математиком семнадцатого века Блезом Паскалем.

- Это тот самый, про которого ты вспоминал, когда Великий Змий пришел пробирать нас? - спросил Илюша.



- Он самый, - торжественно произнес Радикс. - Эту табличку

до Паскаля, веком раньше, построили итальянские математики. Но в то время известия о новых открытиях распространялись не так быстро, как теперь. Мало того, что этот треугольник дает натуральные числа, треугольные, пирамидальние и многие другие, которые в общем называются фигурными числами, он дает еще более полезные и важные указания. Вот я его сейчас перепишу по-другому.

Радикс взял мел и написал то, что изображено слева.

- Посмотри, - сказал он. - Тебе эти цифры ничего не напоминают?

Илюша внимательно посмотрел новую табличку, подумал, потом сказал:

- Один, два, один - это похоже на сто двадцать один, то есть на квадрат одиннадцати.

Потом Илюша взял мел и начал что-то старательно множить.

- Четвертая строка, - сказал он, - это будет куб одиннадцати, а пятая - четвертая степень одиннадцати.

- Правильно, - отвечал Радикс. - Ну, а кроме этого, ты ничего не замечаешь?

- Нет, - сказал Илюша, подумав, - больше, кажется, ничего.

- А помнишь ты формулу квадрата и куба суммы?

- Конечно!

- А как там идут коэффициенты?

Илюша помолчал, посмотрел на Радикса, потом на табличку и затем написал:

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

Внимательно посмотрев на эти хорошо знакомые формулы, а затем снова на табличку Радикса, Илюша сказал:

- А ведь верно! Если взять квадрат суммы, то при a^2 коэффициент единица, при ab-двойка, а при b^2-снова единица, то есть коэффициенты идут, как в третьей строке: 1-2-1.

И в кубе суммы тоже идут, как в четвертой строке: 1-3-3-1.

Илюша умножил куб суммы на первую степень суммы и, довольный, сказал:

- Ну это просто замечательно! И в четвертой степени у нас получается:

и, значит, коэффициенты идут опять, как здесь, в последней строчке: 1-4-6-4-1.

- Ну, так вот, - продолжал, улыбаясь, Радикс, - значит, с помощью этого треугольника, если ты его продолжишь (а как ты видел, это очень просто), ты можешь написать сумму в любой степени. Ты должен только запомнить еще одно нехитрое

правило: степени первого слагаемого уменьшаются от той степени, в которую ты возводишь сумму, до нулевой, а степени второго слагаемого идут как раз в обратном порядке- от пулевой до старшей.

- Действительно так, - сказал Илюша, посмотрев на четвертую степень суммы.

- И это еще не все, - сказал Радикс. - Ты еще немало узнаешь в дальнейшем про эти числа. Они многое могут делать. Узнаешь также, что у Арамиса были весьма серьезные основания интересоваться этим треугольником (AJI-I, XII).

- Вот почему он и сказал про двести семьдесят шесть ядер?

- Двести семьдесят шесть и двести пятьдесят три - это два пирамидальных числа. Но тут есть вещи и посерьезнее.

Дело в том, что этот треугольник учит храбрых пушкарей не только складывать ядра в кучи: он учит их еще и стрелять из пушек! А самое главное, он учит их попадать этими ядрами как раз туда, куда следует, чтоб отвадить непрошеных гостей, которые падки на чужое добро!

Схолия Восьмая,

из которой любезный читатель узнает о том, как некий скромный знак препинания отправляется прогуляться по бережку весьма живописной речки, но никто из присутствующих никак не может понять, по какому берегу он идет - по этому или по противоположному. Наши друзья пытаются разрешить это небывалое затруднение при помощи карманных часов, но из этого ничего не выходит, потому что эти часы ведут себя не только весьма двулично, но, сверх того, еще находятся в самой тесной дружбе с одним несговорчивым зверьком, по имени спрут. Однако доблестный Илья Алексеевич, не теряя присутствия духа, бросается на своего страшного врага с ножницами и после пятикратного боя выходит из этой борьбы победителем. Естественно, что ему дается награда за этот знаменитый подвиг, благодаря чему он и получает возможность потрогать собственными руками ту самую таинственную бутылку, в которой сидел ужасный джинн из арабской сказки, причем талисман, которым был на тысячи лет запечатан в этой бутылке джинн, оказывается троюродным внуком одного нашего хорошего знакомого.

- Вот что, - сказал Радикс, забираясь в кресло, - ты ведь еще спрашивал насчет двери в домик Розамунды. Понравилась? А ведь признайся: в качестве двери в волшебное царство - устройство самое подходящее! А между тем эту дверь очень легко сделать.

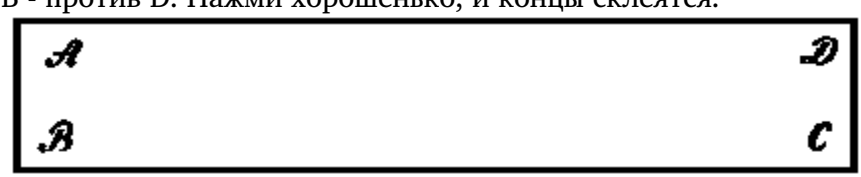
- 128 -

Он протянул Илюше ровную четырехугольную полоску бумаги. На четырех углах ее стояли буквы A, B, C, D.

- Ну-ка, сверни ее кольцом.

Илюша свернул.

- А теперь поверни один конец на сто восемьдесят градусов, то есть обратной стороной, так, чтобы буква C пришлась против A и B - против D. Нажми хорошенько, и концы склеятся.



Илюша так и сделал. И у него в руках оказалась бумажная фигурка, которая нарисована внизу.

- Ну, вот и дверь, - сказал Радикс.

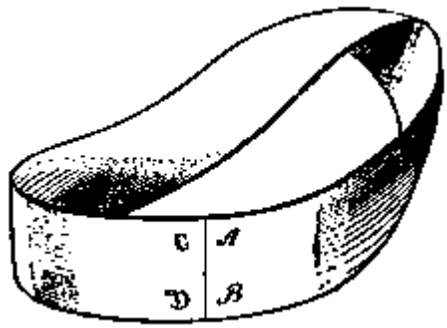
- Как так? - спросил Илюша в недоумении, разглядывая бумажную фигурку.

- А очень просто, - отвечал ему его приятель. - Это односторонний Мебиусов лист. (Вырежи скорее себе полоску бумажки, склей ее, как показано на картинке. Бери полоску в 25 см длиной и в 3 см шириной.)

- Вот какая странная бумажка! - сказал Илюша. - Действительно ты прав, - эта дверь как раз так и была устроена.

Теперь я как будто понимаю, как я очутился с другой стороны, не переходя через край. Какая интересная поверхность!

- Ну, - сказал Радикс, - это еще что! Наш Бушмейстер еще и не такие чудеса может показывать.



- А кто такой Бушмейстер?

- А это такая змея водится в Гвиане. Страшно ядовитая, а хитра, как сам сатана.

Правда, она двусторонняя.

Но наша поверхность тоже очень хитрая, мы ее и прозвали Бушмейстером.

Однако с бумажкой нам будет не очень удобно.

Лучше мы попросим нашего Бушмейстера явиться к нам сюда собственной персоной. А вот и он! Прошу любить да жаловать.

И перед Илюшей повисла в воздухе Мебиусова поверхность, но довольно большая, около метра с лишним, а ширина ленты была сантиметров тридцать. Сделан был милейший Бушмейстер не из бумаги, а из почти совершенно прозрачного стекла. Илюша обошел его со всех сторон и заметил, что лента, из которой сделана односторонняя поверхность, была совершенно лишена толщины, как и полагается настоящей геометрической поверхности, однако была очень крепкая.

- Ну-с, - сказал Радикс, - надо тебе с ним познакомиться. Вот тебе карандаш. Проведи-ка вдоль всего Бушмейстера линию, но только с одной стороны. Начни, например, отсюда.

Попросим его на минуту сделаться непрозрачным.

- Попробую, - сказал Илюша и взял карандаш. - Вот.

И линия у меня сомкнулась, совсем как на обыкновенной ленте.

- Ты думаешь? А ну-ка, покажи мне теперь ту сторону Бушмейстера, на которой ты не проводил линию.

Илюша посмотрел снизу и воскликнул:

- Я вел линию все время с одной стороны, по она оказалась и там тоже! Выходит, что у него одна только сторона и есть. Он действительно односторонний!

А Бушмейстер мгновенно полинял и снова стал прозрачным.

Однако когда мальчик через минуту взглянул на Бушмейстера, он заметил, что теперь по самой середине поверхности течет речка из темной, непрозрачной жидкости. Речка текла в одном направлении и представляла собой движущуюся ленту из жидкости, вставленную в эту стеклянную ленту. Почему эта жидкость не проливалась? Однако если в этом мире Бушмейстер может сам по себе висеть в воздухе, то почему бы не висеть и речке?

Затем Радикс положил на ладошку Илюше что-то совсем крошечное и черненькое.

- Что это такое? - удивленно произнес мальчик.

В ответ с его ладошки раздался тоненький, еле слышный писк:

- Я - Точка! Геометрическая Точка. Неужели не узнал?

Илюша начал было рассматривать свою новую знакомку, но Радикс сказал ему:

- Ну-ка, брось Точку в эту речку.

Илюша бросил Точку, и она поплыла по течению вокруг по всей ленте, вернулась на старое место и опять поплыла в том же направлении. Так что Илюша еще раз мог убедиться, что конца у этой поверхности, как и у окружности, нет.

- Ну, а теперь, - продолжал Радикс, - выуди ее оттуда и положи на бережок, который около тебя.

Илюша выловил Точку и положил ее на берег речки.

- На какой берег ты ее положил? - спросил Радикс.

- Если я стану лицом по течению реки и буду смотреть на ленту сверху, - отвечал Илюша, - то, значит, она лежит на правом берегу.

- На правом? - переспросил Радикс.

- Да, - ответил Илюша.

- Так, - ответил Радикс, - на правом так на правом. Так и запишем: Точка находится на правом берегу речки.

Точка легла на плоскость. Однако лента была настолько тонка, что Точка прошла ее всю насквозь, как чернильная клякса

на промокашке, и ее на ленте было отлично видно как сверху, так и снизу.

- Готово! - пискнула Точка из плоскости.

- Прелестно! - отвечал ей Радикс. - А теперь я попрошу тебя, любезная Точечка, двигаться по берегу вниз по течению речки, но, пожалуйста, двигайся как можно медленнее.

Точка послушалась и медленно поплыла внутри ленты.

Илюша отлично видел ее.

- А ты, Илюша, - сказал Радикс, - следи за ней. И как только ты ее снова увидишь сверху, скажи ей, чтобы она остановилась. Понял?

- Понял, - отвечал Илюша.

Точка медленно подошла к тому месту, где лента Бушмейстера поворачивала вниз, исчезла на миг, появилась на сгибе и опять исчезла. Затем Илюша увидел, как она появилась с другого края и начала двигаться вверх. Когда она подошла к нему поближе, Илюша скомандовал:

- Точка, стоп!

Точка остановилась.

- Ты ее видишь? - спросил Радикс.

- Вижу, - ответил мальчик.

- Ясно видишь?

- Совершенно ясно. Она ведь прошла насквозь через ленту.

- Можешь ты мне ответить, на каком она берегу? Только посмотри повнимательней.

Илюша посмотрел и ответил:

- Я смотрю опять сверху. И берег определяю так же, то есть по течению речки. Но только... только... хм... Вот уж я не знаю...

- Чего ты не знаешь?

- Она сейчас на другом берегу!

- На каком другом?

- На левом.

- А ты не ошибаешься?

- Да нет, - ответил Илюша, - я не могу ошибиться, потому что даже поставил мелом крестик на том месте, куда ее положил. И вот крестик остался на правом берегу, а она на левом. .. Послушай, Радикс, а можно, чтобы она еще раз пошла?

- Прошу, - отвечал тот.

- Точка, - сказал Илюша, стараясь говорить как можно более внятно и определенно, - продолжай двигаться в том же направлении, в каком ты двигалась, и так же медленно. Поняла?

- Как не понять! - раздался тоненький писк, и Точка поплыла вдоль по ленте.

Через некоторое время она появилась на правом берегу, около крестика. Илюша не остановил ее, она пошла дальше и снова появилась на левом берегу.

- Значит, - сказал в раздумье Илюша, - ей надо обойти плоскость эту два раза, чтобы попасть на то же самое место.

- Точно! - отвечал Радикс.

- А когда она плыла по поверхности речки, ей надо было обойти плоскость только один раз, - сказал Илюша.

- В этом роде, - рассеянно отвечал Радикс. - Однако это еще не все. Ну, ты, Точка, можешь теперь исчезнуть! Благодарю.

Точка немедленно исчезла, вслед за ней исчезла и речка.

- Вот тут у меня часики есть, - продолжал Илюшин друг, - посмотри-ка!

Илюша взял со стола обыкновенные карманные часы.

Впрочем, при ближайшем рассмотрении они оказались не совсем обыкновенными, потому что были плоские и очень тонкие, примерно в миллиметр толщины, и совершенно прозрачные, так что стрелки можно было видеть с обеих сторон. Шли они очень быстро, и поэтому Илюша ясно видел, как бежит большая, минутная стрелка. Часовая двигалась медленнее, во и ее движение было заметно.

- Положи их на Бушмейстера около твоего крестика, предложил Радикс.

Илюша положил их на самый крестик.

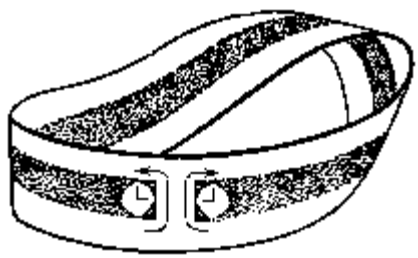
- Ну-ка, часики, - сказал Радикс, - прошу вас, принимайтесь за работу.

Часы сразу ушли в ленту так же, как это сделала Точка.

Они медленно двинулись в путь вдоль ленты вперед, по тому же направлению, по которому раньше текла речка, словно они были вставлены в ленту. Илюша внимательно следил за ними.

Часики плыли, плыли и наконец показались около самого крестика.

- Стойте! Стойте! - закричал Илюша вне себя от удивления,



Часики остановились около крестика, а Илюша смотрел на них и ничего не понимал. Циферблат был виден как будто отраженный в зеркале. Стрелки бежали с прежней быстротой, но

уж теперь в обратную сторону, следуя движению переставленных цифр: против часовой стрелки!

- Теперь уж я совсем ничего не понимаю! - воскликнул Илюша в отчаянии. - Ну, идите дальше!

Часы послушались и через некоторое время снова появились у крестика. Теперь у них опять был обычный циферблат, и их стрелки двигались нормально. Затем они вновь появились около крестика, и тут стрелки опять бежали в противоположную сторону.

- Нет, - сказал Илюша, - этого я не могу понять. Они где-то меняют направление движения стрелок.

- Ты думаешь? - спросил Радикс. - Ну хорошо, постарайся проследить, где именно это происходит. Вот тебе вторые часики, такие же. Оставь одни часы около крестика, а сам следи за теми, которые будут плыть в ленте.

Илюша послушался и заметил, что часы, за которыми он следил не отрываясь, ведут себя обычно. Но когда часы добрались до крестика и оказались рядом с теми часами, которые там оставались, Илюша с удивлением обнаружил, что теперь те часы, которые не двигались, идут в противоположную сторону.

- Может быть, - произнес в недоумении Илюша, - я просто смотрю теперь на них с другой стороны ленты?

- С другой стороны? - спросил Радикс. - А когда же ты успел перебраться на "другую сторону"? И что это за "другая сторона"? Ты ведь, кажется, убедился, что у этой поверхности только одна сторона и есть.

- Но мне кажется, что на часы я смотрю с другой стороны!

- Хм... - иронически промолвил Радикс. - Но вот то-то и удивительно, что, оставаясь с той же стороны поверхности, ты ухитрился на часы посмотреть "с другой стороны". Нет, тут дело немножко похитрее. Если эти часы принадлежат ленте, вделаны в нее, то и о них уже нельзя сказать, где у них одна сторона, где другая.

- Да, - сказал Илюша. - Но если лента и часы непрозрачные, они будут в том же месте с другой стороны ленты, и я их не увижу.

- Это так, но если ты хочешь рассуждать о поверхности, у которой нет никакой толщины, то лучше представлять себе ее прозрачной, как мы с самого начала и сделали. А ты рассуждаешь о листке бумаги - это уже, собственно говоря, удвоенный Бушмейстер или, если хочешь, Бушмейстер "в чехле". Но и на нем происходят удивительные вещи: не пересекая края, ты можешь непрерывным движением перейти из точки, которая находится с

одной стороны и тебе видна, в точку противоположной "в этом месте" стороны, от тебя закрытой. Ты совершенно правильно выразился сейчас, сказав "в том же месте с другой стороны". Если вырезать маленький кружок из Бушмейстера, то этот кружок будет такой же двусторонний, как и кружок, вырезанный из самой обыкновенной ленты. Но если его окрасить в разные цвета с разных сторон (например, с одной - в синий, а с другой - в красный), потом вставить обратно в ленту и закрасить соседние части ленты в цвет, одинаковый с цветом примыкающей стороны кружка, то может сначала показаться, что закрашены в разные цвета разные стороны поверхности. Но это можно сделать именно только "в данном месте". Если раскрашивать ленту дальше, то синий и красный цвета столкнутся. Где это случится? Сразу "на обеих сторонах"? Или "на одной из них"? Значит, у Бушмейстера, если взять его в целом, действительно нет возможности разграничить одну и другую стороны. Вот поэтому-то мы и называем его односторонним!

Радикс посмотрел на Илюшу, улыбнулся и промолвил:

- Можно проделать еще один интересный опыт с Бушмейстером, который, я надеюсь, покажется тебе более понятным. Пусть снова вдоль всего Бушмейстера, посредине, будет течь широкая речка.

Немедленно на Бушмейстере снова появилась речка.

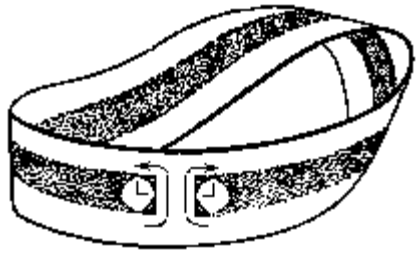
- Выстроим на речке плотину, - сказал Радикс, - то есть превратим речку в пруд.

Речка сейчас же сделалась спокойной, как пруд, а на Бушмейстере появилась плотина, образовавшая широкую перемычку между тем берегом речки, у которого стоял Илюша, и противоположным.

- Теперь, - продолжал Радикс, - я беру двое обыкновенных на вид карманных часов. Одни я положу в виде островка в пруд слева от плотины, а другие - справа. Сейчас и те и другие часики стоят, а идти они начнут по команде нашей старой приятельницы - Точки.

Немедленно недалеко от плотины на поверхности Бушмейстера показалась и Точка.

- Теперь, - сказал Радикс, - мы пустим нашу Точку в обход пруда, причем она отправится с нашей стороны плотины на другой берег, а затем повернет направо и отправится в обход по берегу. Позволим ей кружиться вокруг нашего пруда в одном и том же направлении столько, сколько ей вздумается. А теперь слушайте меня, вы, часики ВОЛШЕБНОГО ДВУРОГА!



Стрелки показывают, как двигалась Точка.

- Тик-так. Слу-тик-ша-так-ем-тик-так! - ответили двое часиков. - Тик-так. Вот-как! Тик-так.

- Ну-ну! Потише! - заворчал на них Радикс. - Идти еще вам не полагается. Но вы должны пойти, когда каждым из вас скомандует Точка, проходя мимо. И при этом каждые из вас должны пойти так, чтобы ваши стрелки побежали в том же направлении, в котором вас огибает Точка, как будто она зацепила концы стрелок и увлекла их за собой.

Часики в один голос отвечали, что они поняли и так и сделают.

- Точка, вперед! - скомандовал Илюша.

Точка двинулась вперед, перешла через плотину и скомандовала правым часикам: "Шагом марш!" Первые часики немедленно пошли в обычном направлении - "по часовой стрелке", так как Точка, пройдя плотину, повернула направо по берегу пруда и проследовала дальше по изгибу ленты Бушмейстера. Через минуту она появилась снова: Илюша увидел ее слева от плотины, но, к своему удивлению, не на противоположном берегу, а на том самом, с которого она ушла. Точка снова скомандовала, на этот раз левым часикам: "Шагом марш!" Часики затикали, а Точка, пройдя через плотину и продолжая огибать левую сторону пруда, повернула налево и продолжала свое движение в том же направлении по ленте Бушмейстера.

Илюша наклонился над левыми часиками и убедился, что они идут полным ходом, но в направлении "против часовой стрелки", то есть в том направлении, которое в математике называется положительным направлением вращения.

- Вот так история! - сказал Илюша - Часики идут в разные стороны, а Точка обходит пруд все время в одном направлении. Как же это так выходит?..

Илюша еще раз проследил за Точкой и за часиками, посмотрел на все это очень растерянно и почесал в затылке.

- А здорово получается! - произнес наш герой. - Сперва Точка по моей команде идет вперед и пруд у нее справа.

А когда она снова, объехав всего Бушмейстера, подходит к запруде, то пруд оказывается от нее слева... И если даже я просуну голову снизу и буду смотреть как бы "с другой стороны", то опять получается, что сначала пруд у нее слева, а потом справа! А где она меняет свое "правое" на "левое", я найти не могу...

- Вот видишь, - промолвил Радикс наставительно, - на нашей поверхности не только нет "двух различных сторон", на ней нельзя установить и определенного "направления вращения". Одно и то же движение ты можешь воспринимать как вращение в обычном направлении часовой стрелки и одновременно в противоположном. Ведь ты, например, не можешь сказать, как твоя Точка обходит пруд: по часовой стрелке или против? Одно направление непрерывно переходит в другое, когда Точка обегает вокруг ленты.

- Это ужасно трудно понять! - сказал Илюша. - Кажется, просто кусочек бумажки, а показывает какие чудеса!

- То-то и дело! Вот ты и мотай на ус! Ну, теперь еще одно крохотное чудо. Друг сердечный, Бушмейстер, а ты не мог бы немного уменьшиться?

Бушмейстер послушался и уменьшился примерно вдвое.

- Так-с, - сказал Радикс Илюше, поглядывая на него немного иронически. - Вот что: возьми ножницы. Как ты думаешь, можно нашего друга Бушмейстера разрезать вдоль по самой серединке?

- Наверное, можно, - сказал не совсем уверенно Илюша.

- А что из этого получится?

- Ну... получатся... два Бушмейстера. Вот и все.

- И больше ничего?

Илюша задумался и посмотрел внимательно на Бушмейстера.

- Ах нет! - сказал он. - Не только... будет, конечно, два Бушмейстера, но они друг за друга зацепятся... ну, как кольца в цепочке.

- Та-ак-с... - протянул Радикс. - Давай попробуем!

Возьми-ка ножницы и разрежь его, беднягу, вдоль всего брюха, которое в то же время служит ему спиной. Посерединке. Как есть на свете головоногие существа, так и Бушмейстер есть существо спиннобрюхое. Ну-ка, режь!

Посмотрим, что он запоет.

Оказалось, что стекло, из которого был сделан Бушмейстер, прекрасно режется обыкновенными ножницами.

Илюша резал, держась самой середины ленты, добрался до того места, с которого начал резать, и сделал последнее движение ножницами. Разрезы сомкнулись. Илюша вскрикнул и отскочил в

сторону. На мгновение он испытал то же самое, что испытывает хорек, около которого мелькнут стальные челюсти капкана, или то, что испытывает водолаз, который глубоко под водой встретится внезапно со спрутом. Он глядел на то, что получилось, и глазам не верил. (А что получилось? Этого рассказать нельзя! Бери скорее ножницы и попробуй разрезать своего маленького бумажного Бушмейстера, как разрезал Илюша. И ты все узнаешь!)

- Ну? Как тебе это нравится? - спросил, улыбаясь, Радикс. - Ты, кажется, этого не ожидал?

- Нет, никак не ожидал.

Илюша обошел около того, что получилось из разрезанного Бушмейстера, постоял, подумал, а потом сказал:

- Теперь я, кажется, понимаю, почему Точке надо было его обойти два раза, чтобы попасть на старое место.

- Да, - сказал Радикс, - наш Бушмейстер до того лукав, что сразу не скажешь, что он выкинет.

- Какая хитрая штука! И я все-таки не совсем понял.

Я, кажется, догадываюсь, что так должно быть, но не могу объяснить, как это происходит и почему. Только ты не смейся.

- Так бывает, - отвечал Радикс, - и нередко. В этом нет ничего смешного. Но только этого еще мало. Надо все разобрать до конца и понять. Значит, ты за какую-то ниточку ухватился. А что это за ниточка? Где ее конец? Надо добиться, чтобы никаких сомнений не осталось.

- Я вот еще хотел что спросить: нельзя ли из Бушмейстера вырезать такую фигуру, чтобы опять получился Бушмейстер?

- Почему нельзя? Можно! Только в таком случае нужно действовать по-другому, - ответил Радикс. - Если ты хочешь вырезать из бумажного кружка другой кружок, поменьше, который, естественно, будет подобен первому, ведь ты не станешь резать первый кружок поперек, по диаметру?

- Ну конечно, нет! Что же это будет за подобие?

- А как же ты поступишь?

- Очень просто! Проколю кружок ножницами, а потом вырежу из серединки маленький кружок. Вот и все. Будет колечко и маленький кружок.

- Так... А теперь сообрази, как можно сделать нечто в том же роде и с нашим другом Бушмейстером.

Илюша задумался, стараясь сосредоточиться.

- Постой! - сказал он. - Ведь Бушмейстер очень похож на цилиндр, открытый снизу и сверху, то есть я хочу сказать, что Бушмейстер похож на цилиндрическую трубу. Но только один край у него перевернут на сто восемьдесят градусов.

Радикс кивнул.

- Если я у него отрежу край... Нет, так не выйдет! Если я буду отрезать у него край, это опять будет то же Самое, как если резать посерединке, только поближе к боку.

Никак не поймешь, как с ним быть! Если я отрежу у цилиндрической трубы край, то это будет опять цилиндрическая труба, только покороче.

А здесь так нельзя.

- А если ты отрежешь у твоей цилиндрической трубы еще другой край?

- Тогда будет три коротенькие трубы, вот и все.

- Хм... - неопределенно промычал Радикс.

Опять Илюша замолчал и задумался.

- Нет, - сказал он наконец, - надо попробовать разрезать Бушмейстера не один раз вдоль, а два раза, то есть разрезать его не надвое, как я пытался сделать, а натрое?

Я буду резать так, чтобы разрезы шли вдоль всего Бушмейстера параллельно, на равном расстоянии друг от друга.

И начну так, чтобы отрезать от него ровно треть его ширины.

- Попробуй.

Илюша подошел к Бушмейстеру и начал резать[12].

- 138 -

К удивлению Илюши, хотя он, по его расчету, уже отрезал один край, разрез не сомкнулся. Когда дело подошло к концу, Илюша последний раз нажал на ножницы и отскочил в сторону.

Бушмейстер метнулся своими петлями сразу во все стороны и неподвижно повис в воздухе.

Илюша подошел, посмотрел очень внимательно, потому что разобрать сразу, что вышло, было не так-то просто, а потом

воскликнул:

- Ура! Получился маленький Бушмейстер! Маленький Бушмейстер!

Илюша даже подпрыгнул от удовольствия.

- Но только он зацепился за свой собственный край. Как интересно!

Илюша долго ходил вокруг того, что у него получилось, а затем сказал:

- Слушай, Радикс, мне хочется еще одну штуку попробовать. Попроси его, чтобы он опять сложился.

Но Бушмейстер не заставил себя долго просить и через секунду снова уже висел в своей первозданной красоте.

- Я хочу его теперь разрезать так, как я резал первый раз, - промолвил Илюша. - А потом еще раз тем же способом. Я его делил на две части, потом на три, а теперь хочу поделить на четыре.

Илюша разрезал Бушмейстера надвое. Бушмейстер снова заплясал в воздухе, завинтившись петлями, а потом успокоился и повис неподвижно, по своему обыкновению.

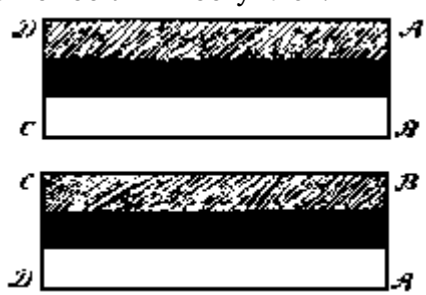
- Теперь-то я уж знаю, что будет! - сказал Илюша, принимаясь резать разрезанного надвое Бушмейстера снова вдоль, во второй раз. - Он теперь еще длиннее станет!

Когда Илюша кончил резать, причудливые петли Бушмейстера снова бурно заплясали в воздухе. А когда танец торжествующего Бушмейстера окончился, мальчик подошел и начал внимательно его рассматривать.

Оказалось, что хитрый Бушмейстер опять обманул Илюшу!

- Да как же это так выходит? - размышлял Илюша вслух.

- Ну, - сказал Радикс, - помоги ему, Бушмейстер! Что ж ты его мучаешь? Разве так с гостями поступают?



В ответ Бушмейстер возмущенно зашипел, точь-в-точь как шипит змея, и весь - заходил ходуном от негодования, но потом все-таки начал медленно прибирать свои петли. Через минуту он был целехонек.

Илюша подошел и заметил, что Бушмейстер несколько

изменился в цвете. Если смотреть на него сверху, то левая половина его ленты стала красной, а правая - синей. При этом Бушмейстер стал непрозрачным, а лента его стала потолще.

Илюша посмотрел, провел по Бушмейстеру пальцем и обнаружил, что если идти по красной полосе, то и придешь на красную, а если по синей - только и будешь ходить по синей.

Илюша снова взял ножницы и опять начал старательно резать Бушмейстера, ведя разрез как раз по границе между синей и красной половинками. Когда он кончил, Бушмейстер в полном восторге заплясал в воздухе, а потом опять успокоился. Мальчик начал внимательно разглядывать все его петли, которые так напугали его в первый раз.

Долго он рассматривал эти загадочные причуды Бушмейстера и вдруг воскликнул:

- А-а! Вот оно что! Да, действительно, он мне помог.

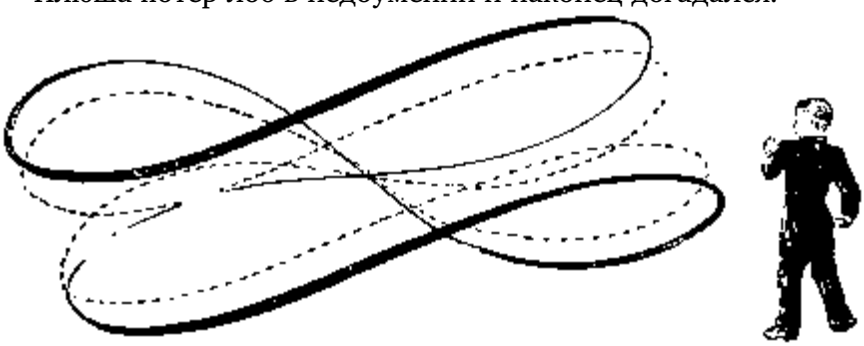
Спасибо тебе, Бушмейстер! Теперь мне понятно, в чем дело.

Он перестал быть односторонним.

Действительно, одна сторона разрезанного Бушмейстера была вся синяя, а другая - вся красная. Правда, сразу это было очень трудно заметить из-за сложных петель, но когда Илюша провел по красной стороне пальцем, он убедился, что так действительно и есть.

- Но все-таки, - опять запутался мальчик, - почему же он удваивается, если резать еще раз?

Илюша потер лоб в недоумении и наконец догадался.



- Ну да, - медленно произнес он, - значит, когда его разрежешь, он превращается в цилиндрическую трубу, только перекрученную, потому что у него теперь две стороны. А если разрезать трубу, то, конечно, получится две трубы. Теперь ясно. Я прямо замучился с этим Бушмейстером!

- А почему же он превращается в цилиндрическую трубу? - спросил Радикс.

- Потому что ведь у Бушмейстера один край, или, скажем, ребро...

- Верней сказать, - поправил его Радикс, - у него один берег. А если ты его разрезаешь и твой разрез смыкается, то, следовательно, ты прибавляешь ему еще берег. И тогда он перестает быть односторонним.

Бушмейстер снова свернулся по-старому. И опять стал прозрачным и тонким.

- Ну, теперь, - удовлетворенно произнес Илюша, - я попробую разрезать его вдоль на пять частей. И теперь я уж уверен, что он утроится. И две его части будут двусторонними, а третья будет маленький Бушмейстер.

И Бушмейстер и Радикс оба промолчали. Мальчик взял снова ножницы и опять принялся за свою хоть и не трудную, но зато полную всяких неожиданностей работу.

Наконец он кончил. Бушмейстер плясал на этот раз даже дважды. Илюша с удовлетворением посмотрел на то, что у него получилось после того, как Бушмейстер отплясал второй раз, и убедился, что все так и вышло, как он решил заранее.

- Молодцом! - сказал Радикс. - Ты рассудил правильно.

Бушмейстер страшно зашипел, потом громоподобно захохотал, сложился еще раз по-старому и мгновенно исчез.

- Счастье твое, - сказал Радикс, - что он был сегодня в таком хорошем настроении и был до того любезен, что окрасился даже в разные цвета.

- Да, - подхватил Илюша, - без этого я бы никогда не догадался.

- Это только для тебя, - наставительно произнес Радикс, - а то его нипочем не упросишь. Дело в том, что в самой своей сущности он ведь пленка, вроде мыльного пузыря.

И в этом-то вся его сила. А это уж только для того, чтобы ты догадался, что происходит, когда его режешь[13]. Мы уже упоминали в Схолии Пятой о топологии. Теперь я могу тебе еще сказать, что наш Бушмейстер имеет к этой науке касательство самое непосредственное. Знай, что наука эта весьма была обогащена трудами советских топологов, из числа которых следует назвать П. С. Александрова, Л. С. Понтрягина и П. С. Урысона.

- Только вот еще что, - не совсем уверенно начал Илюша (видно было, что Бушмейстер сильно озадачил его и не выходил у него из головы). - Разве нельзя все-таки как-нибудь из Бушмейстера вырезать двух Бушмейстеров?

Радикс снопа подал Илюше маленького бумажного Бушмейстера, которого они склеили в начале разговора.

- Посмотри, - сказал он, - внимательно. Если мы начнем

делать его ленту все шире и шире, то, как ты думаешь, что из этого получится?

- Очень скоро придется остановиться, потому что изгиб мешает расширять ленту.

- Другими словами, - продолжал- Радикс, - если мы будем расширять ленту, то Бушмейстер пересечет самого себя.

Не так ли?

Илюша не мог не согласиться с этим.

- Скажи, пожалуйста, - начал снова Радикс, - ты помнишь арабскую сказку о том, как один рыбак закинул однажды сеть в море и вытащил мертвого осла, а затем судьба послала ему кувшин, набитый песком, а на третий раз - бутылку, запечатанную волшебной печатью Сулеймана, и когда он ее откупорил, из нее пошел дым до самых облаков, который превратился в грозного джинна?

- Ну еще бы! - сказал Илюша. - Я даже в кино эту сказку видел.

- А бутылку ты видел?

- Видел. Бутылка самая обыкновенная. А вот джинн, когда он вылез...

- Да нет! - сказал Радикс. - Ты, верно, не разглядел. В том-то вся сила, что эта бутылка не совсем обыкновенная. Вот она! Пожалуйста, посмотри.

- 142 -

Илюша обернулся и увидел, что на столе стоит очень красивая бутылка прозрачного лилового стекла, самой странной формы. Сперва Илюше даже показалось, что это кувшин, но, посмотрев внимательней, он заметил, что ручка этого "кувшина" была наглухо приделана к его горлышку, так что отверстия, при помощи которого бутылку наполняют жидкостью или выливают из нес жидкость, в этой бутылке не было. Между тем внутри бутылки что-то находилось. Илюша осторожно взял бутылку (вот она нарисована на картинке, смотри!), перевернул ее вверх дном и обнаружил, что в донышке бутылки находится отверстие и в него вставлена довольно широкая пробка, а на ней печать с каким-то таинственным знаком. (И печать нарисована, погляди!)

- Вот так бутылка! - невольно произнес Илюша, рассматривая печать. - А можно ее открыть?

- Сделай милость, открывай.

Илюша осторожно ухватился за выступавший немного краешек пробки. Оказалось, что, несмотря на таинственную печать, пробку очень легко вынуть. Но когда он вытащил пробку, за ней потянулось что-то еще, что напомнило Илюше паука.

- Фу! - сказал Илюша, бросив пробку на стол. - Тут уж пауки

завелись!

Однако то, что он бросил на стол, вдруг встало на свои паучьи ножки и оказалось крохотным колченогим человечком, который очень недовольно пробормотал сквозь зубы:

- Разрешите представиться: Салуникур Салуникурыч Салуникуриади. Нельзя сказать, чтобы вы были очень вежливы!

Илюша удивленно взглянул на человечка. Оказывается, пробка была его головой, а таинственная печать - его странным личиком.

- Извините, - растерянно пробормотал Илюша, - я не знал...

- Так что же вам, собственно, от меня угодно? - недовольно спросил Салуникур Салуникурыч.

- Я, - произнес Илюша, кинув взгляд на совершенно равнодушную мину Радикса, - просто хотел посмотреть, что это за бутылка.

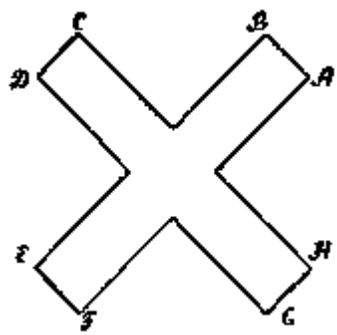
- Самая обыкновенная волшебная бутылка джинна, - еще более недовольно произнес колченогий карлик. - Ну, а поскольку джинны теперь повывелись, в ней живу я. Бутылка как бутылка.

Но с этим Илюша не мог согласиться. Он заметил, что отверстие, из которого он вытащил Салуникура Салуникурыча, сужается воронкой, уходя в глубь бутылки, а потом сворачивает куда-то вбок.

- Престранная бутылка! - вымолвил наконец Илюша.

А как же вы в нее влезаете?

- Могу вам показать, - сердито произнес необыкновенный человечек.



Илюша держал бутылку вверх дном. Человечек быстро прыгнул со стола и попал как раз на край ее донышка. Засим он взмахнул ручонками, принял позу пловца, который собирается прыгнуть в воду, протянул руки вперед, прыгнул, попал как раз в воронку, а затем начал углубляться дальше.

При этом он вытянулся и стал похож на червяка. Илюша поспешно приподнял бутылку и стал смотреть на свет. Червеобразный человечек добрался до самой стенки бутылки по

трубке, которая шла вбок от воронки, а потом попал во внутренность ручки и по ней стал спускаться вниз. По ручке он добрался до горлышка бутылки, там он выпрямился и оттуда раскланялся с Илюшей. Илюша положил бутылку набок в ожидании, что же будет дальше. Человечек обошел всю свою бутылку и снова через горлышко и ручку вылез вон. Затем он быстро прополз по внешней стороне бутылки, снова дошел до донышка, опять влез в бутылку, опять через внутренность ручки добрался до внутренности бутылки, а потом снова выбрался вон, как и в первый раз.

- Ах! - воскликнул Илюша. - У вашего жилища, значит, тоже только одна сторона, как у Бушмейстера?

- Вот потому-то, - медленно и раздельно произнес Радикс, - она и пересекает самое себя. То есть эта ручка, которая ведь есть не что иное, как горлышко бутылки, проникает внутрь ее и смыкается с ее отверстием снизу, изнутри! Вот как хитро!

- Замечательно! - воскликнул Илюша. - Но я сразу не догадался!

- И поэтому-то, - продолжал Радикс, - если ты ее теперь разрежешь надвое, так, чтобы разрез проходил как раз вдоль всей ручки, ты получишь две плоскости, которые будут очень похожи на Бушмейстера.

Илюша поглядел на чудесную бутылку, а потом на личико колченогого карлика. Затем он взглянул на донышко бутылки А увидел, что вокруг отверстия написано странное слово "Салуникур".

- О! - весело сказал Илюша. - Вот тут какая штука!

Если начать читать с буквы "у" (посмотри на картинку на странице 142), то выйдет Уникурсал... Опять циклическая перестановка! Да! Да! Вы, наверное, знаете Уникурсала Уникурсалыча?

- 144 -

- Это мой троюродный дедушка, - ответил человечек. - Как не знать!

- Позвольте-ка, - весело сказал Илюша, - рассмотреть ваше личико.

И, посмотрев, Илюша быстро убедился, что на таинственной печати джинна нарисована уникурсальная фигура, потому что все узлы ее четные.

- А вот, - добавил Радикс, - тебе еще одна фигурка (см. чертеж на стр. 144). Надо ее склеить так, чтобы совпали точки A и E, B и F, C и G, D и H. Попробуй-ка!

- 145 -

Схолия Девятая,

из которой на миг показывается страшное древнее чудовище, но в это время нашим друзьям приходится выводить из большого затруднения одного беспамятного краснобая, впавшего в полное отчаяние после того, как он увидал самое обыкновенное колесо. Из чувства признательности сей последний сообщает Илюше несколько новых и очень удобных способов сокращения дробей. Непонятливость Илюши приводит его в великое негодование, и он пытается поправить дело назидательной легендой о том, как одного живого слона разделили на три части к полному удовольствию не только делителя, но даже делимого и частного. Естественно, что в силу этого он узнает еще более поучительную историю царевича Аритамвары, который питал непреодолимое отвращение к небесным светилам, по-видимому путая их с кубическими корнями. Нелишним, однако, будет заметить, что именно в этой увлекательной схолии с полной необходимостью и достаточной убедительностью выясняется, чего именно недоставало в рассуждениях не слишком догадливого юноши, который не мог разобрать крайне важный вопрос об изумрудно-золотистом плаще, о доблестной шпаге и о пресловутом, многоученом городе Саламанке.

- Так, - сказал Илюша. - Ну, теперь я, кажется, кое-что разобрал. Не то чтобы совсем, а все-таки! Конечно, я бы без тебя здесь пропал. Самому бы нипочем не додуматься. Ну, Дразнилка - это еще туда-сюда! А остальное уж очень хитро.

- 146 -

Очень... Слушай-ка, а когда же ты мне расскажешь, кто такой был Бриарей?

- Бриарей? - повторил Радикс, немного понизив голос. - Это, по-видимому, был неглупый дядя, если судить по тому, что у него было пятьдесят голов...

- Пятьдесят? - переспросил Илюша, решив, что Радикс смеется над ним.

- Именно пятьдесят! Он один представлял собой целую академию, и, кроме того, с ним связываться но стоило еще и потому, что у него было сто рук.

- Как - сто рук?

- Ну, а как же иначе? На каждую голову две руки! Самое простое умножение. Это, видишь ли, относится еще к тем стародавним временам, когда существовали те сказки, которые

называются мифами, и люди верили им.

Но в эту минуту совсем рядом раздались такие пронзительные, протяжные и горькие вздохи, что Радикс остановился и посмотрел в ту сторону.

Перед ними стоял Уникурсал Уникурсалыч, и на его личике было написано полное уныние.

- Я, - произнес Командор Ордена Семи Мостов, ломая руки, - в полнейшем отчаянии... я...

- Надеюсь, - прервал его обеспокоенный Радикс, - ты не собираешься произнести перед нами речь?

- О черствые сердца! - отвечал Доктор Четных и Нечетных Узлов. - Я пришел за утешением и не собираюсь произносить речь. Но я сочинил речь, полную удивительных цветов красноречия. И вот она-то и привела меня в отчаяние...

- Хорошо, что только тебя! - пробормотал Радикс.

- О пресветлая богиня Лилавати! - воскликнул Магистр Деревьев. - Не перебивай меня, неблагодарное чудовище, а выслушай своего собрата, попавшего в беду.

- В чем же дело? - нерешительно спросил Илюша.

- В том, - произнес похудевший от огорчения Уникурсал Уникурсалыч, - что я сочинил замечательную речь. Она была посвящена... Чему это она была посвящена? .. Вот не могу припомнить! Впрочем, не в этом дело... Речь была обдумана, переписана. Мало этого, все было в замечательном порядке, то есть, во-первых, каждое слово из моей замечательной речи состояло из одиннадцати букв. Затем в каждой строке было тринадцать слов. Наконец, на странице было тридцать семь строк. Возможно, что это было несчастное число.

- А встретил ли ты хоть одно счастливое число? - спросил Радикс.

- 147 -

- Где там! - отвечал, опустив голову, Кандидат Тупиковых Наук. - Слушай, что было дальше. Я обдумывал эту речь три дня. Я ее переписывал трижды. Я произнес ее трояко, то есть три раза по-разному, в смысле выражения, логических ударений, ораторских жестов и соответственного выражения лица...

- А перед кем же ты ее произносил?

- Перед зеркалом, - отвечал, горестно вздыхая, командор. - Это-то, может быть, и была моя главная ошибка, но дело в том, что я никого не мог застать дома...

- Еще бы! - опасливо вставил Радикс.

- Но опять-таки не в этом дело. Скажи мне, пожалуйста, сколько же это выйдет, если у меня в каждом слове одиннадцать букв, в строке тринадцать слов, на странице тридцать семь строк,

а я обдумывал ее три дня, переписывал трижды и произнес вслух трояко?

- Что выйдет? - изумленно воскликнул Илюша, не веря ушам своим.

- Всего! - воскликнул в отчаянии Уникурсал Уникурсалыч.

- Я думаю, - сказал после краткого размышления Радикс, - что он хочет уверить нас, что обдумывал каждую букву. И теперь, по-видимому, спрашивает, сколько всего различных операций было произведено над каждой буквой.

- Дай мне руку! - вскричал магистр. - Ты угадал!

Илюша взял мел и перемножил 27 • 11 • 13 • 37. Вышло 142857.

Уникурсал Уникурсалыч горестно взглянул на Илюшин результат.

- Вот именно. И у меня то же самое получилось.

- Ну, так в чем же дело? - спросил Илюша. - Чем же вы так огорчаетесь?

- Дело в том, - начал снова замогильным голосом командор, - что я имел в виду напечатать ее, дабы всякий мог прочесть эту речь, трактующую о значении... Вот не могу только вспомнить, о значении чего там говорилось!.. Я решил сперва напечатать ее в трех экземплярах, ибо я обдумывал ее три дня, переписывал трижды и произносил трояко. Но мне показалось, что, пожалуй, это будет слишком однообразно, и я отнял от этого числа единицу. Но когда у меня таким образом получилось два экземпляра, я подумал, что самое умное - перемножить два и три, и вышло шесть экземпляров. Потом я рассудил, что ведь можно поступить и проще, то есть умножить два на два, и тогда получается четыре экземпляра.

Затем я добавил к получившейся цифре для красоты единицу, и вышло пять экземпляров. Но тут я догадался, что все это было неправильно, а на самом деле надо возвести два в третью степень. И я решил напечатать восемь экземпляров.

И вот только тут я сообразил, что молено поступить гораздо умнее, другими словами - умножить три на три, так как девять, несомненно, будет самым подходящим числом экземпляров, ибо ведь девять - это трижды три, а я обдумывал мою речь три дня, переписывал ее трижды и произносил трояко, как это я вам только что повторил в четвертый раз и, по-видимому, опять без всякого толку!.. Когда же я дошел до девяти, то тут мне стало ясно, что десять гораздо более круглое число.

Тогда я не понял, какое это было страшное предзнаменование! .. Вы сейчас и сами увидите, до какой бездны

отчаяния может довести человека круглое число! Однако мне что-то шепнуло, что это очень опасно, и я из осторожности решил добавить к десяти единицу, просто для симметрии. Когда же я это сделал, то из-за какого-то неопределенного опасения решил еще удвоить это число, а для красоты добавить еще единицу. Однако, когда я сосчитал, сколько раз менял решение, оказалось, десять раз, а так как круглое число внушало мне смутный ужас, то я решил отнять у последнего числа единицу, потом умножить его на четыре, а затем снова добавить для красоты единицу...

Тут Уникурсал Уникурсалыч остановился, вытер пот со своего измученного столь сложными расчетами чела и еле вымолвил:

- Уф, прямо замучился! Так вот, весь вопрос заключается в том, сколько же теперь должно получиться...

- Понять все равно ничего не возможно, - сказал Радикс. - Его загадочная речь состоит из одних "отчего" и "почему", а о том, "что" здесь имеется в виду, он ни словом не упоминает, поэтому не стоит и голову ломать. В общем, он хочет умножить сто сорок две тысячи восемьсот пятьдесят семь еще на что-то. Попробуем понять хоть это.

- Не на "что-то", а на множители -

3, 2, 6, 4, 5, 8, 9, 10,11, 23 и 89. И всё!

- Что же тут трудного? - спросил Илюша.

- Трудного ничего нет. Но самое ужасное заключается в том, что на что ни множь это проклятое число, получается все то же самое. В нем есть какой-то центр. Какой? Не могу понять. И вот вокруг него-то это заколдованное число и вертится, как колесо!

Тут Уникурсал Уникурсалыч на минутку выскочил и быстро прикатил здоровенное колесо, на котором было написано злополучное число.

Против начальной единицы командор поставил на стене мелом крестик.

- О ты, очаровательный отрок, постигший таинства умножения! Ну-ка, давай умножать.

- 149 -

Илюша начал множить 142 857 на три. Получилось 428 571.

Командор повернул влево свое колесо на одну цифру. Действительно, против крестика теперь стояла четверка, а все остальное шло тем же порядком.

Илюша посмотрел недоуменно на колесо и начал множить на два. Вышло 285 714. Командор передвинул колесо еще на одну цифру. И опять дальше все пошло в том же порядке.

Илюша помножил на шесть. Вышло 857142. Колесо подвинулось еще на одну цифру. Помножили на четыре.

Получилось 571428. Колесо снова повернулось на одну цифру.

Помножили на пять. Вышло 714 285.

- Видишь! - вскричал, вытаращив глаза, Уникурсал Уникурсалыч. - Разве это число? Ты множишь, стараешься, обливаешься потом, а оно вертится да вертится!

- Ну, дальше ему уже вертеться некуда, - заметил Илюша.

- Как бы не так! Ты посмотри, что дальше будет.

Илюша умножил на восемь. Вышло 1142 856.

- Ну, - сказал магистр, - возьми эту лишнюю единицу, которая торчит спереди, и прибавь к последней цифре.

Илюша прибавил, и вышло опять 142857.

- Теперь на девять, - потребовал командор.

Умножили на девять. Получилось 1285713. А когда первую единицу прибавили к последней цифре, вышло 285714.

- Та же самая история, что с двойкой! - сокрушенно сказал командор.

Умножили на десять. Вышло 1428570. А когда прибавили сзади первую единицу, то снова получилось 428571, как было с тройкой. Умножили на одиннадцать. Получилось 1571427.

Опять прибавили переднюю единицу к последней цифре, получилось 571428, как с четверкой. Когда умножили на двадцать три, вышло 3285711, но когда переднюю тройку прибавили к последней цифре, опять вышло 285714, как с двойкой.

Умножили на восемьдесят девять, получилось 12741273.

А когда 12 взяли спереди и прибавили обычным образом к тому, что осталось, вышло 741 285.

- Ну вот, - сказал Илюша, - теперь уже не то.

- Невелика разница! - мрачно ответил магистр. - Только дне цифры перескочили. А в остальном все то же самое.

Илюша начал внимательно осматривать умножения. Все было верно.

- В чем тут дело? Можешь ты выяснить, есть у этой нелепой штуки если не смысл, то по крайней мере хоть начало?

- По-видимому, - сказал неторопливо Илюша, - здесь получается тоже циклическая перестановка.

- Что?! - произнес словно насмерть перепуганный командор. - Что за чудные речи достигли моего скромного слуха?

Илюша посмотрел на него. Командор стоял подбоченясь, высоко задрав голову. Он мгновенно исцелился от своего отчаяния и обрел снова прекрасное настроение.

- Какая прелесть! - сказал он. - Вот какой замечательный юноша! И как остроумно - назвать это мое убогое, нескладное колесо... циклом! И моя бедная речь... О чем я там писал? Ах,

вспомнил! О способах произношения цикловидных слов. Как раз!

Илюша беспомощно оглянулся на Радикса, но, кроме равнодушия, на его личике абсолютно ничего нельзя было прочесть.

А доктор продолжал:

- В жизнь мою не слыхал я ничего столь ученого. А скажите, великий победитель Бушмейстера, к чему вы изволили произнести эти таинственные слова? Даже в допущении, что вы правы, что из этого следует?

Но Илюша стоял красный как рак и молчал как рыба.

Увы, он не знал, что отвечать! Перестановка была, конечно, циклическая, это верно, но почему? Об этом-то Илюша не мог ничего сказать. И, в общем, получилось, что Уникурсал Уникурсалыч прав: произнести эти слова Илюша сумел, а объяснить, что хотел сказать, не мог. Мальчик решил не сдаваться.

- 151 -

Поэтому стал снова рассматривать все свои умножения: на два, на три, на четыре, на пять, на шесть... Так. А на семь?

Нет, на семь он не множил. По-видимому, Кандидат Тупиковых Наук не заставлял его множить на семь. А ну-ка попробуем! Илюша умножил 142 857 на семь и получил 999 999.

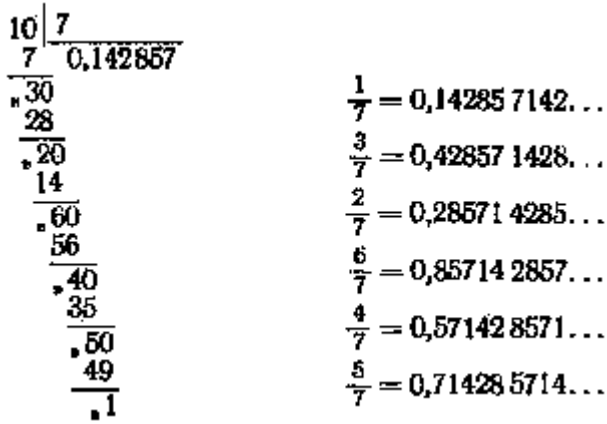
"Вот странная история! - подумал он. - Все цифры давали один и тот же фокус, а если на семь помножить, получается совсем не то..."

Илюша снова начал внимательно осматривать результаты своих умножений и обратил внимание на то, что если написать число два раза подряд, то есть 142 857142 857, то при умножении на семь получится не шесть, а уже двенадцать девяток, и, следовательно, повторяя этот порядок цифр, можно получить умножением на семь любое число девяток... Что же это значит? Илюша обратил внимание на то, что получалось при умножении на два и на одиннадцать. Мальчик вдруг храбро схватил мел и написал:

```
1571427
* 2
--------
3142854
```

В это время Радикс пробормотал себе под нос очень неразборчиво: "Слюнки капали с усов..." Тут Илюша воодушевился и начал делить единицу на семь. Как он и ожидал, получил в результате 0,142857142857... При этом он заметил, что остатки

шли следующим образом: 3, затем 2, потом 6, вслед за этим 4 и, наконец, 5, что и объяснило всю загадку командорского колеса. И он написал рядом с делением еще столбик цифр:



- 152 -

Илюша обернулся и увидел, что Уникурсал Уникурсалыч смотрит так, будто потерял всякий интерес к проблеме колеса.

- Это одна седьмая, - сказал Илюша, - вот и все. Цикл в данном случае - это период дроби. А множители вы называли в том порядке, в котором идут остатки при делении, чтобы ваше колесо после каждого умножения поворачивалось как раз на одну цифру.

- Одна седьмая! Одна седьмая! - сердито повторил Уникурсал Уникурсалыч. - А что, если я возьму колесообразное число и разделю его пополам, по три цифры в каждой половинке. У меня будут теперь два числа - 142 и 857.

Если я их сложу, то получу 999. Могу разбить и на три: 14, потом 28 и 57. Сложу и получаю снова 99. А это что означает?

Илюша внимательно посмотрел на свою табличку и ответил:

- Если я возьму 0,142, то это будет одна седьмая с точностью до одной тысячной, а если возьму 0,857, это будет шесть седьмых с той же точностью. Если их сложить, будет семь седьмых, то есть единица. Так как мои дроби не очень точные, то я получаю вместо единицы 0,999. То же и с тремя числами.

- А зачем ты множил 1 571427 на два?- спросил Радикс.

- Потому что мне показалось, что это похоже на половину архимедова числа. Я перемножил, получил 3,14 с лишним, и тут-то я убедился, что это одна седьмая[14].

- 153 -

- А кстати, скажи, умеешь ли ты сокращать дроби? Сократи шестнадцать шестьдесят четвертых.

Илюша пожал плечами, написал дробь, сократил ее на четыре, потом еще раз на четыре. Вышла одна четвертая.

- Какая невероятная канитель! - сказал с отвращением командор. - Выспаться можно, покуда ты тут возился. Вот, как я сокращаю.

Командор взял мел и написал:

16 / 64 =

... и вычеркнул шестерки...

= 1 / 4

- Это случайно так у вас вышло, - ответил Илюша.

- Как это случайно? - возопил командор. - Пожалуйста!

И он написал следующее равенство:

19 / 95 =

... а теперь девятки ...

= 1 / 5

А затем еще и еще:

29 / 95 = 2 / 5; 49 / 98 = 4 /8

- А тут уж не вышло, - сказал Илюша. - Еще можно сократить.

- Неважно! - воскликнул Командор Ордена Семи Мостов. - Это не может опорочить самый принцип моего способа. Например, до сих пор ты полагал, что число "сорок девять" можно разбить лишь на две семерки, а я доказал последним примером, что это просто предрассудок.

- Семерки - это множители, - ответил Илюша, - а девятка - одно из слагаемых.

- Так вот в том-то и дело! Ты должен слушать и внимать, а не тараторить как сорока.

Илюша совсем уж готов был ему ответить, что если кто-нибудь и тараторит, то, во всяком случае, не он, но решил, что лучше не стоит злить эту ехидную личность, и промолчал.

- Я уверен, - продолжал Магистр Деревьев, - что ты вполне способен оценить необыкновенные преимущества моего способа, ибо ты только что доказал мне поразительную быстроту твоего ума, сразу заметив, что дробь четыре восьмых относится к классу сокращаемых дробей.

Подумайте только, какая ученость в столь нежном возрасте! Догадаться самому, безо всякой посторонней помощи, что восемь делится на четыре! Великолепно! Мы выхлопочем тебе орден не Семи Мостов, а Семидесяти Семи Слонов и Пятидесяти Пяти Ослов!

Я потом расскажу тебе историю этого необыкновенного ордена, который довольно легко получить, но от которого потом не так-то просто отвязаться...

- Что это еще за история о слонах и ослах? - мрачно спросил Радикс.

- Очень поучительная история, - с готовностью отвечал командор. - Дело было очень давно, во времена Великого Могола, царство коего отличалось необыкновенной пышностью.

Некогда к драгоценному дворцу Великого Могола подъехали три прекрасных принца из дальней страны. Когда они были допущены перед очи повелителя Вселенной (таков был титул этого могущественного властителя), старшин принц попросил позволения говорить и сказал так: "О владыка владык, ты, перед которым дрожит подлунная, преклони слух твой к нашему горю! Наш отец, повелитель Высокой области, над которой парят облака (да будет благословенна память его!), соизволил покинуть сей бренный мир и оставил нам богатое наследство.

Но в стране у нас нет такого человека, который помог бы нам разделить эти богатства так, чтобы воля отца нашего, как требуют обычаи нашей страны, была исполнена слово в слово, и поделить так, чтобы люди не смеялись над нами". Повелитель Вселенной спросил их, каково наследство. Старший принц отвечал, что самая трудная часть наследства заключает в себе семьдесят семь могучих слонов, гордость и украшение их прекрасной страны, над которой парят облака.

Отец же их повелел, чтобы старший сын взял себе треть всех слонов, средний - одну шестую, а младший - одну двенадцатую.

- 155 -

Однако никто в их великой, прекрасной стране не может решить, как исполнить это странное повеление, ибо для того, чтобы взять от семидесяти семи слонов одну треть, следует взять двадцать пять слонов и еще две трети слона, но от живого слона невозможно отделить две трети, без того чтобы прекрасное это животное не превратилось в бездыханную тушу, тогда как о тушах в завещании почему-то ничего не сказано. Надо сказать, что некоторые вельможи Великого Могола, стоявшие у трона своего повелителя, при этих словах начали как-то странно отворачиваться в сторону, будто чем-то поперхнулись. В эту минуту мальчик, который держал павлинье опахало над головой повелителя Вселенной, опасаясь, как бы сей грозный владыка не приказал внезапно отделить некоторую часть от каждого из гостей для скорейшего разрешения этой трудной задачи, попросил слова и сказал так:

"Если повелитель Вселенной даст мне на две недели пятьдесят пять царских ослов, то я поделю наследников без обиды и вернусь с пятьюдесятью пятью царскими ослами обратно". Великий Могол поглядел на мальчика и опустил свои царские веки в знак согласия... Когда они прибыли с пятьюдесятью пятью ослами в дальнюю страну, над которой парят облака, Помаватель

царского опахала поставил на большой площади столицы в ряд сперва семьдесят семь слонов, которые были причиной этого беспримерного смятения умов в дальней стране, а потом пятьдесят пять царских ослов, которые пришли с ним. Слоны стояли слева, а ослы справа. "Вот, - сказал Помаватель опахала, - здесь перед вами стоят сто тридцать два прекрасных животных. Треть их составляет сорок четыре. Они пойдут старшему принцу. Начнем слева". И тотчас же погонщики слонов подняли свои бодила, и сорок четыре слона ушли с площади.

- 156 -

А мальчик продолжал: "Одна шестая часть ста тридцати двух животных есть двадцать два, и они пойдут среднему принцу".

И двадцать два слона тоже ушли с площади. "А младшему принцу полагается одна двенадцатая, и это будет одиннадцать животных". И последние одиннадцать слонов ушли с площади. "А теперь, - сказал в заключение юный Помаватель, - все видят, что здесь остались только пятьдесят пять ослов, которые и пойдут со мной обратно, ибо мне сдается, что ослов в вашей стране имеется и без того достаточное количество".

Вот какова эта поучительная история. В ее честь и был учрежден этот чудный орден, который ты, разумеется, вполне заслужил...

Илюша хотел было сказать, что это совершенно детская задачка: стоит только привести эти дроби к одному знаменателю и... но, опасаясь выслушать еще одну похвальную речь своему глубокомыслию, вздохнул и прикусил язык.

- Надо тебе пояснить, - продолжал командор, - что на лицевой стороне этого ордена изображены две трети слона, мирно пасущиеся на травке, причем эта правдивая картинка окружена павлиньими перьями, а на обратной стороне изображено доброе личико скромного ослика, который...

- Фу! - вздохнул почти в изнеможении Радикс.

- Итак, - вымолвил, покосившись на него и переведя дух, неутомимый командор, - я не стану уверять тебя, любезный друг, что ты заслужил это отличие, ты и сам, полагаю, не станешь с этим спорить... Но вернемся к моему удивительному изобретению: самый важный пункт его заключается в том, что оно доказывает, что можно сокращать слагаемые...

- Как это так? - не выдержал Илюша. - Из-под знака суммы нельзя сокращать!

- Заблуждение! - возопил Доктор Четных и Нечетных Узлов. - Глубочайшее заблуждение! И я сейчас тебе это докажу. По-твоему, значит, такое вот выражение нельзя сократить:

(a + bc) / (a + b)

- 157 -

- Конечно, нельзя, - отвечал немедля Илюша. - Что тут сокращать!

- А я сейчас тебе докажу, что поскольку это вполне возможно, то я вправе написать:

(a + bc) / (a + b) = (a + c) / a

- Чепуха, и больше ничего! - пробормотал Илюша.

- А я сейчас тебе докажу, что это не чепуха. Подставляю в эти выражения числа и получаю:

(6 + **2**•3) / (6 + **2**) = (6 + 3) / 6 = 3/2

А коли тебе этого мало, я могу подставить и другие числа.

Пожалуйста:

(2 + **3**•6) / (2 + **3**) = (2 + 6) / 2 = 4

Вот тебе и все. Просто и ясно. В первом случае сокращаю двойки, во втором - тройки. Совершенно новые горизонты в арифметике! Ну, что же ты на это скажешь, будущий кавалер Ордена Семидесяти Семи Слонов?

- Ну, что тут говорить! - возразил мальчик.

- Как что говорить? Ты оспариваешь мой метод, но ты не можешь оспорить мои бесподобные примеры! Однако в таком случае докажи: каким образом случилось, что примеры мои не противоречат твоей старушечьей арифметике, а мои удивительные принципы находятся с ней в непримиримом противоречии?

Илюша постоял, подумал, поглядел искоса на ехидное личико командора и неуверенно произнес:

- Ну, это вроде того, как доказывается, что два равняется пяти или что-нибудь в этом роде.

- Два равняется пяти?- изумленно повторил командор - В первый раз в жизни слышу! Это неверно. А вот, что одиннадцать равняется двенадцати, - это уж точно.

- Как так? - спросил Илюша, вдруг вспомнив с досадой, что он уже слышал от Радикса что-то про это нелепое равенство.

- 158 -

- Чрезвычайно просто! Чтобы доказать эту несомненную истину, я беру квадраты этих чисел, то есть 121 и 144, затем беру их разность, которая будет 23, и составляю следующее простенькое равенство:

144-121 = 276 - 253,

с которым ты, надеюсь, спорить не будешь. Затем я вычитаю из каждой его части по 155, от чего справедливость равенства не нарушается:

144 - 121 - 155 = 276 - 155 - 253,

делаю частично указанные действия и получаю:

144 - 276 = 121-253.

Затем я прибавляю к каждой части получившегося равенства одну и ту же дробь, что опять-таки не нарушит справедливости моего равенства:

144 - 276 + 529/4 = 121 - 253 + 529/4.

Далее я замечаю, что теперь и левая и правая части равенства представляют собой полные квадраты, а следовательно, я могу написать:

$(12 – 23/2)^2 = (11-23/2)^2$

Теперь я извлекаю квадратный корень из обеих частей равенства:

12 – 23/2 = 11-23/2

Минус двадцать три вторых слева и справа взаимно уничтожаются, и мы получаем...

Командор снова схватил мел и написал громадными цифрами:

11 = 12

- Что и требовалось доказать. Просто и ясно!

Хотя Илюша уже сообразил, что спорить с командором довольно накладно, ибо каждое лишнее возражение ведет только к тому, что он тебе подсовывает еще новую головоломку, однако тут он догадался наконец, что надо не просто отрицать, а доказать, и всерьез, что командорские россказни просто враки. Он внимательно просмотрел весь ход вычислений этого "доказательства" и сказал:

- Так можно доказать все, что хочешь. А в скобках у вас разные знаки! Вот и вся хитрость. Очень просто.

- Хм... - произнес разочарованно командор, - знаки!

Знаки! Подумаешь, какая важность! Ну, допустим, что знаки. .. Ну, а как же насчет моих дробей?

Илюша вздохнул и уставился снова на командорские дроби.

Наверно, он стоял так молча, не отрывая глаз от них, минут десять. Потом сказал:

- Конечно, это можно сделать. Если записать вот этот первый пример с дробью – 16/64, положив, что шесть равняется a, тогда как четыре равняется b, то получим:

(10 + a)/(10a + b) = 1/b

А теперь я буду действовать так:

10b + ab = 10a + b;

9b = 10a - ab;

9b = a(10 - b),

и следовательно,

a = 9b / (10 - b)

и теперь получается неопределенное уравнение. Не очень, конечно, удобное уравнение, потому что оно второй степени, но все-таки решить в целых числах можно. В крайнем случае, я буду подставлять цифру за цифрой вместо b, пока a не получится целым числом, не больше девяти. Вот вы это и сделали. И все остальное тоже делается совершенно так же. Вот и все.

- Хм... - протянул Уникурсал Уникурсалыч. - Вот как! Странная история!

- 160 -

- Я знаю гораздо более странную историю, - возразил Радикс, - которая касается того, каких блестящих результатов можно добиться с помощью красноречия.

- Это, наверно, очень интересная история! - воскликнул Илюша, у которого отлегло от сердца, когда он смекнул, что, кажется, на этот раз отделался от командорских ехидств. - Расскажи-ка ее, пожалуйста!

- Дело это тоже происходило довольно давно, - начал Радикс, - и, может быть, это было в той самой стране, о которой нам только что рассказывал Уникурсал Уникурсалыч.

Но только это было еще несколькими веками раньше, чем история со слонами. Итак, некогда прекрасный и светлый юноша, царевич Аритамвара, сын света и радость мира, захотел ввести в дом свой юную жену. Он пришел к отцу своему, который владел подлунным миром и кротко управлял им.

"О царь и повелитель! - сказал царевич. - Я хочу ввести в дом мой молодую и прекрасную царевну, дабы она была супругой моей". - "Хорошо, - отвечал ему царь, - пусть дворцовые женщины введут девушек, и пусть придет наш царский звездочет, владеющий числами: он даст нам добрый совет". Когда все повеления были исполнены, царь сказал:

"Пусть владеющий числами даст нам совет". - "О царь, - отвечал ему мудрец, - пусть будет так: я задам семи девушкам один и тот же простой вопрос, а по их ответам ты, покровитель мудрейших, и ты, благородный Аритамвара, сын света, вы сами увидите, как надобно будет поступить". - "Это поистине мудрые речи, - ответил царь звездочету. - Да будет так". Тут дворцовые женщины избрали из сонма девушек тех, которые были прекраснее всех, самого доброго нрава и чьи речи были сладким медом для храбрецов. А владеющий числами приказал подводить их по одной к трону владеющего подлунной. И вот к трону подошла первая. Звездочет спросил ее: "Скажи мне, цветок зари, сколько будет три и три?" - "Шесть", - ответила ему девушка и засмеялась. Тогда владеющий числами приказал увести ее и привести другую. И он задал ей тот же самый вопрос. "Это будет

шесть, если я сложу их, - отвечала она, - и это будет тридцать три, если написать их рядом". Третья ответила: "Это будет шесть, если сложить; тридцать три, если написать рядом; это будет ничего, если вычесть". Четвертая сказала: "Шесть, если я сложу; тридцать три, если напишу рядом; ничего, если вычту; девять, если умножу". Пятая отвечала: "Шесть, если сложить; тридцать три, если написать рядом; ничего, если вычесть; девять, если умножить; единица, если их разделить друг на друга". Шестая сказала так: "Шесть, если сложить; тридцать три, если написать рядом; ничего, если вычесть; девять, если их перемножить; единица, если их поделить друг на друга, и это будет двадцать семь, если возвести три в третью степень. Так учит великая богиня чисел". Седьмая отвечала звездочету: "Пусть великая богиня чисел откроет сыну света свои прекрасные тайны! Вот как говорит она: это будет шесть, это будет тридцать три, это будет ничего, это будет девять, это будет единица, это будет двадцать семь и это будет тридцать шесть двадцать пятых с небольшим, если я из трех извлеку корень третьей степени. Вот как говорит пресветлая богиня чисел, та, которая улыбается, когда земледелец считает свою скотину, царь свои сокровища, а звездочет светила небесные, что сияют кротким светом и проходят свои небесные пути по чудным законам, которые любезны великой богине. Вот каковы слова благодатной богини чисел, но это еще не все, ибо ее речи суть многие, и все они прекрасны". Тогда звездочет сказал: "О великий царь, и ты, сын света! Вы слышали разные ответы на мой вопрос, и теперь вы можете решить сами, которая из девушек достойна стать супругой царевича". Царь сказал: "Я вижу, что милые и прелестные красавицы моей страны недаром провели свою нежную юность, они знают мудрость, и сердце мое радуется. Пусть сын мой, царевич Аритамвара, выбирает теперь сам, ибо это будет его супруга".

Царевич низко поклонился своему отцу и премудрому звездочету и сказал: "Я выберу первую. Она очень хорошо смеется.

И мне нравится, что она говорит коротко и ясно".

Илюша захлопал в ладоши от восторга, а Уникурсал Уникурсалыч как-то рассеянно повернулся на одной ножке и втихомолку исчез. А Илюша посмотрел на Радикса и спросил:

- Есть еще такие дроби, из которых получается колесо, вроде вот этого из одной седьмой?

- Как не быть! Например, одна семнадцатая. Только там число будет подлиннее, потому что

1/17 = 0,0588235294117647...

То же самое будет и с одной двадцать девятой, только там после запятой будет уже целых двадцать восемь цифр. Для этого знаменатель дроби должен быть простым числом, а период его должен заключать в себе на единицу меньше цифры, чем единиц в ее знаменателе. У тебя была одна седьмая, а в периоде было шесть цифр. Для одной семнадцатой в периоде будет шестнадцать цифр. Такой период называется "полным периодом", или "совершенным".

Илюша помолчал и вдруг сказал с жаром:

- А все-таки он ужаснейший человек, этот командор!

- 162 -

- Да что ты! - усмехнулся Радикс. - Конечно, он насмешник, а все-таки сознайся: если бы он так тебя не запутал и не разозлил, ты бы, пожалуй, не догадался насчет неопределенного уравнения и насчет одной седьмой? А?

Илюша посмотрел на своего приятеля с негодованием. Он хотел ему сказать, что тут ничего трудного нет и что он все равно бы догадался, но почему-то покраснел и ничего не сказал.

- Н-да... - неопределенно промычал Радикс. - Все это, конечно, очень приятно, трогательно, всепохвально, умно, тонко, глубоко и широко. А скажи, пожалуйста, кстати, не знаешь ли ты, как поживают наш почтенный судья дон Базилио и трое друзей дона Диего?

Илюша как-то странно смутился и сказал, что он не совсем понял эту странную задачку из Схолии Седьмой.

- А-а-а... - протянул Радикс. - Вон оно в чем дело-то!

А еще на Уникурсала Уникурсалыча рычишь. А сам, значит, насчет завещания дона Диего ни так ни сяк...

После долгих и, надо признаться, довольно нелегких размышлений Илюша наконец пришел к целому ряду важных выводов, которые позволили ему решить эту хитрую задачку.

Когда Илюша взялся за дело как следует, то скоро ему надоело писать имена друзей дона Диего, и он обозначил дона Альваро, дона Бенито и дона Висенте начальными буквами их имен: А, Б и В. Он решил, что надо рассмотреть в качестве возможных порядков выбора все шесть возможных перестановок трех букв этих, то есть:

АБВ АВБ БАВ БВА ВАБ ВБА.

Очевидно, что три данных условия должны исключить из этих комбинаций ровно пять, так чтобы могла остаться только одна единственная комбинация, которая уже не будет противоречить ни одному из трех условий завещания. Вместе с тем, как было указано в завещании дона Диего, ни одно из этих условий не является лишним, то есть невозможно исключить те

пять комбинаций, которые должны быть отброшены, только на основании одного условия или каких-нибудь двух из трех условий.

Когда, таким образом, было выяснено и решено, что именно надо делать, Илюша начал решать задачу.

"Надо, - сказал он себе, - выяснить, о ком из троих друзей мне следует предположить, что именно этот человек видел дона Диего в зеленом плаще, а о ком - что тот именно давал ему табакерку и прочее, ибо только таким образом можно найти основания для того, чтобы отвергнуть пять комбинаций из шести. Притом надо внимательно следить, чтобы ни одно из трех условий не оказалось лишним. Если это случится, то, значит, я пошел по неверному пути.

- 163 -

Раньше всего выясняется, что кто-то, и ни в коем случае не дон Альваро, должен был видеть дона Диего в зеленом плаще, иначе первое условие было бы лишним. Значит, первое условие указывает нам, что дон Альваро не может оказаться на последнем месте, то есть мы можем совершенно отвергнуть порядки БВА и ВБА. Кроме того, первое условие может еще исключать порядок БАВ, если дон Бенито видел завещателя в зеленом плаще, и может исключать порядок ВАБ, если его видел дон Висенте.

Далее очевидно, что дон Висенте не мог быть в Саламанке в 1694 году, так как иначе второе условие ничего не сообщало бы нам о порядке выбора и, следовательно, было бы лишним.

Кроме того, это условие может исключать порядки АБВ и АВБ, если дон Альваро давал табакерку, порядки БАВ и БВА, если табакерку давал дон Бенито, и порядки ВАБ и ВБА, если это сделал дон Висенте.

Наконец третье условие может исключать порядки АБВ и ВАБ, если дон Альваро первый стал носить шпагу, и порядки ВАБ и ВБА, если первым нацепил шпагу дон Висенте".

Чтобы можно было соединить воедино все эти выводы, Илюша немедленно составил небольшую табличку (которую можно увидеть на следующей странице); в ней он отметил, на основании какого условия может исключаться каждый из шести возможных порядков выбора.

"Легче всего, очевидно, - рассуждал Илюша, - может остаться неисключенным порядок АВБ, который можно отвергнуть только на основании одного условия - именно второго - в том случае, если А давал табакерку. Но тогда вместе с АВБ отвергается одновременно и порядок АБВ. Если же допустить еще, что Б видел дона Диего в зеленом плаще, то первое и третье условия вместе исключат и все остальные комбинации и у нас ничего не

останется. А если допустить, что завещателя видел в зеленом плаще не Б, а В, то тогда все три последние комбинации отвергаются с помощью первого условия, то есть третье условие окажется лишним. Следовательно, и это предположение неверно".

Таким образом, обе Илюшины попытки исключить порядок АВБ привели его к противоречию. А если это так, то очевидно, что это-то и есть тот самый порядок, который имел в виду дон Диего: первым должен был выбирать дон Альваро, вторым - дон Висенте и последним - дон Бенито.

Когда Илюша наконец это выяснил, ему захотелось разобраться и в остальных подробностях и проверить, каким же образом должны были исключаться все порядки выбора, кроме назначенного.

Порядок	Отвергается на основании условий:		
	первого	второго	третьего
АБВ		Если табакерку давал *А*.	Если *А* первый стал носить шпагу.
АВБ			
БАВ	Если *Б* видел дона Диего в зеленом плаще.	Если табакерку давал *Б*.	
БВА	Во всех случаях.		
ВАБ	Если *В* видел дона Диего в зеленом плаще.	Если табакерку давал *В*.	Если *В* (или *А*) первый стал носить шпагу.
ВБА	Во всех случаях.		Если *В* первый стал носить шпагу

Он уже догадался, что табакерку давал не А, но если это так, то отделаться от порядка АБВ можно только при помощи третьего условия. И в таком случае первым должен был нацепить шпагу А.

Дальше, если допустить, что табакерку давал В, то тогда второе условие окажется лишним в том случае, если порядок БАВ исключать на основании условия первого, а если его отвергать на основании условия второго, то первое окажется лишним. Поэтому приходится прийти к выводу, что табакерку мог дать дону Диего только Б. Но если при этом тот же Б видел завещателя в зеленом плаще, то окажется, что второе условие лишнее. В таком случае только один В мог видеть дона Диего в зеленом плаще.

В итоге Илюша пришел к следующим выводам:

1)дон Альваро первый стал носить шпагу;

2)дон Бенито давал табакерку;

3)дон Висенте видел завещателя в зеленом плаще и не был в Саламанке в 1694 году.

Вернувшись к своей табличке, Илюша смог восстановить, как должен был рассуждать сам дон Диего в то время, когда все друзья помнили указанные в завещании обстоятельства.

- 165 -

Он записал аккуратно:

"АБВ исключается условием третьим, так как А первый стал носить шпагу.

АВБ не противоречит ни одному из условий.

БАВ исключается условием вторым, так как табакерку давал Б.

ВБА по той же причине исключается тем же условием, а кроме того, еще и условием первым.

ВАБ исключается условием первым, так как В видел дона Диего в зеленом плаще, а кроме того, и условием третьим, потому что А первый стал носить шпагу.

ВБА исключается первым условием".

Когда Илюша все это рассмотрел, то убедился, что нельзя отбрасывать ни одного из условий дина Диего, потому что тогда сейчас же вновь оживет по крайней мере еще одна из комбинаций, кроме АВБ. Илюша заметил еще и то, что хотя в третьем пункте и говорится о случаях, когда А или Б выбирают во вторую очередь, но на самом деле этого не получается, так что из третьего условия вовсе не следует, что А или Б должны выбирать во вторую очередь, - оно только исключает те порядки выбора, которые завещателю не правились.

Когда Радикс просмотрел таблички Илюши, он отнесся к ним с одобрением и сказал:

- Если ты понял, как решаются подобного рода задачи, могу тебе предложить еще две задачки в том же роде. Вот они:

I. В читальном зале главной научной библиотеки ВОЛШЕБНОГО ДВУРОГА за квадратным столом, стороны которого были расположены по странам света, работали четверо ученых: математик, физик, филолог и историк.

Каждый из них в своем спортивном клубе был чемпионом: один по плаванию, другой по теннису, третий по шахматам и четвертый по конькам.

При этом:

а)когда случайно погас свет, то сидевший с северной стороны отказался проверять пробки, так как он боялся удара током;

б)математик сидел против чемпиона по теннису, а историк против чемпиона по шахматам;

и) сидевший с западной стороны утверждал, что

$$\sqrt[3]{8} = \pm 2;$$

г)чемпион по теннису уверял физика, что битва при Калке произошла в 1322 году;

д)чемпион по плаванию сидел по правую руку историка.

- 166 -

Кто где сидел и кто каким видом спорта занимался?

II. У каждого из пяти офицеров, имена которых начинались буквами А, Б, В, Г и Д и которые по чинам были полковник, майор, капитан, старший лейтенант и младший лейтенант, среди четырех остальных было два ближайших друга.

Один из друзей офицера В был выше его по чину. Старший лейтенант никогда не бывал в Крыму. Оба друга Б и оба друга Г воевали на территории Германии, однако друзья полковника в Германии совсем не были. Офицер Г воевал на Северном Кавказе вместе с обоими своими друзьями, а младший лейтенант там не бывал. Майор служил на Дальнем Востоке с обоими своими друзьями, а офицер Г был тоже на Дальнем Востоке, но только с одним из своих друзей. Полковник вместе с обоими друзьями воевал в Крыму, но не был па Дальнем Востоке. Д не бывал ни в Крыму, ни на Северном Кавказе. Разбери-ка: кто чей друг и кто какой имеет чин?

- Хорошо, - сказал Илюша, - постараюсь решить. Но скажи мне, пожалуйста, какие это задачи? Ведь это же но алгебра?

- Нет, это наша математическая логика.

- Мне казалось, что до сих пор я понимал, что такое логика; это чтобы рассуждать основательно и разумно... А что такое эта твоя математическая логика? Какая разница с обыкновенной?

- Разница в том, что математическая логика представляет собой некоторый род исчисления. Это своего рода алгебра, у которой имеются собственные правила, которые и точнее и шире правил обыкновенной логики[15]. Многое в силу ее алгебраичности может быть превращено в ряд обыкновенных вычислительных правил. Поэтому современные электронно-счетные машины получили возможность доказывать, например, теоремы.

- И трудные теоремы?

- Да, не легенькие...

- Все это очень странно! - сказал Илюша. - Неужели можно поверить, что машина может думать?

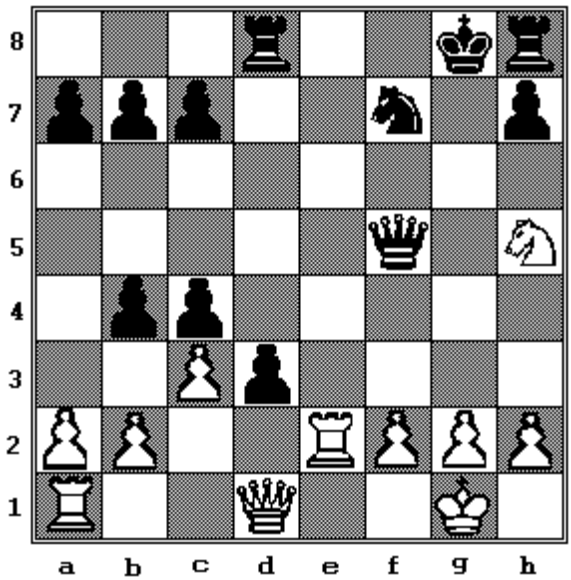
- Трудно ответить, конечно, на этот вопрос. Думать, как человек, машина, возможно, и не может, но решать задачи, над которыми человек размышляет иной раз очень долго и это ему нелегко дается - вот это она может. Конечно, не всякие задачи, но

некоторые удается. И совсем неплохо! Ты, кажется, ничего не имеешь против шахмат?

- 167 -

- Решительно ничего!

- Тогда позволь показать тебе одну позицию на шахматной доске, которая была предложена электронно-счетной машине. Смотри:



Белые: Крgl, Фdl, Ла1 и e2, Ch6, Kh5, a2, b2, c3, f2, g2, h2.

Черные: Крg8, Фf5, Лd8 и h8, Kf7, a7, b7, b4, c7, c4, d3, h7.

В этой позиции белые начинают и дают мат в три хода.

Попробуй найди-ка решение!

А когда найдешь, сам увидишь, что в легкой партии можно не только его не найти, а даже и прозевать эту победу. А потом скажи мне, надо думать, чтобы решить эту задачу, или нет? Машина решила эту задачу мигом.

- Так-то оно так, - задумчиво вымолвил мальчик, рассмотрев шахматную диаграмму, - а все-таки это очень похоже на трехходовую задачу, которой только нарочно придана видимость живой партии... То есть мне так кажется. Потому что черный король стоит в пату - никуда двинуться не может, - и белым надо только отвести черного ферзя с того места, где он защищает поле f6... Вот они это и делают в два хода. Но все-таки интересно! Если разобрать как следует, то этот пример не очень убедителен... А вот насчет доказательства трудных теорем - другое дело!

- Почитай специальные книжки, - ответил Радикс, - в двух словах это все рассказать нельзя, потому что эта логика довольно своеобразная и нелегкая наука. Могу привести еще один хороший пример. Как будто у твоего папеньки стоит на письменном столе

электрическая лампа? Скажи, пожалуйста, как она зажигается?

- У лампы в цоколе, - отвечал мальчик, - есть такая кнопочка. Нажал - лампа зажглась, нажал еще раз - потухла.

- Так-с, - ответствовал Радикс, - давай попробуем все это выразить на языке нашей логики. Пусть зажженная лампа обозначается единицей, потухшая - нулем. А эту операцию нажатия кнопки мы будем тоже именовать единицей. Разумеется, ничего иного под этими символами теперь понимать нельзя.

Но если мы так условились, то будет справедливо равенство:

(1 + 1 = 0), ибо если ты дважды нажал кнопку, то лампа гореть не будет. И вообще всякая сумма четного числа единиц будет равна нулю, а нечетного - единице. Например, если ты нажал кнопку три раза подряд, то (1 + 1 + 1 = 1), то есть лампа будет гореть. Единица в левой части равенства - это нечто вроде отрицания "не": нуль в правой части говорит, что ничего не изменилось. Если лампа не включена, то, прибавляя "не", получаем "не не включена", то есть включена, и наоборот.

- Вот как... - недоуменно пробормотал Илюша.

- И представь себе, что такого рода равенства ныне имеют немалое значение для замечательных современных электронно-счетных машин.

Схолия Десятая,

замечательная как своей непревзойденной краткостью, так и весьма скромными размерами сообщаемых ею фактов, на один из коих потребовалось всего-навсего: одна странная вещица, которую Илюша второпях принимает за бильярд, три шахматные доски, одно маковое зернышко, восемьдесят квадриллионов нулей и очень миленькая девушка, некая Альфа Ц. (известная тем, что когда бы на нее ни поглядели, всегда кажется, что она на пять лет моложе того, что есть на самом деле), после чего читатель узнает кое-что о славе Архимедовой, которой не были страшны долгие века, и об одной отважной путешественнице.

Радикс опустил свой длинный нос пониже и довольно лукаво посмотрел на Илюшу. Тому после испанской задачки ничего другого не оставалось, как сделать вид, что он этого не замечает.

- Нет, - сказал мальчик, - ты мне все-таки лучше про Бриарея...

- 170 -

- Про Бриарея рассказ будет не очень длинный. Бриарей был, по древнему греческому мифу, одним из детей Урана - неба и Геи - земли, от которых родились титаны, гекатонхойры (что значит сторукие) и одноглазые циклопы. С одним из этих последних встретился Одиссей, как ты, вероятно, знаешь (а не знаешь, так возьми "Одиссею" в переводе Шуковского и узнаешь). Бриарей и был одним из гекатонхейров, которые в мифах олицетворяли грозные силы разбушевавшейся морской стихии. Титаны олицетворяли собой первобытные силы природы в их совокупности, а циклопы - явления небесной грозы: гром, молнию и заодно уж извержения вулканов и землетрясения. Все эти титаны были до того страшны, что собственный отец заточил их в Тартар. А потом, когда титаны восстали против Зевса, он победил их с помощью гекатонхейров и циклопов. Миф этот связан с осадой Сиракуз римлянами, потому что Марцелл, предводитель римского войска, однажды сказал, объясняя своим воинам причины неудачных штурмов Сиракуз, что победить Архимеда, "этого Бриарея геометрии", почти невозможно. Вот поэтому-то мы иногда здесь о нем и вспоминаем.

- Значит, - сказал Илюша, - Бриарей был великан?

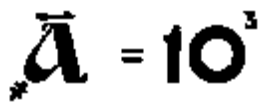
- В этом роде, - отвечал Радикс. - Но мы здесь видали и не таких великанов.

- Это ты про Великую Теорему?

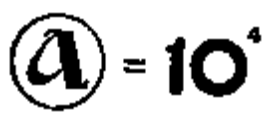
- Нет. Есть великаны и попроще, но такого удивительного

роста, что невольно диву даешься. Мы с тобой сейчас говорили о мифах. Эти прекрасные, поистине высокопоэтические создания народного гения сохранили нам не только образы древнего искусства, но и замечательные мысли. Возможно, мы снова вспомним нашего сиракузского Бриарея. Люди с давних времен всегда интересовались большими числами. В трудах индийских математиков, поскольку они отразились в легендах и поэмах древней Индии, мы встречаем не просто упоминания о больших числах, но суждения о том, как их строит мысль человеческая, какие числовые громады можно построить, исходя из довольно простых принципов. Так, в одной из древнейших книг Индии рассказывается, каким образом могут быть уложены камни при постройке некоей стереометрической фигуры. Счет начинается с десяти тысяч, затем это число последовательно увеличивается путем умножения его на десять, и девятое число из этого ряда уже довольно велико: десять в двенадцатой степени. Мы теперь называем его триллионом- это миллион миллионов. Чтобы как-нибудь представить себе эту "крошку", вспомним вот о чем. Самая близкая к нам звезда, не принадлежащая к нашей Солнечной системе, называется Альфа Центавра. Ты, наверное, знаешь, что обычно отдельные звезды созвездия называются греческими буквами.

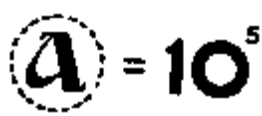
- 171 -



Тысяча



Тьма



Легион

Так вот, Альфа Центавра находится от нас на расстоянии сорока триллионов километров. Свет в одну секунду пролетает триста тысяч километров. В году свыше тридцати миллионов секунд; следовательно, свет этой звезды должен идти к нам примерно четыре с половиной года. Довольно долго, не правда ли? Допустим, что у нас с тобой будет самолет, который летает со скоростью тысяча километров в час.

Для КРУГЛОГО счета будем считать, что в году девять тысяч

часов. Тогда за год он пролетит девять миллионов километров, за сто лет – девятьсот миллионов километров, то есть еле приблизится к биллиону. Таким образом, чтобы пролететь триллион километров, нашему самолету придется лететь, не останавливаясь, сто тысяч лет с лишним. Ты видишь, что триллион- это довольно почтенное число.

- Да уж действительно! А скажи, пожалуйста, ведь биллион не редко называют еще миллиардом, так нельзя ли на этом основании назвать триллион биллиардом?

- Нет, такого названия не существует. Ну, слушай дальше. Мысль древнеиндийских математиков и поэтов на этом не остановилась. В поэме Рамаяна описывается воинственный бог Сугрива, который ведет страшное обезьянье войско. Число хвостов в этих ужасающих полчищах начинает исчисляться обезьяньими дивизиями, в каждой из которых ты находишь, ни много ни мало, сто миллионов непобедимых мартышек. Затем эти дивизии объединяются во все более и более крупные соединения, и в конце концов во всей этой бесподобной армии насчитывается 10^{38} мохнатых богатырей. Что такое 10^{38} по нашей системе? Если мы назовем с тобой 10^{33} децильоном, то дальше счет пойдет так:

10^{33} ..... децильоны

10^{36} ..... тысячи децильонов

10^{39} ..... миллионы децильонов

10^{42} ..... биллионы децильонов

Как видишь, хвостов в распоряжении этого индийского вояки было вполне удовлетворительное количество.

Кстати, скажу тебе вот еще что. В старинных русских рукописях тоже имеются рассуждения о весьма больших числах.

В одной рукописи приводится число, о котором говорится, что "больше сего числа несть человеческому разуму разумети".

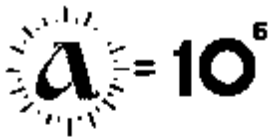
Оно именуется "колодой" и равняется 10^8, то есть сотне миллионов. Однако это еще не всё. В другой рукописи есть указание на то, что, кроме обычной системы, которая заканчивается колодой, существует еще и иная система, называемая "числом великим словенским", и там уже "последнее" число равняется 10^{48}. А теперь обрати внимание на то, что эти индийские поэмы, как и их отражения в старинных русских рукописях, никогда не называют большое число сразу, а показывают, как путем постепенного увеличения вполне обозримого числа мы получаем числа, которые уже превосходят наше воображение. Есть еще одна замечательная индийская легенда о том, как царевич Бодхисатва сватался к дочери царя

Дандапани и какими вопросами испытывал царевича премудрый Арджуна. Речь идет о системах счисления и о том, каковы примерно размеры получаемых при этом чисел. Эта прекрасная сказка очень напоминает одно замечательное творение нашего с тобой любимца Архимеда. Оно построено по тому же принципу, как и сказка об индийском царевиче. Хочешь послушать?

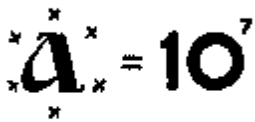
- Да-да! - сказал Илюша. - Про Архимеда мне все очень интересно.

- Отлично. Дело было в третьем веке до нашей эры. Архимед в этом сочинении, которое написано в форме послания к сиракузскому царю Гелону, идет примерно тем же путем, каким шли индийские математики. Он показывает на очень хорошем примере, что человек в рассуждениях может составить числа, превышающие всякий, даже самый необъятный на первый взгляд пример. Архимедов "Счет песчинок" (так называется это его сочинение) начинается следующими словами: "Некоторые - о царь Гелон! - думают, что число песчинок бесконечно. Не только тех песчинок, что находятся вблизи Сиракуз и по всей Сицилии, но и всех тех, что рассеяны по всем обитаемым и необитаемым странам земли. Другие полагают, что число это не бесконечно, но невозможно определить словесно количество, которое превышало бы число всех этих песчинок". Архимед утверждает, что мнения эти неправильны, и опровергает их таким образом. Возьмем песчинку и предположим, что в одном маковом зернышке находится 10^4, или десять тысяч таких песчинок. Не правда ли это будет довольно маленькая песчинка?

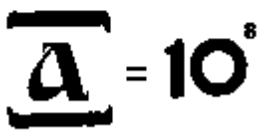
- Ясно, - отвечал Илюша, прямо пылинка.



Леодр.



Ворон.



Колода.

- Далее Архимед говорит, что один палец равен сорока диаметрам макового зернышка, а стадия (греческая мера длины, которая равна примерно ста шестидесяти метрам) меньше десяти тысяч пальцев. Затем он говорит, что если мы возьмем шар с диаметром в одну стадию, то объем его будет меньше, чем объем куба, ребро которого равно одной стадии, что очевидно, ибо такой шар можно вписать в такой куб. Из этого он заключает, что в шаре с диаметром в одну стадию не может заключаться песчинок более нежели 10^{21}, то есть более секстильона. Ясно, что объем этого шара менее, чем 104 кубических пальцев, он меньше, чем $40^3 \cdot 10^{12}$ зернышек мака, а следовательно, меньше, чем $10^4 \cdot 40^3 \cdot 10^{12}$, или $64 \cdot 10^{19}$, песчинок, а стало быть, он меньше, чем секстильон, равный 10^{21}.

Далее он полагает, что если построить шар с диаметром, равным диаметру Солнечной системы, который, как он полагает, меньше 10^{10} стадий, то объем этого шара будет менее 10^{30} кубических стадий, а следовательно, в нем будет заключаться менее, чем 10^{51} песчинок, или, по нашей с тобой системе, менее квинтильона децильонов. Наконец, Архимед строит шар с радиусом, равным расстоянию от Земли до неподвижных звезд, которое, по его мнению, менее десяти тысяч диаметров Солнечной системы, и утверждает, что в таком шаре будет заключаться менее 10^{63} песчинок, или, по нашим с тобой обозначениям, менее нонильона децильонов. Может быть, тебе эта величина станет немного яснее, если я скажу, что в переводе на современные меры объем этой сферы Архимеда менее нежели $5 \cdot 10^{54}$ кубических сантиметров.

Но Архимед не употреблял позиционной системы, как не пользовался он и показателями степени. Он строит для этого рассуждения свою систему чисел, начиная с греческого числа "мириада", которое равно десяти тысячам, то есть 10^4. Тогда числа до мириады он называет первыми числами, затем идет мириада мириад, или 10^8, которая будет единицей вторых чисел. Мириада мириад вторых чисел, или 10^{16}, будет единицей третьих чисел, и так далее. И вот теперь оказывается, что для того, чтобы определить, сколько песчинок будет в сфере, радиус которой равен расстоянию от Земли до неподвижных звезд, достаточно взять число, которое будет менее тысячи мириад восьмых чисел Архимеда.

Таким образом, Архимед на очень несложном и очень ярком примере показал, что человеческая способность последовательно строить числа легко справляется с величинами, для которых трудно подобрать пример, который что-нибудь говорил бы нашим чувствам. Заметь, что Архимед нигде не определяет точно своих

чисел. Он ограничивается тем, что указывает только на то, что искомое число не может превышать некоторой определенной величины. Таким образом, он нам указывает на то, что называется порядком величины. Мне кажется, да ты и сам можешь легко догадаться (уже не маленький!), что большего в таком рассуждении и не надо.

- Да, уж действительно! - промолвил Илюша. - Я раньше думал, что это ужасно большое число, знаешь, вот в этой задаче, где надо сосчитать, сколько зерен будет лежать на шахматной доске в шестьдесят четыре квадрата, если на первый квадрат положить одно зернышко пшеницы и на каждую следующую клетку класть в два раза больше. Но там совсем не так много получается.

- Да. Для обыкновенной шахматной доски получается число порядка десятков квинтильонов. Если взять стоклеточную доску, на которой играют в так называемые "польские шашки", то тогда число зерен доберется до нонильонов. А если взять доску еще побольше, у которой не десять полей с каждой стороны, а четырнадцать, и всего будет сто девяносто шесть полей, то вот тогда мы как-нибудь уж доползем до сотен септильонов децильонов.

- Как скоро все-таки растет! - воскликнул Илюша.

- Да, - отвечал Радикс, - растет недурно. Что же касается Архимеда, то он останавливается на числе, которое можно записать так:

$10^{8 \cdot 10_{16}}$

и которое представляет собой единицу с восьмьюдесятью квадриллионами нулей. Если это число написать на бумажной ленте, умещая по пятисот нулей на одном метре, то есть писать очень мелко и убористо, то на одном километре ленты мы напишем пятьсот тысяч нулей и на двух километрах один миллион. А так как нулей восемьдесят квадриллионов, или восемьдесят биллионов миллионов, то ленточка наша будет длиной в сто шестьдесят биллионов километров! Ленточка не маленькая: она в четыре с лишним раза длиннее орбиты, по которой несется планета Плутон. Свет, как ты знаешь, двигается довольно быстро. Однако все-таки, если бы на одном конце нашей ленточки мелькнула яркая звезда, на другом конце ее увидали бы не сразу, а только через шесть суток.

Но ведь это еще только изображение архимедова числа, а не само число!

- Удивительно! - сказал Илюша.

- Работы Архимеда были удивительны не только для тебя, но

и для людей недюжинных способностей и великих знаний.

Первые архимедовы числа.
Единицы ..... 10°
Тысячи ..... 10^{3}
Миллионы ..... 10^{6}

10^{8} - вторые архимедовы числа (мириады мириад).

Биллионы ..... 10^{9}
Триллионы ..... 10^{12}
Квадриллионы .... 10^{15}

10^{16} - третьи архимедовы числа.

Квинтильоны .... 10^{18} *
Секстильоны .... 10^{21}
Септильоны .... 10^{24}

10^{24} - четвертые архимедовы числа.

Октильоны .... 10^{27}
Нонильоны .... 10^{30} **
Децильоны .... 10^{33}

10^{32} - пятые архимедовы числа.

Тысячи децильонов ..... 10^{36}
Миллионы децильонов .... 10^{39}
Биллионы децильонов .... 10^{42}

10^{40} - шестые архимедовы числа.

Триллионы децильонов . . . 10^{43}
Квадрильоны децильонов . . 10^{48}
Квинтильоны децильонов , . 10^{51}

10^{48} - седьмые архимедовы числа.

Секстильоны децильонов . . 10^{54}
Септильоны децильонов . . . 10^{57}
Октильоны децильонов . . . 10^{60} ***

10^{56} - восьмые архимедовы числа.

Нонильоны децильонов . . . 10^{63}

Децильоны децильонов . , . 10^{66}

10^{64} - девятые архимедовы числа.

---

* Здесь стоит число, равное сумме зерен пшеницы на шахматной доске в шестьдесят четыре клетки. Примерно оно равно $10^{19} \cdot 1{,}8447$.

** Здесь стоит число, равное сумме зерен на шахматной доске в сто клеток. Примерно оно равно 10^{30} -1,2677.

*** Здесь стоит число, равное сумме зерен на шахматной доске в сто девяносто шесть клеток. Примерно оно равно $10^{59} \cdot 1{,}0039$.

Древний историк Плутарх так говорил об Архимеде: "Во всей геометрии нет теорем более трудных и более глубоких, нежели теоремы Архимеда. Мне самому всегда казалось, когда я впервые знакомился с его математическими предложениями, что они до того трудны, что ум человеческий не в состоянии найти им доказательства. Однако когда узнаешь, как сам Архимед их доказывает, то тебе кажется, будто ты сам нашел это доказательство - до того оно просто и легко".

- Ты знаешь, я иногда сам что-то в этом роде чувствовал! .. Только не но отношению к Архимеду, а вообще по отношению к математике. Я очень хорошо понимаю, что хочет сказать этот древний историк!

- Так оно и должно быть, - с улыбкой ответил Радикс. - Ты испытываешь это светлое чувство радостного удивления перед могуществом человеческого разума, когда встречаешься с элементарными положениями, а люди, более тебя начитанные, испытывают то же, когда видят более сложные построения. Это вполне естественно. Один из самых крупных математиков семнадцатого века, Лейбниц, который очень много сделал для развития высшей математики, так сказал об Архимеде: "Когда внимательно разбираешься в творениях Архимеда, то постепенно перестаешь удивляться новейшим открытиям современных геометров". Два других великих математика - французы Лагранж и Даламбер - в восемнадцатом веке тоже немало потрудились над созданием высших разделов математики. Они писали об Архимеде: "Ни один из геометров древности не сделал таких многочисленных и важных открытий. Поэтому какими бы важными преимуществами ни обладали новые методы и как бы

это ни было общеизвестно, тем не менее каждый математик должен поинтересоваться, какими тонкими и глубокими размышлениями Архимед сумел достигнуть таких сложных результатов". А замечательный английский математик Валлис, современник Ньютона, даже называл его "человеком сверхъестественной проницательности". Да и в гораздо более раннее время, когда ни Лейбница, ни Валлиса, ни Даламбера с Лагранжем не было еще на свете, крупнейшие ученые, которые впервые начали снова двигать вперед математику после долголетнего застоя, такие люди, как, например, Иоганн Кеплер (шестнадцатый-семнадцатый века), прямо говорили, что они пытаются продолжать дело Архимеда, а Бонавентура Кавальери (современник Кеплера и ученик Галилея) с гордостью утверждал, что ему удалось проникнуть в тайны того аналитического метода, которым Архимед пробивался через самые неприступные проблемы. Вот какой это был замечательный человек! Кавальери гордился тем, что сумел восстановить его методы. Мы еще поговорим с тобой об этом замечательном ученом. Ньютон однажды сказал, что он совершил свои открытия, так как "стоял на плечах гигантов". Кто же эти гиганты?

Это раньше всех Кеплер и Галилей.

- Да! - отвечал в почтительной задумчивости мальчик. - Только ведь это сочинение Архимеда о счете песка никаких особенных задач не решает. Правда?

- Ошибаешься! - отвечал Радикс. - Это сочинение имеет необыкновенно важное значение, и даже гораздо более важное, нежели решение какой-либо частной проблемы. Оно ставит такие серьезные вопросы, которых никто еще до Архимеда на практике не решался касаться; если же и касался, то, так сказать, несознательно, не представляя себе всей важности этой задачи. Она, в частности, заключается в доказательстве положения, утверждающего, что ум человеческий способен легко строить числа, превышающие любую заранее заданную величину.

Сам Архимед определял задачу этого сочинения так: оно должно доказать, что данное число песчинок не бесконечно и что возможно построить число, превышающее его. Но ведь песчинки - только частный пример, поэтому я настаиваю на моем первом определении задачи "Псаммита" (так называется по-гречески это сочинение Архимеда).

- Это очень интересно, - ответил Илюша поразмыслив. - Но ведь это только для того, чтобы посмотреть, к чему приведет такая странная задача? Не правда ли?

- Напрасно ты так думаешь, - ответил, нахмурясь, Радикс, -

совершенно напрасно!.. "Псаммит" был сочинен Архимедом не для праздной забавы, отнюдь. Чем более серьезные задачи ставил перед собой человек в те древние времена (задачи из области физики, механики, астрономии и так далее), тем более сложный математический аппарат ему был нужен. И вот, чтобы начать строить этот аппарат, ему, человеку, и понадобились очень большие числа. Громадные! Необъятные! И "Псаммит" Архимеда был первым серьезным шагом в этой области. После того как содержание этого сочинения Архимеда было усвоено, можно было ставить себе и иные задачи. Например: что мы будем получать, если начнем последовательно делить единицу на ряд чисел Архимеда и дойдем до самых больших из названных им чисел?

- По-моему, - сказал Илюша, - это будет история путешествия синьориты Одной Энной по натуральному ряду.

- Недурно сказано! - воскликнул Радикс. - Недурно!

- По-видимому, эта особа будет все уменьшаться в объеме.

- А не найдешь ли ты такого числа, на которое она все более и более будет походить?

- Не знаю, - произнес мальчик осторожно, - какое же это может быть число. Ну, разве что нуль? То есть я хочу сказать, что чем дальше будет продолжаться прогулка синьориты Одной Энной по натуральному ряду, тем труднее ее будет отличить от нуля.

- Это разумный вывод, - отвечал одобрительно Радикс. - Так, конечно, и будет. Ну, а что случится, по-твоему, если я возьму все значения твоей приятельницы, госпожи Одной Энной, и начну теперь делить единицу на каждое из ее значений? Ну-ка!

- Ясно, - отвечал Илюша, - что ты снова получишь все те целые числа, с которых я начал, когда мы заговорили и синьорите Одной Энной.

- 178 -

- Прелестно! Рад от души!.. Но скажи на милость, а нет ли такой величины или даже такого математического образа, на который все более и более будут походить эти все растущие и растущие обратные величины значений синьориты Одной Энной?

Илюша не знал, что ответить на это, и только высказал предположение, что числа эти будут невообразимо громадны, так что вскоре даже и слава пресловутого "последнего" архимедова числа сильно потускнеет.

- Послушай, Илюша, - промолвил" Радикс, - ты только что сказал: что ни далее, тем значения синьориты Одной Энной все менее и менее будут отличаться от...

- От нуля.

- Правильно. Следовательно, перед нами будет ряд частных,

делители которых все приближаются и приближаются к нулю. Прекрасно! А к чему же будут приближаться частные?

Илюша призадумался. Затем он сказал так:

- Видишь ли, я слышал, что есть такое слово "бесконечность". Только я не знаю: правильно ли будет, если мы сейчас о нем вспомним? Как ты скажешь?

- Это дело серьезное. И даже весьма. Тут есть над чем голову поломать. А в общем, чтобы подвести итог нашему разговору о "Псаммите", попробуй скажи мне в одной фразе, что там говорится.

Илюша подумал и ответил так:

- Какую бы мой собеседник величину ни назначил, я немедленно сооружу число во много раз больше.

И Радикс улыбнулся, на этот раз вполне удовлетворенный ответом Илюши.

Схолия Одиннадцатая,

которая, во-первых, довольно длинная, а во-вторых, не так уж проста, так что читателю придется проявить если не упрямство, то немалое упорство, коли он хочет и дальше играть в схолии. Однако если не читать этой схолии, то и вообще больше ничего читать в этой книжке не придется. Поэтому тот, кто хочет читать далее Одиннадцатой Схолии, должен запастись мужеством. Тогда он узнает кое-что новое о яблоках, о кружочках и прутиках одного не очень послушного и даже упрямого мальчика, который жил неподалеку от одной большой горы. Именно тут Илюша слышит превосходные арифметические рассуждения, но как только дело чуть-чуть касается геометрии, поднимается невероятная кутерьма, вызванная появлением некоего неуклюжего авиадесанта, одолеть который только и можно с помощью вышеупомянутого упрямства.

- Ну-с, уважаемый Илья Алексеич, - произнес важно Радикс, - изложите мне вкратце, как вы себя изволите чувствовать.

Илюша посмотрел на него немного подозрительно, припомнив не совсем приятный разговор с командором, но потом решил, что вряд ли Радикс вспоминает именно об этой истории.

- 180 -

- Во-первых, - начал Илюша, - мне никогда в голову не приходило, что у нас здесь столько чудес. Во-вторых, я никогда не думал, чтобы такой пустяк, как, например, Дразнилка, мог привести к таким серьезным и сложным выводам.

Правда, мне папа раз прочел две строчки из стихов, которые написал поэт Баратынский про Ньютона, но только я... если уж по совести сказать... пропустил эту штуку мимо ушей...

- А ты помнишь эти строчки?

- Помню, - ответил Илюша. - Вот как там сказано:

Плод яблони со древа упадает,
Закон небес постигнул человек.

Ну, это в том смысле, что человек, увидавши вещь самую простую, которую все видали миллионы раз, подумал над ней, как следует размышлять настоящему ученому, и открыл, что такое всемирное тяготение. Только я не знаю, так я рассказываю

или нет.

- Приблизительно так, - сказал его друг. - Как будто и на самом деле с Ньютоном случилось нечто в этом роде, но в данном случае ведь не это самое важное. Ты ведь вспомнил об этом стишке потому, что теперь ты заметил, как размышление над предметами самыми простыми и обычными может привести нас к очень важным и глубоким заключениям. Так я тебя понял?

- Да, - ответил Илюша, - я как раз это и хотел сказать.

- Хорошо, что ты это заметил. Надо только еще вспомнить вот о чем. Эти стихи неправильны и в другом смысле.

Дело в том, что один человек никогда бы не смог путем размышления открыть столь сложный закон. Нужна была работа целых поколений мыслителей, чтобы постепенно подвести человечество к такому состоянию знаний, когда стало возможно такое открытие. Законы падения тел были впервые научно определены великим Галилеем, жившим в Италии в шестнадцатом и семнадцатом веках. Ньютон родился в Англии как раз в год смерти Галилея. И все работы Галилея были к его услугам. Вот как было на самом деле. Однако, конечно, даже и такого великого мыслителя, как Галилей, было еще мало для этого. На самом деле работа великого Ньютона была гениальным итогом работы гораздо большего числа людей. В их числе нельзя не назвать еще астронома-наблюдателя Тихо де Браге и великого его последователя Иоганна Кеплера. А к этому надо еще добавить, что как Галилей, так и Кеплер - оба они опирались на замечательные труды Николая Коперника...

- Как интересно!..

- 181 -

- Конечно! По этому поводу мне припомнились сейчас еще и другие стихи, которые высказывают примерно ту же самую мысль, но, пожалуй, в более удачной форме, потому что стихи, которые ты прочитал, вспоминают Ньютона, на мой взгляд, совершенно не к месту. С другой стороны, однако, возможно, что первая, еще не совсем ясная идея о всемирном тяготении, как это иногда бывает в таких случаях, действительно могла возникнуть у ученого, когда он услыхал, как стукнулось о землю упавшее яблоко. Кажется, что это случилось внезапно, но на самом деле ученый давно уж размышлял об этом. Был еще такой английский поэт Александр Поп. Жил он в восемнадцатом веке, пользовался в свое время большой известностью, и его сочинения до сих пор высоко ценятся на его родине. Так вот, однажды он написал такие стихи:

Был скрыт закон небес во мгле, но бог сказал:

"Да будет Ньютон!" - И свет просиял над миром.

В этих стихах Поп подражает Библии, где рассказывается, что бог сотворил мир из ничего, просто путем заклинаний. Ты, я полагаю, прекрасно понимаешь, что эти древние сказки ни в малой мере не объясняют происхождения мира и его устройства, что нужны были миллионы лет постепенного развития, чтобы мир стал таким, какой он есть, и что это может выяснить только наука, а не сказки. Совершенно то же возражение мы должны высказать и стихам Попа: "Вы, дорогой поэт, придумали очень занимательно о Ньютоне, с этим мы не спорим, но, по существу, вы неправы, ибо творения Ньютона не с неба свалились, а есть результат упорной и долгой работы людей ученых, как и он, его предшественников, плод постепенных и отнюдь не легких усилий всего мыслящего человечества. С другой стороны, мы хорошо понимаем, что Ньютон был не человек, а истинное чудо, но тогда надо сделать оговорку, что это не какое-нибудь сверхъестественное чудо, а одно из таких чудес, которые всегда делало, делает и будет делать человечество". Можно еще добавить, что нередко очень важные открытия появляются на белый свет как бы неожиданно, и люди им удивляются. Но затем обычно выясняется, что это удивительное открытие давно уже где-то потихоньку вызревало, только не все это замечали.

Илюша долго молчал, затем сказал:

- А еще меня очень удивил треугольник Паскаля. Кажется, просто - сложение, и больше ничего, - а какие замечательные вещи получаются из него!

- А ты никогда не слыхал, как учился математике этот Паскаль, когда он был совсем маленьким?

- Нет! - воскликнул Илюша. - Расскажи, пожалуйста!

- 182 -

- Ну, слушай. Дело было в семнадцатом веке. Блез Паскаль родился во французском городе Клермонте. Сейчас этот город называется Клермон-Феран и находится в департаменте Пюи-де-Дом, где имеется одна довольно большая гора, около полутора километров высотой, с таким же названием.

Я вспоминаю о ней потому, что некоторые работы Паскаля, были связаны с этой горой. То, что я тебе сейчас расскажу о детстве Паскаля, основано на свидетельстве его сестры и очень похоже на правду. Отец Паскаля был по тем временам очень образованный человек, недурной математик, переписывался с Ферма. Этьен Паскаль хотел дать своему сыну хорошее

образование. Так как в то время все научные труды писались главным образом на латинском языке, то отец Паскаля считал, что мальчик раньше всего должен изучить латынь и знать ее настолько хорошо, чтобы свободно читать как современные ему ученые сочинения, так и сочинения древних математиков. Отец Паскаля был человек строгий и требовательный.

Он сам занимался с сыном древними языками. И вот однажды во время урока мальчик спросил своего сурового отца: "Что такое геометрия?" Отец ответил ему, что сейчас не время об этом говорить, потому что они занимаются латынью. Однако, услышав такой вопрос, отец решил, что не следует говорить так, чтобы мальчик подумал, что геометрия это нечто такое, о чем ему не следует знать, и добавил, что геометрия учит нас, как нарисовать совершенно точную фигуру и как узнать, в каких отношениях находятся части этой фигуры друг к другу. При этом отец сказал, что сыну сейчас рано еще не только заниматься этим, но даже и думать об этом. Математические сочинения хранились у отца Паскаля под замком, и говорить при мальчике о математике избегали. И все-таки мальчик Блез начал думать над тем, что ему сказал отец, не зная о геометрии ничего, кроме этой фразы отца. Затем при помощи кусочка угля он стал рисовать на полу детской геометрические фигуры и размышлять над тем, каким образом можно вычертить точный круг или равносторонний треугольник. Так как он не знал, как геометры называют свои отрезки, углы и прочее, то он выдумал им свои названия. Отрезок он называл прутиком, окружность - кружком. Ему было всего двенадцать лет.

И вот однажды его отец, случайно зайдя в эту комнату, застал его за этим занятием. Отец в удивлении спросил, что это он делает. Мальчик смутился, ибо ему было запрещено даже и думать о геометрии, и отвечал, что он играет... и вот сейчас только что он пришел к одному очень смешному заключению, а именно: заметил, что из прутиков у него выходят разные уголки - маленькие, средние и большие.

- 183 -

- Постой-ка! - воскликнул удивленный Илюша. - То есть он сам додумался до того, что существуют острые, прямые и тупые углы?

- Вот именно. Но слушай, что было дальше. А когда он стал рассматривать свои "треуголки" (то есть треугольники), то заметил, что если взять все три уголка и сложить их вместе, то получается каждый раз не больше и не меньше, как два средних уголка.

- Послушай! - воскликнул Илюша. - Да может ли это быть? Выходит, что он сам, один, своим умом дошел до утверждения,

что сумма углов треугольника равна двум прямым?

Как же это возможно?

- Представь себе, что это для него оказалось возможным!

Отец его был удивлен этим не меньше тебя. Он пошел к одному своему другу, рассказал об этом и прямо заплакал от радости. История эта хорошо известна. Есть даже статуэтка, изваянная французским скульптором Моро-Вотье, изображающая, как маленький Блез рисует треугольник на полу. После этого случая Этьен Паскаль дал сыну "Начала" великого Евклида, причем Блез получил позволение читать их только в свободное время. Надо тебе еще знать, что "Начала" Евклида, хотя в них говорится о планиметрии примерно то же самое, что и в твоем школьном учебнике геометрии, изложены очень сложно, по-старинному. Чтобы дать тебе представление об этом, укажу хотя бы на то, что Евклид в своих четырехстах семидесяти предложениях, составляющих около шестисот страниц, не всегда ссылается на ранее доказанные теоремы, а когда дело доходит до какого-нибудь уже доказанного положения, которое ему надобно по ходу рассуждения, он часто доказывает это положение опять с самого начала. Все пропорции записаны словами, так как тогда ни знаки действий, ни алгебраические обозначения еще не употреблялись. Хорошо известная тебе алгебраическая формула квадрата суммы, которую мы получаем простым умножением, у Евклида доказывается геометрически, и это доказательство содержит в себе без малого триста слов! Вот и представь себе, какими же способностями и каким трудолюбием должен был обладать этот мальчик, чтобы одолеть такую книгу! А он одолел ее самостоятельно так хорошо, что шестнадцати лет написал работу по геометрии, которая была одной из первых новых работ по геометрии со времен великого Архимеда. А через три года Паскаль построил первую в мире счетную машину, которая в те времена казалась самым настоящим чудом.

- Вот здорово! А мы-то в школе хнычем, что наша геометрия трудная!

- Разумеется, - отвечал Радикс, - не всякому природа дает такие способности. Но трудолюбие такое может развить в себе всякий, если только он действительно любит науку и хочет быть полезен людям, когда вырастет.

- Ах! - воскликнул Илюша. - Конечно, это ужасно неприятно, когда тебе тыкают в нос, что вот, дескать, у Сеньки Золотарева всегда чистая тетрадка, а у тебя вечно клякса на кляксе! Терпеть не могу! Но вот когда ты мне рассказываешь такие замечательные вещи про Паскаля, мне самому хочется все делать так, как он

делал.

- Заметь, - прибавил Радикс, - что сейчас это гораздо легче, потому что твои учебники - это просто настоящие шоколадки по сравнению с тем, что представляют собой "Начала" Евклида.

- Да, - сказал Илюша, - вот уж я не думал услыхать от тебя такие удивительные истории, после того как ты спел песенку про сов и мышей!

- Одно другому не мешает, - отвечал, улыбаясь, Радикс. - Почему бы нам и не пошутить? Это только лентяи думают, что у нас здесь скучно. Но, чтобы шутить, надо кое-что знать. А когда ты что-нибудь узнал, ты должен вспомнить хоть на минутку, сколько замечательных людей положили всю свою жизнь для того, чтобы ты мог все это узнать.

- Нет, - сказал Илюша, - теперь я всегда буду помнить об этом!

- Смотри! - сказал Радикс. - Есть ведь такая поговорка: "Давши слово, держись, а не давши - крепись".

- Нет, нет, - сказал горячо Илюша, - нечего тут крепиться! Я не забуду. Только мне бы хотелось еще кое-что узнать про Паскалев треугольник и про гору Пюп-де-Дом.

- Про горку эту мы поговорим в свое время. А насчет треугольника я вот что хотел у тебя спросить. Ты обратил внимание на его второй столбец?

Илюша посмотрел на табличку

1 1 1 1 1 1
1 2 3 4 5
1 3 6 10
1 4 10
1 5
1

и сказал:

- Во втором столбце просто стоят цифры по порядку: раз, два, три, четыре, пять... Что же тут интересного?

- Кое-что любопытное есть и тут. Скажи-ка, пожалуйста, а как бы ты определил этот ряд, если бы тебя спросили, как он устроен?

- Устроен он, по-моему, очень просто. В начале стоит единица, а каждый следующий его член получается путем прибавления той же единицы к предыдущему члену.

- Правильно. А знаешь ли ты, как называется ряд, устроенный по этому правилу? Он называется арифметической прогрессией.

- Ах да! - ответил Илюша. - Это я знаю. Я только не догадался, что ты именно об этом спрашиваешь.

- Значит, ты, наверное, знаешь и то, что такое геометрическая прогрессия?

- Конечно, - ответил мальчик. - Она очень похожа на арифметическую, только там каждый член получается не прибавлением какой-нибудь величины, а умножением на что-нибудь.

- А помнишь ли ты, как называется величина, которая прибавляется к каждому члену арифметической прогрессии, и та, на которую умножается каждый член геометрической?

- Помню. В арифметической эта величина называется разностью прогрессии, а в геометрической - знаменателем прогрессии.

- Ну-ка, - сказал Радикс, - напиши мне арифметическую прогрессию. Первый член у нее, конечно, будет единица, а разность - два.

Илюша взял мел и написал:

1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19...

- А теперь геометрическую.

Илюша написал:

1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512...

- Прелестно! - заметил Радикс. - Это какие у тебя прогрессии?

- Возрастающие.

- В высшей степени очаровательно! Ну, а давай-ка теперь убывающие.

Илюша написал следующее:

1, -1, -3, -5, -7, -9, -11, -13 ...

а затем:

1, 1/2, 1/4, 1/8, 1/16, 1/32, 1/64, 1/128 ...

- Ну-с, юноша, - сказал после этого Радикс, - а способны ли вы дать мне определение той и другой прогрессии?

- Способен. Арифметической прогрессией называется ряд чисел, из которых каждое получается из предыдущего прибавлением постоянного положительного или отрицательного числа, которое называется разностью прогрессии. Геометрической прогрессией называется ряд чисел, из которых каждое равняется предыдущему, умноженному на постоянное число, целое или дробное, которое называется знаменателем прогрессии. Да это ты мне целый экзамен устраиваешь!

- Терпи, казак, - отвечал Радикс. - Без этого дальше и носа сунуть не дадут. Впрочем, может быть, тебе хочется, чтобы тебя не я, а Уникурсал Уникурсалыч экзаменовал?

- Нет уж, спасибо! - воскликнул испуганный Илюша. - Ну его совсем! Начнет опять нести свою околесицу да язвить, пока в

голове полная каша не получится, а потом изволь в этой путанице разбираться.

- Раз мы с тобой вспомнили о нем, так не хочешь ли ты, кстати, решить две его задачки, не то что очень трудные, но все-таки над которыми надо немножко призадуматься? Вот что гласит первая: "В ночь на восемнадцатое июля тысяча пятьсот десятого, если не ошибаюсь, года большой корабль знаменитого флорентийского мореплавателя Америго Веспуччи вошел в устье некоторой большой реки за океаном и стал на якорь. Ночью же с борта корабля была спущена веревочная лестница с пятнадцатью деревянными перекладинами, доходившая как раз до адмиральской шлюпки, на которой Америго и отправился немедленно на берег. Расстояние между смежными перекладинами равнялось одному с четвертью английскому футу, который примерно равен тридцати с половиной сантиметрам. На рассвете начался прилив, вследствие которого вода в реке стала подниматься, будем считать с шести часов утра, со средней скоростью одного метра в час. Спрашивается: на сколько ступеней должен был подняться по веревочной лестнице в четверть девятого утра восемнадцатого июля тысяча пятьсот десятого года знаменитый и отважный мореход Америго Веспуччи, как раз в это время вернувшийся на своей адмиральской шлюпке с берега?"

- Одну минуту, - сказал Илюша. - Я запишу.

- Запиши! Это в таких случаях первое дело!

Илюша начал было записывать, потом остановился.

- Так ведь это... - воскликнул он. - Фу, какая ерунда!

Ха-ха-ха!

- Ну ладно! - засмеялся в ответ Радикс. - А вот и другая задачка: "В старину некий министр должен был выбрать одного из своих подчиненных, чтобы послать его за границу с очень важным порученьем. Так как этот старик министр был уверен, что для этого дела требуется быстро соображать и решать, то, выбрав троих самых способных молодых людей, он велел им стать посредине его кабинета на ковре, так, чтобы они стояли в трех углах некоего равностороннего треугольника. Затем он сказал им: "У меня есть здесь шесть бумажных колпачков: три белых и три зеленых. Сейчас слуги унесут отсюда свет, и я в наступившей темноте надену на голову каждого из вас один из этих колпачков. Затем слуги вновь внесут зажженные канделябры, и тогда каждый из вас, кто увидит у кого-нибудь зеленый колпачок, должен поднять руку. После этого тот, кто догадается, какого цвета колпачок у него на голове, должен опустить руку. Это и будет тот, кому я дам важное поручение". Слуги унесли свет, министр

ощупью надел на каждого из испытуемых колпачок, и свет принесли снова. Как только в кабинете министра стало светло, все трое немедленно подняли руки. Прошло еще секунды две, и один из них опустил руку. Спрашивается: какого цвета были на каждом из троих колпачки и как догадался о цвете своего колпачка самый догадливый, то есть тот, кто опустил руку?"

- Постой-ка, - сказал Илюша, - я так понимаю: если на всех были бы белые колпачки, то ведь никто не поднял бы руку?

- Так! - отвечал Радикс.

- Если только на двоих будут белые колпачки, а на третьем зеленый, то совершенно ясно, что руки поднимут...

А если на двоих зеленые, то какая же будет разница с тем случаем, когда... Ах, догадался! Ясно! Ты понимаешь, я было запутался, потому что мне показалось, что два последних случая совершенно одинаковы. Но когда я подумал о том, что тот, самый догадливый, посмотрев на остальных, тут же и опустил руку, я сообразил, в чем дело. Хорошая задачка!

- Задачка недурная, - усмехнулся Радикс - Однако пора нам вернуться к нашим прогрессиям, где все так ясно и просто. Может быть, ты еще припомнишь, чему равняются их суммы?

- Помню, - сказал Илюша не очень решительно, - только мы еще не проходили прогрессий... И я, понимаешь ли, сам... то есть забрался в учебник, ну и... немного покопался. Так что насчет суммы...

- Как же теперь быть? - спросил его, состроив очень сочувственную мину, Радикс. - Положение получается прямо жуткое! Давай попробуем?

- Давай, - отвечал Илюша, упорно глядя не на своего друга, а на пол.

Но он тут же вскинул в удивлении голову, ибо сбоку раздался быстрый топот маленьких ножек и к ним вбежала целая толпа пресмешных карликов в пестрых колпачках. За ними шла вперевалку какая-то толстая особа, довольно невзрачного вида, жалобно подпиравшая щеку рукой.

Один из карликов выбежал вперед, подбежал к Радиксу, стащил с головы свой пестрый колпачок, выставил вперед правую ножку в красном сафьяновом сапожке и весело воскликнул:

- Привет, Радикс Кристофович! Привет вам, славная Сторона! Арифметическая прогрессия имеет честь явиться по вашему глубокомысленному пожеланию в полном составе! Dixi!

- Молодцы ребята! - ответствовал им Радикс.

Тут из толпы карликов выскочил еще один очень худенький человечек, все тело которого, казалось, состояло из одной

тоненькой черты. Вместо головы у него тоже была черточка, вместо рук и ног - тоже по черточке. Он стал в очень важную позу, строго и серьезно взмахнул своей черточкой-ручонкой.

Сейчас же карлики, которые стояли сзади, вытащили из-за спины свои охотничьи рога и заиграли очень веселый марш, а остальные мигом пустились в пляс, а затем пропели очень звонко и весело своими тоненькими, словно флейта, голосами:

- Мы все друзья и слуги ВОЛШЕБНОГО ДВУРОГА!

Илюша смотрел как очарованный на этот превосходный балет, а когда они умолкли, очень вежливо сказал человечку черточке:

- Вы, если я не ошибаюсь, разность этой прекрасной прогрессии?

Человечек в знак согласия поклонился Илюше.

- У вас прекрасный хор. И танцоры замечательные!

И оркестр тоже очень хороший! Но почему вы назвали Радикса Кристофовичем да еще славной Стороной? И что значит слово dixi?

- А видите ли, - произнес человечек Разность, - ведь нашему другу недавно стукнуло от роду четыреста сорок лет, ибо именно столько лет прошло с тех пор, как математик Кристоф Рудольф в шестнадцатом веке ввел знак радикала.

В Индии его называли корнем, а в Европе нередко еще стороной, разумея, что подкоренное количество знаменует собой площадь квадрата, сторону какового надлежит найти. Могу еще указать, что в "Арифметике" Леонтия Магницкого, напечатанной в Москве в тысяча семьсот третьем году (в книге, по которой учился сам Ломоносов), корень обозначался прописной латинской буквой R и именовался "радикс" или "бок", то есть "сторона". А "dixi" значит: "Я сказал все, что собирался сказать".

- Ах вот как! - сказал Илюша.

Он хотел еще спросить кое о чем у этого любопытного человечка, но в это время Радикс произнес:

- Ну, друзья, будьте так любезны!

Карлики мигом выстроились в одну линию, причем человечек Разность суетился, мелькая между ними и расставляя их по порядку. Толстая женщина уныло стояла в сторонке, не принимая в этой веселой толкотне никакого участия.

Когда карлики выстроились, на их красивых кафтанчиках вдруг появились блестящие буквы:

a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, ... , a_{n-1}, a_n.

- Это обозначения членов прогрессии. Можно было бы, конечно, их пометить просто буквами a, b, c и так далее, но

азбука ведь довольно коротенькая, а номеров у нас сколько хотите, - пояснил человечек Разность - Энный член-это последний, "зн минус первый" - предпоследний, "эн минус второй" - третий с конца. Вот и все.

Тут же все буквы исчезли, а на кафтанчиках карликов появилась та самая прогрессия, которую недавно писал Илюша:

1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19...

Потом карлики вдруг быстро стали парами. Единица стала в пару с девятнадцатью, тройка с семнадцатью, пятерка с пятнадцатью, семерка с тринадцатью, а девятка с одиннадцатью.

Илюша посмотрел с удивлением и тут же заметил, что если взять некоего карлика от начала ряда, а потом найти ему пару, отсчитав то же число с другого конца, то сколько таких пар ни составляй, все они дадут в сумме одно и то же число. Снова у карликов цифры заменились буквами, и Илюша увидел, что к первой паре стоят a_1 и a_n, во второй - a_2 и a_{n-1}, в третьей - a_3 и a_{n-2}, и так далее. Когда он это рассмотрел, из толпы карликов вылез какой-то невзрачный лилипут в длиннополом сюртуке, который тащил такие большие конторские счеты, что они были чуть не больше его самого, хотя, в сущности, и лилипут и счеты были очень маленькие. Он подошел к Илюше и пробормотал:

- Я - Число членов прогрессии. Понятно?

Илюша кивнул ему. Тогда карлики снова выстроились в ряд, а за ними появился совершенно такой же ряд, но только расположенный в обратном порядке. Карлики обоих рядов приблизились друг к другу и a_n, опять стали парами: a_1 с a_n, a_2 с a_{n-1} и так далее. Но только теперь это произошло очень быстро, потому что им не пришлось перебегать от начала ряда к его концу, так как второй ряд уже был расположен в обратном порядке.

Снова буквы сменились у всех на кафтанчиках цифрами, а рядом со счетоводом появились два маленьких человечка, совершенно таких же, как первый и последний члены ряда. Счетовод Числочленов вытащил откуда-то знак равенства, весьма важно оправил свой долгополый костюм, на котором появилась цифра "10", взял под руку двух маленьких человечков и стал рядом с ними по левую сторону знака равенства. Справа же стояли парами два ряда карликов. Счетовод взмахнул рукой, и один из рядов исчез, но одновременно крайние карлики взяли в руки скобки и рядом появился человечек с надписью "2". Получилось равенство:

$$10 \cdot (1 + 19) = 2 \cdot (1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17 + 19)$$

Илюша посмотрел и сообразил: из каждой пары членов

получается 20, членов всех десять - выйдет 200. Это с правой стороны. А с левой счетовод Числочленов равен десяти, а сумма пары 1 и 19 (которая равна сумме любой пары, если пары подбираются, как было сказано выше) дает 20. Десять умножим на двадцать - опять получим 200. Все правильно!

Затем счетовод Числочленов вытащил из своего долгополого сюртучка предлинную черту, посмотрел на нее, расправил, потом положил на пол, и все трое из левой части равенства стали на нее. Засим он поманил пальцем человечка-двойку, который подлез под длинную черту и, оказавшись замечательным силачом, приподнял всю левую часть над собой.

Толстая женщина подошла к ним, а карлики отошли в сторону. Илюша хотел было спросить у этой толстухи, кто она такая, но она проскрипела:

- Я - Сумма. А ты и не признал!

И на ее платье показалась цифра "100".

Илюша сильно покраснел, но ничего не сказал. Перед ним стояло равенство:

$[10 \cdot (1 + 19)] / 2 = 100.$

Все было правильно. Затем цифры быстро сменились буквами, и получилась формула:

$S = [n (a_1 + a_n)] / 2$

Илюша внимательно посмотрел на нее и уверенно произнес:

- Сумма членов арифметической прогрессии равняется половине произведения числа членов на сумму первого и последнего членов.

Счетовод Числочленов немедленно с большой поспешностью соскочил вниз и стал засовывать свою черту в карман, страшно гремя костяшками счетов, которые он боялся выпустить из рук. Карлики крикнули все хором:

- Мы все друзья и слуги ВОЛШЕБНОГО ДВУРОГА!

И тотчас же все исчезло, будто вовсе не бывало.

- Ясно? - спросил его с улыбкой Радикс.

- Ясно, - ответил Илюша.

Но в это время снова раздались многочисленные шаги, и появилась новая толпа маленьких пузатеньких человечков, однако эти вели себя гораздо более важно и церемонно, чем первые. Изумительное равнодушие и важность были написаны на их толстеньких сморщенных личиках. Из толпы отделился тощий, длинный человечек в высоком цилиндре, за ленту которого была засунута буква q. Он подошел к Илюше, кивнул и показал двумя длинными пальцами на букву q на своем цилиндре. "Наверно, это знаменатель прогрессии!" - подумал Илюша, решив, что это к ним

явилась геометрическая прогрессия в полном составе. Человечек с буквой q посмотрел на него и немедленно кивнул, точно он услыхал, что подумал Илюша. Человечки неторопливо стали в ряд. На их жилетках появились сперва буквы, точь-в-точь такие же, какие были у карликов; a_1, a_2, a_3 и так далее до a_n. А затем буквы исчезли и появились цифры: 3, 6, 12, 24, 48, 96, 192.

Долговязый человечек Знаменатель вытащил из-за ленты своего цилиндра букву q, что-то к ней приладил и опять вставил за ленту, где теперь появилось:

$q = 2$.

"Знаменатель равен двум!" - подумал Илюша.

- 192 -

Потом человечек достал из своих необъятных карманов две скобки, поставил их с обеих сторон прогрессии, а между человечками поставил по плюсу. Затем подошел к первому члену прогрессии, без труда приподнял его и понес за скобки. Но маленький человечек сопротивлялся и вырывался из рук. По-видимому, что-то было не по правилам. Человечки в скобках тоже волновались.

Тогда Знаменатель пожал плечами и отпустил человечка с надписью "3", и тот побежал вдоль ряда. На его месте появился другой - худой, с надписью "1", и каждый из членов прогрессии, мимо которого он пробегал, моментально сменялся другим, так что, когда человечек, запыхавшись, закончил свои бег и стал рядом, вне скобок, получилось:

$3 \cdot (1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64)$.

"Ага! - подумал Илюша. - Значит, он их все сложил, а первый член вынес за скобку".

Человечек Знаменатель утвердительно кивнул Илюше.

Мальчик подумал, что этот безмолвный учитель, который обладает столь тонким слухом, что слышит даже и то, чего ты не произносил, - довольно интересная новость!

Тут же цифры на жилетках человечков заменились буквами:

$a_1(1 + q^1 + q^2 + q^3 + q^4 + q^5 + q^6 + ... + q^{n-2} + q^{n-1})$.

"Правильно! - решил про себя Илюша. - Просто он заменил цифры алгебраическими обозначениями. Тут в конце стоят q^{n-2} и q^{n-1} - в том смысле, что прогрессию по тому же правилу можно тянуть вправо до любого члена. А почему членов у нас n, а старший показатель q не n, а (n-1)? Ах да!

Ведь впереди есть еще единица, то есть q°. Значит, один и еще (n-1) - вот и выйдет опять ровно n. Ясно! Значит, в сумме всякой геометрической прогрессии Можно взять первый член за скобку, а в скобках останутся степени знаменателя".

Человечек Знаменатель глянул мельком на Илюшу и,

заметив, что тот все понял, даже не счел нужным кивнуть ему.

- 193 -

Затем он поднял свой длиннейший указательный палец правой руки вверх, покачал им торжественно, как бы приглашая Илюшу отнестись повнимательнее к тому, что он сейчас ему покажет. После этого он взял три первых члена из скобок, поставил их перед Илюшей и снова заключил в скобки.

$(1 + q + q^2)$

Затем Знаменатель показал Илюше на эту тройку знаков и выразил на своем лице некое недоумение, как бы приглашая Илюшу объяснить: что он перед ним поставил? Илюша посмотрел на него, потом на троих человечков и ничего не мог придумать. Знаменатель недовольно нахмурился, сделал знак человечкам, и тогда первый и третий поменялись местами. Знаменатель снова сделал недоуменную мину и опять показал Илюше на тройку приятелей. Илюша посмотрел. Перед ним стояло:

$(q^2 + q + 1)$

Это было то же самое, только два члена выражения поменялись местами.

"Э! - подумал Илюша. - Да это просто неполный квадрат суммы!"

Не успел он это подумать, как вдруг откуда-то раздалось ядовитое хихиканье, и слишком хорошо ему известный голосок вездесущего Уникурсала Уникурсалыча произнес очень отчетливо:

- Ах, какой догадливый мальчик! А до того, как переставили, это, значит, не было неполным квадратом суммы? Вон как!

Илюша густо покраснел, хотел было что-то ответить, но не мог придумать ничего дельного, а человечек Знаменатель радостно закивал ему в знак согласия, немедленно вычел из самого себя единицу, залез в скобки, и перед Илюшей появилось:

$(q^2 + q + 1)(q - 1) = ?$

"Неполный квадрат суммы, - подумал Илюша, - если его умножить на разность первых степеней, будет равен разности кубов. Все ясно. Но к чему это он ведет?"

Человечек Знаменатель хитро подмигнул Илюше, как бы говоря: "Сейчас узнаешь!" - и перед мальчиком появилось:

$(q^2 + q + 1)(q - 1) = q^3 - 1.$

"Ну конечно!" - подумал Илюша. Затем скобки немного раздвинулись, в них забрался еще человечек. Теперь получилось:

$(q^3 + q^2 + q + 1)(q - 1) = q^4 - 1.$

- 194 -

"Ишь ты! - подумал Илюша. - Как же так выходит?" Но когда он попробовал в уме перемножить скобки левой части, то

убедился, что как раз так и получается. "Действительно, - подумал он, - когда я умножу q^3 на q, то выйдет q^3; когда умножу 1 на (- 1), то получится -1, а все остальное взаимно уничтожается, потому что от умножения на q всех членов, кроме первого, я получу q^3, q^2, q и все будут с плюсом, от умножения на (-1) всех членов, кроме последнего, я получу те же q^3, q^2, q, но все будут с минусами. Значит, только и останется q^4 и - 1. Все верно!"

Тогда в скобки влез еще один человечек, и вышло:

$(q^4 + q^3 + q^2 + q + 1)(q - 1) = q^5 - 1$.

Тут Илюша, рассуждая совершенно таким же образом, пришел снова к заключению, что и это тоже правильно.

А затем человечки стали так:

$(q^{n-1} + q^{n-2} + ... + q^4 + q^3 + q^2 + q + 1)(q - 1) = q^n - 1$.

"Так, - подумал Илюша. - Тут начинается с q^{n-1}. То-есть он хочет сказать, что это правило годится для любой степени".

Подумав немного, Илюша убедился, что Знаменатель совершенно прав.

Вслед за этим его новый приятель быстро схватил скобочку (q-1) и перенес в знаменатель правой части. Получилось:

$q^{n-1} + q^{n-2} + ... + q^4 + q^3 + q^2 + q + 1 = (q^n - 1) / (q - 1)$.

Затем человечки быстро поменялись местами, и вышло:

$1 + q + q^2 + q^3 + q^4 + ... + q^{n-2} + q^{n-1} = (q^n - 1) / (q - 1)$.

Теперь человечек Знаменатель изобразил на своем личике самую приятную улыбку и снова показал получившуюся формулу Илюше, как бы приглашая его полюбоваться тем, что получилось.

Илюша внимательно посмотрел на формулу и подумал:

"Значит, налево стоит сумма геометрической прогрессии, у которой первый член равен единице. И теперь он получил выражение для этой суммы".

Знаменатель улыбнулся и привел двух человечков, у которых на жилетках стояла цифра "3". Затем между ними возник знак равенства, а у левого человечка тройка заменилась буквой, и вышло:

$a_1 = 3$.

"Так! - подумал Илюша. - Ну, я уж это знаю: первый член равен тройке".

Тогда у обоих человечков на жилетках появились одинаковые буквы. Человечек Знаменатель поставил одного к левой части своего равенства, а другого - к правой, и вышло:

$a_1(1 + q + q^2 + q^3 + q^4 + ... + q^{n-2} + q^{n-1}) = a_1 (q^n - 1) / (q - 1)$.

"Обе части он умножил на первый член прогрессии, - подумал Илюша. - Это можно, конечно. Ну, и что ж у нас теперь вышло? Эх! Да это теперь как раз и получилась сумма всей прогрессии!"

В это время появилась какая-то длинная пожилая дама, которая взглянула на Илюшу с возмущением и пожала в ужасе плечами. По-видимому, это была очень нервная особа, потому что человечек Знаменатель обращался с ней до крайности предупредительно. Он подвел ее к своему равенству.

Рыжая дама горестно вздохнула, и на груди ее смутно вырисовалась буква S. "Сумма!" - подумал Илюша, а человечек Знаменатель сочувственно кивнул ему, как бы говоря:

"Пренеприятная особа! Ну, да ведь ничего не поделаешь!"

И получилось следующее равенство:

$S = a_1(1 + q + q^2 + q^3 + q^4 + ... + q^{n-2} + q^{n-1}) = a_1 (q^n - 1) / (q - 1)$.

= a, с чем Илюша не мог не согласиться, а затем вся серединка формулы исчезла, и появилось окончательное выражение суммы:

$S = a_1 (q^n - 1) / (q - 1)$

Илюша громко и отчетливо произнес:

- Для того чтобы найти сумму геометрической прогрессии, нужно первый член прогрессии умножить на дробь, числитель которой равен разности между знаменателем прогрессии в степени, равной числу членов, и единицей, а знаменателем этой дроби является разность между знаменателем прогрессии и единицей.

Затем человечек Знаменатель разорвал свою дробь надвое:

$S = a_1 [q^n / (q - 1) - 1 / (q - 1)]$

а потом открыл скобки:

$S = a_1 q^n / (q - 1) - a_1 / (q - 1)$

А вслед за тем Знаменатель еще раз поглядел на Илюшу и важно поклонился ему.

На лице его было написано полное удовлетворение всем происшедшим.

Рыжая дама сжала свои костлявые пальчики и смиренно посмотрела вверх. Илюша тоже машинально поглядел вверх и вдруг увидел, что на маленьком парашютике спускается крохотный, с кулачок, плюшевый Мишка.

Мишка спустился, встал на задние лапки и сказал Илюше, что его зовут Эн.

- Значит, ты число членов прогрессии?

- Угадал! - пискнул Мишка.

Вслед за этим началось акробатическое представление. Рыжая дама, стараясь не глядеть на Илюшу, стала слева. За ней в воздухе повис знак равенства. Затем Знаменатель повесил в воздухе две большие дробные черты, между ними приладил

длинный тонкий минус. При этом он вдруг три раза щелкнул пальцами и превратился из одного человечка Знаменателя в троих, совершенно одинаковых. Один из них забрался на первую из двух дробных черт, рядом с первым членом прогрессии.

- 197 -

Плюшевый Мишка вдруг страшно оживился, прыгнул, точно кузнечик, и прямо с пола перелетел ему на тулью цилиндра. Получилась снова уже известная Илюше формула:

$S = a_1q^n / (q - 1) - a_1 / (q - 1)$

Буква n, которую Мишка столкнул своей плюшевой ланкой с цилиндра человечка Знаменателя, кое-как приподнялась с пола и жалобно пропищала:

- Я буду больше единицы!

В ответ на это плюшевый Мишка, очень удобно примостившийся на краю цилиндра Знаменателя, начал пыхтеть и понемножку толстеть, а дама начала понемногу расти вверх.

Илюша подумал: "Эн увеличивается, и сумма растет.

Ну да, так и должно быть, конечно! Чем больше будет число членов, тем и сумма будет больше. Ясно!"

А Мишка посмеивался и все толстел. Дама тоже все тянулась вверх. Мишка уже стал ростом с кошку, а дама выросла примерно вдвое. Самое странное при этом было то, что она не толстела, а только тянулась вверх и становилась все более тощей. Мишка вырос до размеров целого теленка, так что оставалось только удивляться, как он умещается на цилиндре, уцепившись за него задней лапой. Длинная дама уже даже начала как-то странно покачиваться, точно малейший ветерок мог ее свалить. А Мишка стал как настоящий Топтыгин.

Вдруг дама взвизгнула, ее головка дернулась вниз и вбок, вся она свернулась восьмеркой и упала на бок. А громадная задняя лапа Мишки тоже как-то завинтилась, вроде лежащей на боку восьмерки.

Илюша посмотрел на это и обернулся к Радиксу за помощью.

- 198 -

- Эта упавшая на бок восьмерка, - пояснил тот, - есть знак бесконечности. Если число членов растет безгранично, то и сумма прогрессии растет так же безгранично. В таком случае говорят, что и число членов и сумма прогрессии являются бесконечно большими величинами.

Илюша глянул искоса на Радикса и спросил:

- Так это, значит, и будет бесконечность?

- Н-да... - отозвался Радикс таким недовольным голосом, будто из него кто-то силком вытянул это "н-да"...

Он, видимо, был сильно не в духе.

- Послушан, - сказал Илюша как только умел любезно, - мне ужасно неприятно, что ты так на меня сердишься, но я, честное слово, не хотел тебя сердить. Честное слово! И я буду очень стараться. Только уж ты, пожалуйста, расскажи.

Значит, эта штука будет гораздо больше даже того поразительного архимедова числа, в котором восемьдесят квадриллионов нулей? Что же это за число такое?

Выслушав это, Радикс Нахмурился еще пуще. Видно было, что бедный Илюша, сам того не желая, задел беднягу за живое.

- Начнем с того, - заявил Радикс, - что это вовсе не число! Древний грек, замечательный философ древности Аристотель, который жил в четвертом веке до нашей эры, так говорил о бесконечности. "Она, - говорил Аристотель, - существует только в возможности". Он говорил еще, что это не такая величина, дальше которой ничего нет, а такая, дальше которой всегда есть еще что-то. Как это понимать? А вот как.

Когда мы говорим, что какая-нибудь величина является бесконечно большой, то, значит, мы говорим о величине, во-первых, переменной, а во-вторых, неограниченно возрастающей, вот как наш плюшевый Мишка или Сумма в то время, когда они растут и растут. Какие бы ты ни ставил вехи на пути такой переменной величины, она все равно уйдет дальше их. Если ты перенесешь эти вехи затем еще дальше, она и за те уйдет, и так всегда будет, как бы ты далеко ни забирался.

Илюша посмотрел на формулу:

- Значит, когда ты говоришь, что наша сумма бесконечно большая, то нельзя понимать, что она стала "бесконечностью", а это только значит что она становится все больше и больше?

- Да. И это потому, что Мишка наш растет.

Попробуй-ка назначь какую-нибудь границу для суммы, назови какое-нибудь число, самое большое, какое тебе придет в голову.

- Ну, например, децильон. Это, помнится, десять в тридцать третьей степени, - подсчитал Илюша.

- Это очень просто, - ответил Мишка. - Ты требуешь, чтобы сумма

$S = 3 \cdot (2^n - 1) / (2 - 1) = 3 \cdot (2^n - 1)$

стала больше 10^{33}. Но 2^{10} больше, чем 10^3, значит, 2^{110} уж наверно больше, чем 10^{33}, а у нас там еще множитель "три" в запасе. Но на самом деле не успею я и до ста дорасти, как сумма станет больше твоего числа.

- Верно! А если взять децильон децпльонов (это уже больше девятого архимедова числа), тогда что ты будешь делать?

- Тогда мне придется еще подрасти, - отвечал Мишка. - Вот когда я еще вдвое вырасту, до двухсот, сумма станет больше твоего числа 10^{66}. Можешь проверить, коли не лень.

- И так будет, - сказал Радикс, - всегда, какое бы ты число ни назначил. У нас это для краткости выражают так: когда число членов прогрессии со знаменателем, большим единицы или даже равным единице, неограниченно возрастает, сумма стремится к пределу, равному бесконечности.

- Вот тут уж я не понимаю, - ответил Илюша. - Как это - стремится к пределу, когда она как раз возрастает беспредельно? И что это значит - равному бесконечности? Как может быть что-нибудь равно бесконечности?

- Ты совершенно прав, сказал Радикс - Гораздо было бы лучше говорить, что ни к какому пределу она не стремится, ни к чему не приближается, а, наоборот, от всего удаляется... Но, видишь ли, бывают очень важные случаи, когда при таком же поведении Мишки переменные величины взаправду приближаются к каким-то числам, то есть к своим пределам.

- 200 -

Вспомни синьориту Одну Энную: при неограниченном возрастании "эн" она принимала все меньшие и меньшие значения; и про нее мы имеем право сказать, что она приближалась или стремилась к нулю, как к своему пределу.

Поэтому у нас и для бесконечно больших величин, возрастающих неограниченно, употребляют условно такой же способ выражения и говорят, что они "стремятся к бесконечности".

- Да... - задумчиво протянул Илюша. - Я понимаю, что синьорита Одна Энная не может стать равной нулю, а только стремится к нулю. Но ведь можно взять другой пример и выбрать именно такую величину, которая становится действительно равной нулю. Ну вот, скажем, беру я две прямые и буду одну поворачивать так, чтобы угол между прямыми уменьшался. Значит, когда я достигну того, что прямые мои станут параллельно, угол между ними будет просто равен нулю? Так я говорю или нет?

- Так, - ответил Радикс. - Но что же ты хочешь этим сказать?

- Не может ли и с бесконечностью так получиться, что какая-нибудь величина станет действительно равной бесконечности, а не только, как ты говоришь, будет стремиться к ней.

Вот, например, с этими прямыми. Я возьму какой-нибудь отрезок и к нему в одном конце перпендикуляр, а в другом - наклонную. Они пересекутся, скажем, на расстоянии x от основания перпендикуляра. Если поворачивать наклонную, чтобы

сделать ее параллельной перпендикуляру, то х будет ведь стремиться к бесконечности в том самом смысле, как ты это говоришь, но когда отрезки станут параллельными, то ведь х и будет равным бесконечности...

Не успел Радикс ответить мальчику на это, как позади них раздалось такое сердитое пофыркивание, что Илюша невольно обернулся. Он увидел, что неподалеку от них стоит все тот же несносный Доктор Замысловатых Узлов и язвительным шепотом говорит следующее:

- О величайшая и пресветлая Лилавати, богиня волшебного мира! Кровь сохнет в жилах моих и уши увядают, когда я слышу эту беспросветную чепуху, что льется из уст этого непросвещенного отрока!

Засим грозный доктор Уникурсальян обратился к Илюшей возопил:

- Отвечай мне: во-первых, что же это будет за х? Стоит только достигнуть параллельности, и наклонная перестанет быть наклонной. И останутся два перпендикуляра, которые, как, может быть, и тебе известно, ни в какой точке пересекаться не умеют. А ведь, по-твоему, х, как это донеслось до слуха моего, есть именно расстояние от основания перпендикуляра до точки, которой нет?

- 201 -

- Ну хорошо, я скажу иначе, - возразил Илюша. - Просто возьму перпендикуляр и буду двигать по нему точку, начиная от какой-то начальной - той, которая была основанием перпендикуляра, - все дальше и дальше так, чтобы расстояние х от начальной точки стремилось к бесконечности. Так вот, когда я вместо отрезка перпендикуляра до удаляющейся точки возьму всю эту часть перпендикуляра, то есть весь луч, идущий в одном направлении от начальной точки, то тогда можно уж сказать, что этот луч имеет длину, равную бесконечности, то есть что расстояние х уже стало действительно бесконечностью.

- Сказать можно все, что угодно, - сердито отвечал командор, - а какой в этом будет смысл? Что вы разумеете под словом "длина", юноша? Если я вас правильно понял, то вы имели в виду длину отрезка, а ведь это не что иное, как число, которое можно получить, если этот отрезок измерять, откладывая на нем единицу длины. Но перед вами не отрезок, а луч, и откладывать на нем единицу можно сколько угодно раз, но от вашей цели вы при этом будете все так же далеки, как в самом начале, хотя бы вы и отложили единицу децильон децильонов раз. Ибо попробуйте, сделав это, удалиться на столь же почтенное расстояние от вашей работы и посмотреть издали: вам покажется, что вы еще с места не сдвинулись. Конечно, можно сказать,

выражаясь, однако, совершенно условно, что "длина луча равна бесконечности", по и это опять будет иметь только тот смысл, что сколько бы раз ни откладывал ты единицу меры вдоль луча, этому не будет конца, то есть какое бы число ни назначить, единицу можно отложить еще большее число раз.

- А почему же, - спросил Илюша, - нельзя просто сказать, что единица отложится "бесконечное число раз"? Ведь мы говорим же, что число всех чисел бесконечно или что на отрезке умещается бесконечное число точек...

- И здесь эти выражения имеют тот же самый смысл, - отвечал Радикс (ибо Магистр Деревьев уже исчез). - Сосчитать все точки на отрезке невозможно. Когда ты говоришь, что число точек на отрезке бесконечно, то только признаешься в том, что сколько бы точек ты ни отметил, всегда можно найти на отрезке еще одну, не отмеченную, и так дальше, без конца. Недаром же мы произносим слово "бес-конечность".

Вспомни Архимеда: ведь как раз его задачей и было доказать современникам, что какое бы большое число ни назвать, всегда можно построить еще большее.

- 202 -

- А все-таки непонятно: почему же мне не называть бесконечность числом? - спросил Илюша. - Ведь если говорить, что длина луча равна бесконечности или что число точек на отрезке равно бесконечности, то ведь всякому будет ясно, что это значит...

- Ну что ж, - ответил Радикс, - если употреблять эти выражения в том смысле, в каком мы с тобой только что говорили, то в этом ничего плохого нет. Но когда ты говоришь:

"Что-то превратилось в бесконечность", нельзя забывать, что это имеет определенный смысл, ибо то, что "превращается" во что-нибудь, перестает уж быть тем, чем оно было до этого: отрезок превращается в луч, множество чисел, каждое из которых ты можешь рассмотреть и назвать в отдельности, "превращается" в бесконечное множество всех чисел, в котором пересмотреть до конца элементы один за другим уже не удастся. Это "превращение" - очень хитрая штука. Ты можешь, конечно, вообразить, что тянул, тянул отрезок да и растянул его в луч, как делал с перпендикуляром, поворачивая наклонную до параллельности с ним. Но это ты только воображаешь себе. На самом деле бесконечный луч построить нельзя, а можно только представить себе бесконечный процесс удлинения отрезка. И то, что ты представляешь себе в качестве результата этого процесса, это уж совсем не отрезок, а нечто существенно отличное от отрезка.

- И затем, - сказал Илюша, - я вот еще что хотел спросить. Ты говоришь, что количество точек на отрезке прямой бесконечно, то есть эти точки нельзя исчерпать, перебирая их одну за другой. Ну хорошо, а если сказать, что бесконечность есть именно такое число, которое выражает количество точек на отрезке или вообще количество каких-либо вещей, процесс пересчитывания которых закончить невозможно?

- В некотором, строго определенном смысле можно и так говорить. Но как только ты скажешь, что бесконечность - число, то сейчас же возникает новая опасность. Числа ты можешь сравнивать по величине, складывать их, вычитать, а с бесконечностью в том смысле, как ты ее только что определил, нельзя обращаться, как с числами...

- Ты расскажи, отчего нельзя, - попросил Илюша.

- Вот отчего. Если луч удлинить на десять сантиметров, присоединив к нему в его начальной точке отрезок именно этой длины, то станет ли после этого длина нового луча действительно больше на десять сантиметров или останется прежней? Ведь если снова измерять новый луч, не зная, прибавляли ли к нему еще что-нибудь или нет, то обнаружить разницу по сравнению с тем, что было, ты не сможешь. И в том и в другом случае ты получишь бесконечную последовательность отложенных единичных отрезков и можешь даже их наложить друг на друга: первый на первый, второй на второй и так далее. Поэтому говорить, что второй луч на десять сантиметров длиннее первого, - это значит произносить фразы, не имеющие никакого смысла. Вот что получается со сложением.

- 203 -

А с вычитанием еще того хуже: накладывая два луча друг на друга, я могу сдвинуть при этом их начальные точки так, чтобы между ними образовался отрезок любой длины. А следовательно, если ты напишешь, что бесконечность минус бесконечность есть нуль, то и в этом не будет никакого смысла.

Значит, такое равенство может привести к грубым ошибкам.

Мало того, я из одного луча могу соорудить два точно таких же, так что и с делением и с умножением тоже получается неладно. Поэтому раз с бесконечностью нельзя обращаться, как с числом, то уж лучше совсем и не называть ее числом.

- Постой, как же так: из одного луча два? - спросил Илюша.

- А это тебе объяснит Мишка в следующей схолии, - ответил Радикс.

- 204 -

Схолия Двенадцатая,

где читатель снова встречает Мишеньку, который показывает талисман, замечательный своей полной неистребимостью, а Радикс рассказывает поучительную сказку об одном остроумном директоре гостиницы, а также о том, как Галилей подсчитал однажды, сколько всего есть на белом свете полных квадратов, и о том, как на школьном вечере все танцевали вальс. Тут наш герой проявляет необычайный интерес к прядильному делу, однако с этой проблемой приходится обождать, ибо в это время Илюша должен срочно разрезать одно яблоко на семнадцать миллионов частей. Далее идет очень сложное обсуждение вопроса о том, существует ли особая форма для кривых и какова она. А после того, когда все по этой части благополучно разрешается при помощи прямого угла, так что Илюше удается даже выяснить, какие у этих кривых корни, друзья наши отправляются в лес, где их встречают очень странные существа, наперерыв расхваливающие свой товар, сообщая, кстати, Илюше рецепт, с помощью которого жизнь человека удлиняется ровно вдвое. Наконец друзья приходят в прелестную столовую, где один подслеповатый повар принимает Илюшу в своем кулинарном рвении за гриб.

- Все это может быть и так, - начал снова Илюша, - но мне все-таки хотелось бы узнать у тебя еще кое-что об этой бесконечности. Как ни удивительны те числа, о которых мы говорили с тобой раньше, все-таки это ужасно странное число...

- 205 -

- Фф-у! - в величайшем негодовании воскликнул Радикс. - Я же тебе говорил, что это не число! Запомни это раз навсегда! Если ты не хочешь сейчас же и немедленно поссориться со мной, то лучше и не заикайся об этом.

- Хорошо, хорошо! - торопливо согласился Илюша. - Я только...

- Только что? - раздался тоненький голосок.

Илюша обернулся и увидел старого знакомого - плюшевого Мишку. Мишка хихикнул и сказал:

- Я страшный! Я удивительный! Я очень страшный! Это потому, что у меня есть талисман. Замечательная штучка!

Тут Мишка засунул лапку куда-то за спину, и Илюша увидел, что у этого смешного зверька в его плюшевой шубе сзади устроен еще карманчик. Мишка вытащил большую новенькую серебряную монету и с торжеством показал Илюше.

- На-ка! - важно провозгласил Мишка. - Это, по-твоему, что? Это, брат, неразменный рубль.

Илюша с удивлением взял в руки монету. На ней посреди узора из лежащих на боку восьмерок было выгравировано:

"НЕРАЗМЕННЫЙ РУБЛЬ. Отчеканен высоким повелением ВОЛШЕБНОГО ДВУРОГА и в силу оного имеет дивное хождение и чудное взлетание наравне с чудесами и дивами, каковые при его помощи очень легко приобрести. Беспрепятственно разменивается, нимало не размениваясь, на страх и удивление самым непослушным задачкам".

- Так... - нерешительно произнес Илюша, прочитав эту странную надпись и не зная, чему тут можно верить.

- А знаешь ли, как этот аппарат действует? В этом-то весь секрет! - С этими словами Мишка разломил рубль пополам.

И обе половинки вдруг стали целыми рублями! Самое странное было, однако, в том, что Илюша отлично видел, как Мишка разламывал рубль, но уследить, когда и как обе половинки снова стали целыми рублями, он не мог. Может быть, в этом и заключается секрет неразменного рубля?

Потом Мишка положил эти два рубля друг на друга, и они снова превратились в одну целую монету.

- Видал? - победоносно сказал Мишка. - Вот рублик!

Вот так Мишкина монетка! Вот меня все и боятся! А почему?

Потому что у меня есть неразменный рублик.

Илюша посмотрел с удивлением на равнодушную мину Радикса.

- Что это значит?

- Вот как? - с подчеркнутым удивлением сказал Радикс. - Значит, ты ничего не понял? Достойно сожаления, молодой человек! Ну, в таком случае я расскажу тебе другую историю, не менее поучительную, но, быть может, более понятную... В некотором царстве случилось великое празднество, на каковое съехалось несметное число гостей. И накануне праздника они

явились в столицу этого царства и все стали толпой около гостиницы. Выходит директор гостиницы. Спрашивает: "Скажите, пожалуйста, дорогие гости, сколько вас?"

Ему отвечают: "Нас бесчисленное множество. Вот наши делегатские билеты. На них стоят номера от единицы до бесконечности". Директор говорит: "Так как в моей гостинице бесконечное число номеров и как раз они перенумерованы от единицы до бесконечности, то я размещу вас всех. Прошу вас, входите!" И все разместились. Не прошло и часа, как снова на площади перед гостиницей собралась такая же толпа. Снова выходит директор. Снова спрашивает: "Сколько вас, дорогие гости?" И опять ему отвечают: "Столько же, сколько было и в первой партии!" Директор говорит: "Так как в моей гостинице как раз бесконечное число номеров, то я размещу вас всех. Пожалуйста, входите!" Они входят. И что же он делает?

Он перемещает всю свою первую партию гостей. Гостя из номера первого он переводит в номер второй, из номера второго в четвертый, из номера третьего в шестой, из номера четвертого в восьмой, из номера пятого в десятый и так далее. Таким образом, у него все нечетные номера оказались свободными, и там-то он и разместил вторую партию гостей, которая, как и первая, заключала в себе несметное число приезжих.

Понял?

- Ничего не понял! - воскликнул Илюша.

- Прекрасно! - отвечал Радикс. - Начнем сначала. Ты знаешь, что такое четные числа?

- Ну конечно. Это те, которые делятся на два.

- Верно. А нечетные?

- Ну, которые на два не делятся: три, пять, семь и так далее.

- Приятно слышать. Какой милый, догадливый мальчик!

Так вот, Мишкина задачка, а также задачка с бесконечной гостиницей заключаются вот в чем. Если взять все числа, то есть четные и нечетные, ведь это будут все натуральные числа, не правда ли?

- Ну конечно, потому что, кроме четных и нечетных, больше никаких нет. Так они и идут одно за другим: нечетное, потом четное, потом опять нечетное и так далее без конца.

- Одно за другим, по очереди?

- Конечно! Что ты меня спрашиваешь о таких вещах?

Уж это, кажется, до того просто, что малое дитя знает!

- Ах, так это просто, по-твоему? Ну посмотрим, что ты дальше скажешь! Так, значит, выходит, что четных и нечетных чисел одинаковое количество.

- Конечно, - ответил Илюша. - Если взять, например, до какого-нибудь четного числа, ну хоть до этого нонильона децильонов, то будет поровну и четных и нечетных.

- Так и запишем. Попробуем только взять еще немножко подальше, а то для Мишкиной задачки это крохотное числишко - нонильон децильонов - не подходит. Возьмем до бесконечности. Так вот, ответь мне, пожалуйста: если мы возьмем все числа, а потом выберем только одни четные и напишем в два ряда - в одном ряду будут все: и четные и нечетные, а в другом одни четные, - так в котором ряду будет чисел больше, в верхнем или в нижнем?

- Ну конечно, во втором ряду будет вдвое...

Но тут почему-то Илюша замолчал, и на его лице изобразилось полнейшее недоумение.

- Ну-с, - сказал Радикс, - я вас слушаю! В котором ряду будет больше, в верхнем или в нижнем?

Илюша грустно вздохнул и сказал:

- Должно быть во втором ряду вдвое меньше, а на самом деле...

- А на самом деле? - повторил вопросительно Радикс. - Да что тут долго думать! Вон они, посмотри-ка!

Илюша обернулся, посмотрел на стену и увидел:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14...

2 4 6 8 10 12 14 16 18 20 22 24 26 28...

Оба ряда тянулись вправо ужасно далеко, но как ни заглядывал Илюша вправо, как он ни напрягал зрение, оба они шли совершенно вровень, а конца им не было.

- Так как же? - опять спросил Радикс.

- Выходит, что их - и тех и других - одно и то же количество.

Илюша пожал плечами.

- Не понимаю! - сказал он. - Вижу, что одно и то же количество, и соображаю, что сколько ни тяни верхний ряд, нижний от него отставать не будет, потому что нижний - это тот же верхний, только умноженный на два, но понять не могу.

Не могу, потому что нижний в то же самое время есть часть верхнего. Но ведь часть меньше своего целого?

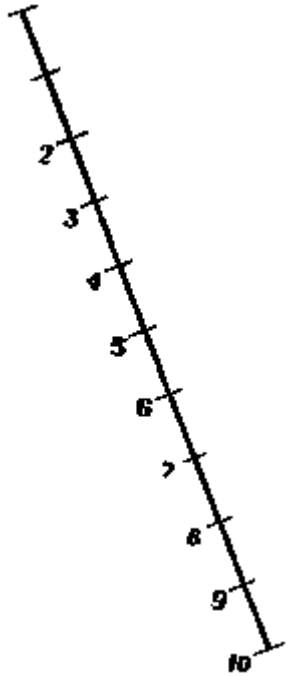
- Меньше, покуда речь идет о числах, о конечных величинах. А раз ты имеешь дело с бесконечностью, то, как ты сейчас сам видишь, это не так. Там вовсе не обязательно, чтобы часть была меньше своего целого. В данном случае часть совершенно такая же, как и ее целое. И это странное целое можно еще по-разному разбить на части, и опять получится то же самое. Великий Галилео Галилей в книге, которая называется "Беседа о двух

новых науках" и которая вышла б свет в тысяча шестьсот тридцать восьмом году, задает примерно такой вопрос: "Верно ли будет, если я скажу, что количество правильных квадратов, как "четыре", "девять", "шестнадцать", "двадцать пять" и так далее, меньше количества всех чисел, поскольку число правильных квадратов непрерывно и очень скоро убывает по мере того, как мы двигаемся вперед по натуральному ряду чисел по направлению ко все большим и большим числам? Для примера укажу, что в первой сотне я насчитываю десять квадратов, что составляет одну десятую всех чисел до сотни включительно; затем до десяти тысяч их будет сто, то есть одна сотая, а до миллиона их будет одна тысячная и так далее". Поскольку это так, то несомненно правильно, что в любом конечном числе квадратов будет гораздо меньше, чем всех чисел, и чем оно будет больше, тем относительно их будет меньше. Однако, как только мы переходим к бесконечности, оказывается, что я могу все это рассмотреть совершенно с другой точки зрения. Напишем вот таких два ряда:

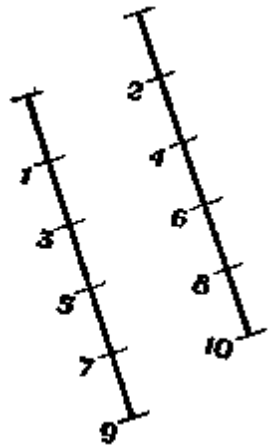
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12...

1 4 9 16 25 36 49 64 81 100 121 144...

Под каждым числом натурального ряда я подписываю во втором ряду его квадрат, и оба ряда будут тянуться вровень без конца. "Поэтому, - говорит далее Галилей, - нельзя сказать, которых чисел больше, которых меньше. Можно только сказать, что их бесконечное множество - и тех и других". Свойства конечных чисел, таким образом, на бесконечные множества распространять невозможно.



Из этого луча можно сделать два луча.



- Все это так, - медленно произнес Илюша, - а понять все-таки очень трудно.

- Ничего удивительного здесь нет, - отвечал Радикс, - что тебе вся эта задача кажется такой трудной.

Современные ученые полагают, что она была настолько трудна для современников Галилея, что не столько привлекла их внимание к этим тонким вопросам, сколько отпугнула их своей необычностью и необъяснимостью. Но не торопись, кое-что можно будет тебе разъяснить в дальнейшем.

- Хорошо бы... - отвечал наш герой.

- Трудность здесь заключается в том, что мы не можем пересчитать числа в том и другом ряду. Так как это невозможно, то нам остается только подумать, нельзя ли найти какой-нибудь способ сравнивать друг с другом бесконечные множества.

И вот что тут можно предложить.

Представь себе, что ты пришел в школу на вечер. Собралась масса мальчиков и девочек. Зал большой, страшная толкотня, а тебе хочется узнать, кого больше: мальчиков или девочек? Сколько тех и других, тебя не интересует. Ты хочешь только выяснить, кого больше. Как это сделать? Самое простое - попросить оркестрантов, чтобы они заиграли вальс. Тотчас же все станут парами, и тут ты увидишь, кого больше. Теперь ты видишь, что я и применяю этот самый способ к бесконечным множествам, например ко множеству всех чисел и множеству квадратов: сопоставляю их попарно, а раз это удается, значит, что никакой разницы между множеством всех чисел и множеством квадратов в отношении количества их элементов нет.

Но только математики говорят в таких случаях не "количество" элементов, а так: эти два множества имеют "одинаковую мощность"[16].

- А теперь уже мне кажется, что всякие два бесконечных множества будут иметь одинаковую мощность! - сказал Илюша. - Если я, например, начну располагать в ряд элементы одного из них, а ты в это время будешь делать то же самое с другим, то выйдет, что мое и твое множества одинаковой мощности, как если я буду перебирать подряд все числа, а ты одновременно со мной только все четные.

- Нет, - ответил Радикс, - не все бесконечные множества можно так исчерпать. Например, если взять множество всех точек на отрезке прямой, то его таким способом исчерпать нельзя. У нас говорят, что оно имеет "более высокую мощность", чем множество, например, всех натуральных чисел.

- По поводу точек на отрезке я вспоминаю, - сказал Илюша, - что ты мне говорил, будто из одного луча можно сделать два.

- Даже не два, а бесконечное множество. И это очень просто. Представь себе, что на твоем луче отложен отрезок, равный единице, потом еще один, и так до бесконечности. Перенумеруй по порядку эти отрезки, а затем, как хозяин Мишкиной гостиницы, из четных, сдвинув их вместе, сооруди один луч, а из оставшихся нечетных - другой. Потом можешь повторить это с каждым из них, и так столько раз, сколько тебе угодно. А если догадаешься, можешь и сразу начать так перераспределять эти единичные отрезки, чтобы получилось бесконечное число лучей.

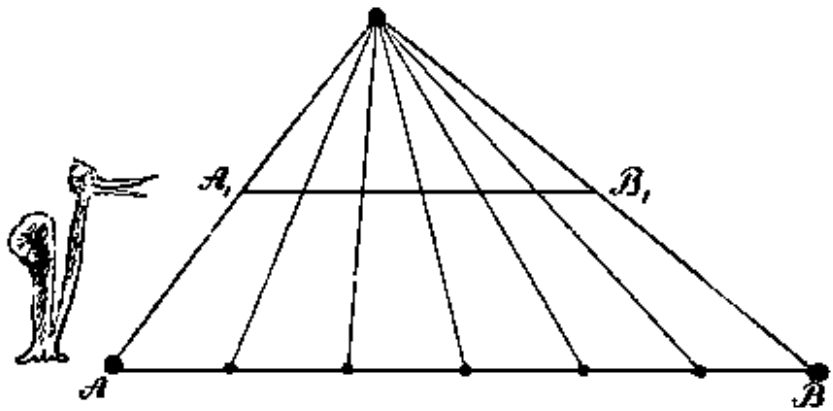
- Но если конечный отрезок разделить пополам, в каждой части будет вдвое меньше точек, чем в целом отрезке?

- Нет! - ответил Радикс. - Это снова тот же самый Мишкин неразменный рублик. В смысле "мощности" количество точек в целом отрезке и в его половине одинаково. Ты можешь в этом убедиться хотя бы так. Помнишь, что средняя линия треугольника равна...

- Половине основания!

- Вот именно. А теперь проведи из вершины противоположного угла прямые, соединяющие ее с точками основания.

Каждая из этих прямых пересечет и среднюю линию в какой-нибудь точке. Вот и получится, что каждой точке основания отвечает при таком построении точка на средней линии.



- И все-таки основание вдвое длиннее! Как это объяснить?

- Ты забываешь, что точки "не имеют длины" и длина отрезка вовсе не слагается из "длин" составляющих его точек.

Поэтому к длинам отрезков сравнение мощностей здесь никакого отношения не имеет.

- Я не пойму, - сказал Илюша. - Ведь отрезок состоит из точек, а точка не имеет длины. Откуда же берется в таком случае длина отрезка?

- Ты не понимаешь потому, что ты привык изображать точки маленькими пятнышками, которые, конечно, имеют протяженность. Если бы ты изображал точки маленькими отрезками, расположенными вдоль этого отрезка, то на тех же основаниях ты мог бы сказать, что "направление" отрезка "слагается" из "направлений" составляющих его точек. Но ведь ты этого не скажешь: тебе ясно, что точка "не имеет направления". Говорить о направлении можно, только если есть по крайней мере

две различные точки. Согласен?

- Выходит, так, - со вздохом признался Илюша.

- Вот теперь ты знаешь секрет Мишкиного неразменного рубля. И ты видишь, что эти его хитрые фокусы с рублем совсем не пустяк, а связаны с очень серьезными вещами. Вот тебе и сказка. Знаешь, как говорится в одной сказке:

Сказка ложь, да в ней намек,
Добру молодцу урок!

- Знаю! - засмеялся Илюша. - Это у Пушкина в "Золотом петушке". Но теперь, когда я еще и это узнал, то уже совсем не понимаю, на что может быть нужна такая чудовищно громадная величина, которую и представить себе невозможно и с которой не знаешь, как обращаться, потому что она даже и правил наших никаких знать не хочет.

- Когда-нибудь ты еще много чудес узнаешь об этом удивительном чудовище. Узнаешь, может быть, и то, что это еще не самое большое из наших чудовищ...

- Как так?

- А очень просто, - коротко ответил Радикс. - Что же касается странных свойств нашего чудовища, то какими бы они странными тебе ни казались с первого раза, они тем не менее в высшей степени полезны. Если обращаться с ними с должной осторожностью, то они нам помогут в таких случаях, когда никто другой помочь не может. Разумеется, никаких обычных действий, которые мы производим с числами, с бесконечностью производить нельзя, ибо это ведь не число.

Она служит нам для рассуждения о процессах измерения таких величин, которые невозможно измерить, так сказать, "попросту". А рассуждения эти позволяют нам установить соотношения между этими трудными для измерения величинами (вроде длины окружности) и обыкновенными линейными мерами.

- Значит, есть задачи, в которых участвует бесконечность?

- Сколько хочешь! Вот тут-то и выступает перед нами мощный и совершенный Великий Змий, победитель веретен, развертыватель спиралей, покоритель бочек, великий механик центра тяжести, слагающий скорости, тот, кто открывает законы природы и записывает их простыми и понятными знаками.

И неясный облик Великого Змия мелькнул перед глазами Илюши.

- Тсс! - таинственно зашипел Радикс, подняв свой единственный указательный палец.

Но призрак уже исчез.

- Вот ты опять говоришь про спирали, бочки и законы природы!.. А я ничего не понимаю!

- В свое время ты все узнаешь. А сейчас нам надо еще потолковать с Мишенькой.

Плюшевый Мишка немедленно проснулся и начал играть со своим рубликом.

- 213 -

Он подкидывал его в воздух, и рубль, взлетая, рассыпался в мельчайшую серебряную пыль, которая потом спускалась сверкающим облачком в лапки Мишки. Мишка прыгал вверх ей навстречу, на миг исчезая в этом красивом облачке, а когда он падал обратно, то уже облачка не было, а у Мишки в лапках опять сверкал новенький неразменный рублик, отчеканенный (не забудь об этом, мой милый!) высоким повелением ВОЛШЕБНОГО ДВУРОГА.

- Вот что, - вымолвил Радикс, - давай-ка возьмем убывающую геометрическую прогрессию. Пусть первый ее член будет половиной, а знаменатель одна вторая. Ну-ка, давай рассчитаем сумму.

Илюша написал формулу суммы.

- Давай переменим знаки в числителе и знаменателе, так будет попроще, - предложил Радикс.

Илюша послушался, и формула стала такая:

$S = a_1 (1 - q^n) / (1 - q)$

Потом Илюша стал подставлять данные. Вышло так:

$S = 1/2 \cdot (1 - (1/2)^n) / (1 - 1/2)$

- Внизу, - произнес Илюша, - получается половина, и я ее сокращаю с половиной, которая стоит спереди множителем.

Значит, у меня остается штука нехитрая:

$S = 1 - (1/2)^n$

Ну вот-с! - сказал Радикс. - Теперь давай-ка разберем, сколько выйдет, если мы опять возьмем шахматную доску, на первую клетку положим половину... Чего бы нам взять?..

Ну, возьмем половину яблока! На вторую клетку кладем четверть яблока, на третью восьмушку и так далее. Сколько же выйдет на восьмой клетке?

- На восьмой будет единица минус половина в восьмой степени, то есть

$1 - (1/2)^8$

- 214 -

Впрочем, можно ведь и так написать:

$1 - 1/2^8$

- Можно, - сказал Радикс. - А сколько будет два в восьмой степени?..

- Двести пятьдесят шесть! Значит, из единицы надо вычесть одну двести пятьдесят шестую. Получится двести пятьдесят пять двести пятьдесят шестых.

- Так! Это мы прошли первый ряд клеток. В конце второго ряда...

- Будет единица минус одна вторая в шестнадцатой степени.

- То есть знаменатель шестьдесят пять тысяч пятьсот.

- Можно сказать, сумма равна единице минус одна шестидесятипятитысячная. Вот как ловко! В конце третьего ряда двойка возводится уже в двадцать четвертую степень.

- Это будет примерно семнадцать миллионов.

- Значит, в сумме будет единица минус одна семнадцатимиллионная! А к концу четвертого ряда - это уж половина всей доски - одна вторая в степени тридцать два...

- Знаменатель дроби будет примерно равен четырем биллионам.

- Как быстро растет! Мастерица она, оказывается, расти, эта прогрессия! - воскликнул Илюша. - Значит, к половине доски мы уложим все яблочко, исключая одну четырехбиллионную. Уж не знаю, как же разрезать яблоко на четыре биллиона частей? Ведь биллион - это тысяча миллионов! Ну, а что же будет дальше? Когда мы доберемся до конца доски, то возведем нашу половину в шестьдесят четвертую степень, то есть это будет одна восемнадцатиквинтиллионная! Вот так дробь! Но как же отрезать от яблочка такой малюсенький кусочек?

- Дело не в этом, - отвечал Радикс. - Допустим, что мы уж сумеем отрезать.

- Охотно допускаю! - воскликнул Илюша.

- Но скажи: каким образом ты отличишь целое яблоко от яблока, у которого не хватает... ну, хотя бы одной шестидесятипятитысячной доли, чтобы быть целым? Я уже не говорю о еще более крохотных долях единицы.

- Да-а! Ни в какой микроскоп не усмотришь!

Тут Мишка подошел к Илюше и гордо спросил:

- А если я буду опять расти, как рос раньше, тогда что будет?

- Тогда, - сказал Илюша, - мне кажется, что эта дробь почти совсем не будет отличаться от нуля.

- Верней, - сказал Радикс, - было бы сказать так: если и будет расти до бесконечности, то эта дробь, изменяющая свое значение по закону геометрической прогрессии, может стать сколь угодно

малой, то есть, проще сказать, меньше всякой наперед заданной величины. Вот такого-то рода изменяющиеся, переменные величины, которые бесконечно уменьшаются, и называют бесконечно малыми. Но если это так, то, следовательно, нам, чтобы получить нашу сумму, придется вычитать из единицы величину бесконечно малую. Что ни дальше мы двигаемся по нашему ряду, то есть по убывающей геометрической прогрессии, тем ближе подходим к некоторой границе нашего движения. Ясно это тебе или нет?

- Не очень, - признался Илюша.

- Припомни, - сказал Радикс, - припомни-ка хорошенько, как мы с тобой толковали насчет того, что будет происходить с частными от деления единицы на все большие и большие числа. Ясно, что величина частного будет изменяться, то есть это будет величина переменная. Не так ли?

- Так, - согласился Илюша.

- Хорошо, - продолжал Радикс. - И как величина переменная и безгранично уменьшающаяся она имеет в данном случае некоторый предел, к которому она приближается...

Ну, как ты скажешь?

- Ясное дело, - отвечал мальчик, - что таким пределом будет нуль. Если взять очень большой делитель, то частное от деления единицы на него станет таким малым, что его от нуля, пожалуй, и не отличишь.

- Совершенно очевидно! - воскликнул Радикс. - И запомни: мы называем бесконечно малой величиной такую переменную величину, которая имеет своим пределом нуль.

Бесконечно большая и бесконечно малая тесно связаны друг с другом в том смысле, что если делить единицу на бесконечно большую величину, то получится бесконечно малая, и наоборот. Ну, так что же из всего этого следует в отношении нашей задачи о яблоке и шахматной доске?

- По-моему, вот что: если вычитаемое стало бы нулем...

- Чтобы нам не сбиваться, - поправил его Радикс, - давай говорить так: "Если вычитаемое в пределе превратится в нуль". Тогда все будет ясно.

- Хорошо, - согласился мальчик, - будем говорить так.

Значит, если вычитаемое в пределе превратится в нуль, то, следовательно, я буду вычитать из единицы чистый нуль, и останется единица.

- Так! - промолвил Радикс. - Значит, мы выяснили таким образом, что сумма нашей прогрессии все приближается и приближается к единице, так что разность между суммой и

единицей может быть сделана меньше любого сколь угодно малого числа. Другими словами, эта разность как угодно близко подходит к нулю. Можно сказать, что когда число членов стремится к бесконечности, сумма стремится к пределу, равному единице. Но у нас, в царстве ВОЛШЕБНОГО ДВУРОГА, говорят, что сумма всех членов убывающей геометрической прогрессии

$1/2 + 1/2^2 + 1/2^3 + ...$

равна единице.

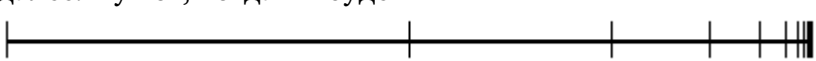
- Хмм... - промычал недоуменно Илюша. - Все это, конечно, так, но мне пока еще не верится... Вот чего я не пойму: что значит "сумма всех членов"? Ведь их у нас бесконечное множество. Как же их все сложить? Складывать-то я начну, а как и когда я эти все сложения кончу?

- Замечание, не лишенное смысла! - усмехнулся Радикс. - Однако в этом случае нельзя понимать сложение так, как это ты понимал, когда складывал конечное число слагаемых столбиком в первом классе школы. Здесь надо складывать все большее и большее число слагаемых и при этом проследить, найти и определить, к какому ты пределу приближаешься. Вот этот-то предел мы и называем результатом сложения бесконечно большого числа слагаемых, или их суммой.

В этом смысле мы и говорим, что если просуммировать все члены убывающей геометрической прогрессии:

$1/2 + 1/4 + 1/5 + 1/16 + 1/32 + ...$

то в результате и получится сумма, равная единице. Вот тебе еще пример. Возьмем отрезок, равный единице. Разделим его пополам. Затем правую половину раздели опять пополам, правую четверть дели снова пополам, потом правую восьмую еще раз пополам и так далее. Теперь давай складывать. Если возьмем два слагаемых - половину и четверть, - то до единицы нам не будет хватать четверти. Если возьмем три слагаемых, нам не хватит одной восьмой; если четыре - не хватит одной шестнадцатой и так далее. Ну вот, когда ты будешь



увеличивать число слагаемых до бесконечности, то в пределе ты и получишь единицу, то есть тот самый отрезок, равный единице, с которого ты начал. Знай, что одним из первых, кто просуммировал бесконечную убывающую геометрическую прогрессию для решения сложной геометрической задачи, был не кто иной, как Архимед. Вот теперь ты и сам видишь, что мы недаром познакомились с Мишенькой: он помогает нам иной раз сосчитать сумму все уменьшающихся дробей. При этом обрати внимание: сумма получается вовсе не бесконечная, а самая

обыкновенная! Как видишь, наше бесконечное чудовище, если оно возьмется за иную задачу, может нам помочь узнать самое обыкновенное конечное число,, с которым мы уже можем действовать как нам заблагорассудится.

- Значит, когда Мишенька растет, в одних случаях может получиться бесконечный предел, вот как первый раз с суммой, в других - нуль, как для синьориты Одной Энной, а в третьих - просто какое-нибудь число, не равное нулю, как только что у нас получилось? - спросил Илюша.

- Совершенно "верно, - отвечал его друг. - Чтобы подтвердить тебе это на знакомом уже примере, вспомним построение с перпендикуляром и наклонной из предыдущей схолии.

Если откладывать вдоль перпендикуляра один за другим равные отрезки и соединять получающиеся на перпендикуляре точки с другим концом основного отрезка, к которому восстановить перпендикуляр, то каждая следующая наклонная будет образовывать с основным отрезком все больший и больший угол. Проследи за углами, на которые поворачивается наклонная при переходе от одной точки на перпендикуляре к следующей, и ты увидишь, что эти углы будут все время уменьшаться и стремиться к нулю. Сумма откладываемых отрезков на перпендикуляре будет стремиться к бесконечности, а сумма углов, о которых мы говорим, будет стремиться к прямому углу, как к пределу.

- Но в результате этого процесса угол ведь станет прямым, - сказал Илюша.

- Ну вот, ты опять за старое! - недовольно промолвил Радикс. - Если поворачивать наклонную, то, конечно, можно повернуть ее на такой угол, чтобы она стала параллельной. Однако и здесь тоже замешана та же бесконечность. И ты легко убедишься в этом, если рассмотришь все промежуточные положения ее. И это очень хорошо понимали греческие ученые времен Архимеда. Если говорить о бесконечном процессе удаления точки по перпендикуляру, то, разбивая этот процесс на бесконечное число последовательных этапов, тем самым вводится и бесконечное число этапов в изменении угла, и мы говорим только о том, что происходит при самом этом процессе; при неограниченном удалении точки по перпендикуляру угол неограниченно приближается к прямому как к своему пределу.

- И никогда его не достигает! - воскликнул Илюша.

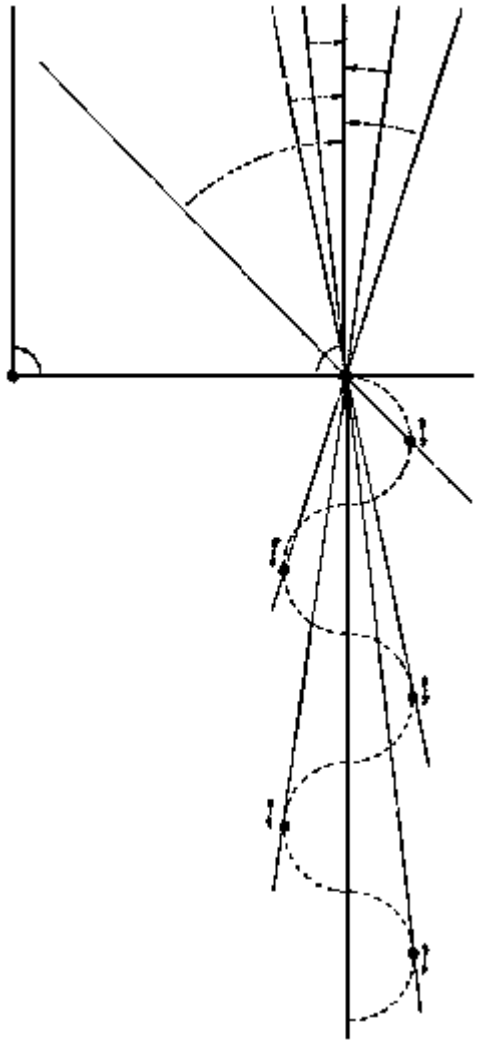
Ахиллес, и некая безвестная черепаха состязаются в беге. Черепаха находится вначале на расстоянии ста шагов впереди Ахиллеса, а ползет она в десять раз медленнее его. Все очень

просто. Когда Ахиллес пробежит указанное расстояние, черепаха успеет проползти еще десять шагов. Когда Ахиллес пробежит эти десять шагов, черепаха окажется еще на один шаг впереди. Когда Ахиллес пробежит этот шаг, то черепаха, очевидно... Ну, ты и сам видишь - процесс бесконечный, а следовательно, как ты это только что сказал, Ахиллес "никогда" но догонит черепаху.

- Как так? - спросил Илюша. - Ясно, что Ахиллесу надо будет пробежать... сколько же это выходит? .. всего сто одиннадцать шагов, чтобы догнать черепаху...

- Твое слово "никогда", видишь ли, нехорошо в этом случае по той причине, - пояснил Радикс, - что на самом дело ты ведь не имеешь в виду времени, а хочешь только сказать, что в разложении процесса на этапы придется иметь дело с бесконечным числом этих этапов. К фактическому осуществлению вращения наклонной, протекающему в конечный промежуток времени, или к движению Ахиллеса это прямого отношения не имеет. Нас здесь интересует не время, а именно последовательные этапы процесса. Их удобнее всего было бы просто нумеровать: первый этап, второй и так далее, вовсе не упоминая о времени. Если тебе придет в голову разлагать какой-нибудь действительный процесс движения на такого рода этапы, то это будет только воображаемая операция.

И при подсчете времени, например, надо будет учесть, что действительное движение вовсе не обязано считаться с этим разложением и может проскочить через все твои этапы за конечный промежуток времени. Конечно, это все не очень простые вещи. Здесь есть над чем подумать, но мы пока ограничимся этим...



- Ограничимся? То есть как это ограничимся? - снова окрысился командор. - Ведь молодой человек сказал же, что переменная величина (помнится, там шла речь об угле) никогда не достигает своего предела...

- Но теперь я буду это понимать в том смысле... – заторопился Илюша.

- Ни в каком смысле это не верно, молодой человек! Вот рассмотри такое движение наклонной.

Из ее основания по другую сторону основного отрезка я восстановлю к нему перпендикуляр, а около него построю полуокружности одинакового радиуса, с центрами на этом перпендикуляре: одну по одну сторону от него, а следующую, соседнюю с ней снизу, - по другую, и так змейкой все дальше и

дальше. Теперь вообрази себе прямую, которая все время проходит через основание этого перпендикуляра и через меняющую свое положение вторую точку, а та, в свою очередь, пробегает построенную тобой змейку сверху вниз. Что будет происходить с этой прямой?

- 220 -

- Она начнет поворачиваться сначала в одну сторону, потом немного меньше в другую, потом опять в ту...

- Вот теперь и проследи, хотя бы для сравнения с наклонной, за верхней частью этой твоей прямой: она будет колебаться около перпендикуляра. И, как ты думаешь, в пределе, когда точка по змейке будет удаляться все дальше и дальше, что же ты сможешь сказать об угле, который образует эта прямая с основным отрезком?

- Этот угол будет стремиться к прямому как к своему пределу, - отвечал Илюша. - Каждый раз, когда точка на змейке будет попадать на перпендикуляр, этот угол будет прямым... Но в конце концов...

- Если точка будет двигаться по змейке, то никакого конца концов тут нет. Только колебания около перпендикуляра будут, как говорится, затухать. Но ты мог бы прекратить строить змейку в каком-нибудь месте и заставить точку бежать дальше по перпендикуляру. Тогда у тебя прямой угол появился бы на соответствующем этапе процесса. И дальше он так бы и оставался прямым на всех дальнейших этапах бесконечного удаления точки вниз по перпендикуляру. И в этом случае ты можешь сказать, что в пределе угол, за изменением которого ты следил, будет равен прямому. В последней нашей схолии мы еще покажем тебе нечто в этом роде.

А вслед за этим командор улетел в неизвестность.

- Только вот чего я еще не понимаю, - сказал, вздыхая, Илюша.

- Ты говоришь, что в случае с Ахиллесом и черепахой мы только воображаем разложение процесса на бесконечное количество этапов и что действительное движение происходит непрерывно, без всяких этих этапов. Тогда зачем же такие разложения рассматривать?

- Видишь ли, - ответил Радикс, - на этот вопрос я тебе сейчас коротко ответить не могу. Дальше мы познакомимся с очень важными задачами, в решении которых бесконечные процессы играют основную роль. Тебе дана некоторая конечная величина; ты начинаешь как бы "исчерпывать" ее, и при этом столь ничтожными частицами, что в пределе действительно приходишь к полному ее "исчерпанию". Такое "исчерпание" конечной

величины как раз и является одним из самых сильных средств математики, владея которым она и справляется с вопросами, относящимися к непрерывно изменяющимся переменным. Сейчас я могу только привести еще один, уже немного знакомый тебе пример, в котором оказывается полезным способ представления конечной величины в виде предела суммы неограниченно возрастающего числа слагаемых, каждое из которых стремится к нулю.

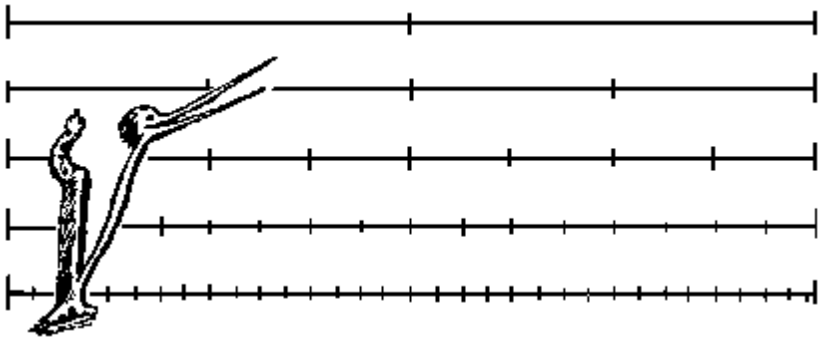
- Как это может быть? - спросил Илюша. - Если каждое слагаемое стремится к нулю, то, по-моему, и их сумма...

- Ты забываешь, что их число неограниченно возрастает.

Начнем с простейшего случая. Представь себе, что единицу ты разделишь сначала на две части, возьмешь сумму этих двух дробей и получишь опять единицу. Но совершенно такой же результат получится, если разделить единицу на три части и сложить полученные три дроби, и так далее. Если ты произведешь деление на и равных частей, то каждая из них выразится дробью 1/n, а при неограниченном возрастании n будет бесконечно малой. Но если при каждом значении и составлять сумму и таких дробей, то все время будет получаться единица.

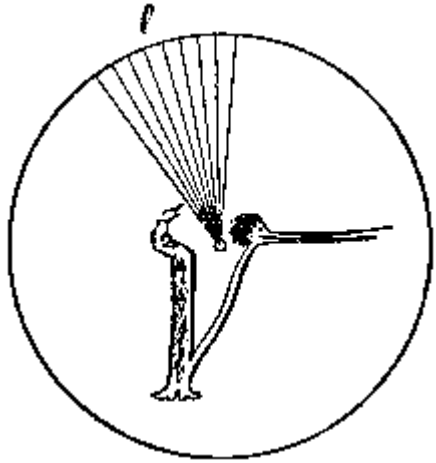
- Единица и есть единица. К чему же разбивать ее на части и потом опять собирать ее в целое из этих частей? - спросил Илюша.

- Представь себе, что часто, и притом в очень важных вопросах, именно этот способ и оказывается чрезвычайно мощным средством, но только, конечно, он применяется не в слишком уж простом виде. Вот послушай, я приведу тебе пример немного посложнее. Ты, конечно, помнишь, что отношение длины окружности к ее диаметру равно числу π. Так что длина круга с радиусом r будет выражаться числом $2\pi r$. Представь себе, что формула для нахождения площади круга тебе неизвестна. Разбей весь круг на большое число - назовем его опять n - маленьких секторов, разделив окружность на n равных маленьких дужек и соединив точки деления с центром.



Каждый из этих секторов будет при неограниченном увеличении и все больше и больше напоминать равнобедренный треугольник, основание которого очень мало и почти сливается с дужкой, ограничивающей этот сектор. А сумма их площадей будет ведь все время оставаться равной все той же площади круга, совсем как в нашем первом примере.

Однако смысл всего этого в том, что площадь очень узенького сектора можно со все большей и большей точностью вычислять по формуле для площади треугольника, умножив основание - длину дужки - на половину высоты, то есть на половину радиуса. А если теперь собрать снова все это в одно целое, то достаточно умножить сумму длин всех дужек, то есть $2\pi r$, на половину радиуса, и получится выражение для площади круга - πr^2. Если ты интересовался не всем кругом, а только каким-нибудь его сектором, ограниченным дугой длиною l, то можно найти площадь такого сектора, умножив l на половину радиуса. Выходит, что ты действительно можешь совершенно точно получить площадь сектора по формуле площади треугольника, принимая длину дуги за основание, а радиус за высоту. Но сектор с большим центральным углом совсем не похож на треугольник, и ты смог прийти к этому результату здесь только потому, что предпринял то самое деление площади, которое казалось сперва совершенно бессмысленным. Разумеется, эти рассуждения мы провели схематично, в общих чертах; если их немного уточнить, то мы могли бы сказать, что площадь круга определяется нами как предел суммы площадей бесконечно возрастающего числа треугольников, боковые стороны которых равны радиусу, а основания равны неограниченно уменьшающейся хорде маленьких секторов. Ну, а теперь уж, - промолвил в заключение Радикс, - можно, пожалуй, сказать, что у нас в этом трудном вопросе в первом приближении все более или менее в порядке...



- В порядке! Ха-ха-ха! - раздалось откуда-то из-под облаков страшное громыхание плюшевого Мишки-великана.

- Хм! .. - грустно заметил Радикс. - Он, кажется, еще сомневается, все ли ты уразумел?

- Н-не знаю... - неуверенно признался Илюша.

- А не попробовать ли нам сначала? - крикнул Мишка.

- Давай попробуем! - робко сказал Илюша.

И снова вдруг сбежались знакомые человечки, составили формулу, опять Мишка стал маленьким и мирно сидел на тулье цилиндра, но справа появилось много человечков-малюток:

- 223 -

$S = a_1 (q^n - 1) / (q - 1) - a_1 / (q - 1) = a_1 + a_2 + a_3 + ... a_n$

- Ну? - вопросительно заявил Мишка.

Мгновенно человечки справа исчезли все, кроме первого, у которого на груди появилась цифра "1". Немедленно в лапке Мишки тоже оказалась единица, а на груди у тощей Суммы появилась та же самая единица.

- Вперед, друзья! - энергично скомандовал Мишка.

Сейчас же вслед за первым человечком появился второй, у которого на груди было число "1/2", в лапке Мишки оказалась уже двойка, а на груди у Суммы появилось не "1", а "1 1/2". Затем появился третий человечек, имя которого было "1/4", и Мишка показал своей лапкой, что это номер третий, а Сумма сложила все три члена, и вышло 1 3/4. Появился еще новый член прогрессии, его звали "1/8". Мишка засвидетельствовал, что это был четвертый номер, а Сумма заявила, что теперь всего выходит 1 7/8. Все было правильно, как заметил Илюша. Затем человечки стали появляться все дальше и дальше, быстро и равномерно выпрыгивая на сцену и мелькая один за другим. Казалось, будто прямо перед тобой проходит лента кинокартины и все

понемножку меняется, точно толчками. А вместе с тем все быстрее мелькали номера у Мишки в лапке и менялось число на груди у Суммы. Но самое интересное заключалось в том, что человечки, что ни дальше, стали появляться все скорей и скорей, и наконец глаз почти перестал замечать эти толчкообразные изменения картины, а просто казалось, что длинная-предлинная вереница членов прогрессии все удлиняется и удлиняется. А дальше уже стало казаться, что просто куда-то очень-очень далеко вправо растет длинненькая тоненькая ниточка, и уж нельзя было разобрать, что она состоит из человечков, которых делается все больше и больше... Наконец Мишка взмахнул лапкой и сказал: "Всё!"

Сумма с облегчением вздохнула. На груди ее красовалась цифра "2".

Илюша засмеялся.

- А теперь, - сказал он, - обязательно расскажи мне про бочки, про Великого Механика, про яблоки и веретена и вообще...

- Постой, постой! - сказал Радикс. - Не все сразу! Я должен указать еще тебе, наконец, - и прошу это запомнить всерьез и как следует! - что эта картина приближения к пределу не является единственным объяснением явления предела, есть и другие, не менее, а даже более важные. Но она сравнительно проста и для нас с тобой вполне удовлетворительна. А теперь мне нужно задать тебе еще два-три вопросика, а потом мы пойдем с тобой в гости к двум моим приятелям, которые нас угостят, накормят и напоят чудным кваском.

Скажи, пожалуйста: тебе никогда не приходило в голову, для чего применяются в геометрии формулы?

- Чтобы вычислить что-нибудь, ну, например, длину какого-нибудь отрезка или площадь какой-нибудь фигуры...

- Ты говоришь мне о том применении формул в геометрии, с которым тебе до сих пор приходилось иметь дело. Это естественно. Геометрия ведь и родилась из задач по измерению земли, как указывает ее название. Но ведь, кроме размеров фигуры, нас может интересовать и ее форма. Не правда ли?

- Да, конечно.

- А ты никогда не думал, - продолжал его наставник, - нельзя ли с помощью формул определить также вид или форму какой-нибудь линии?

- Не знаю, - ответил Илюша. - Я не совсем понимаю: как это так определить форму? В каком смысле?

- Вот, например, так. Ты, конечно, знаешь, что такое прямая? Попробуй определи мне прямую как геометрическое место.

- Ну, это нетрудно, - отвечал Илюша. - Вот, например, биссектриса. Она прямая, и вместе с тем она есть геометрическое место точек, лежащих внутри данного угла и равноотстоящих от двух его сторон.

- А если рассматривать окружность?

- Окружность есть геометрическое место точек, равноотстоящих от центра, то есть от данной точки.

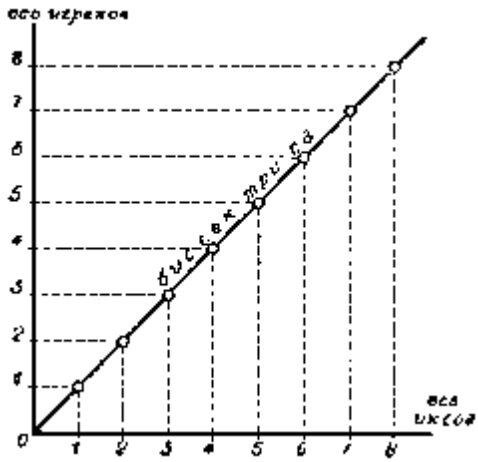
- Правильно! Но вот ты видишь, что эти два определения дают тебе две линии различной формы. Следовательно, при помощи старинного понятия геометрического места ты можешь определять кривые, различные по форме. Так как на свете очень много кривых линий, а прямая только одна, то мы ее тоже будем причислять к кривым, а потом выясним, как выделить ее из них. Ты узнаешь далее, почему люди так заинтересовались определением именно формы кривых. Но вот еще что: давай нарисуем прямой угол и проведем его биссектрису.

Илюша нарисовал.

- Будем теперь рассматривать этот чертеж как диаграмму, или график. Разделим обе стороны угла на равные промежутки и дадим делениям номера по порядку.

Илюша сделал и это.

- Теперь посмотрим, как расположена относительно сторон угла биссектриса. Когда на горизонтальной стороне мы найдем четвертую точку деления и восстановим из нее перпендикуляр, то он пересечет биссектрису в точке, которая по вертикальной стороне прямого угла соответствует...



- Тоже четвертому делению, - сказал Илюша. - Да ведь так и должно быть, потому что это биссектриса и обе стороны угла расположены симметрично по отношению к биссектрисе. По-

моему так!

- Верно, - отвечал Радикс. - Но если так, значит, деления на сторонах угла позволяют нам определить положение точки внутри угла с помощью двух чисел, выражающих расстояния точки от сторон угла. Раз мы это выяснили, то тем самым мы сделали первый шаг к формулам, потому что формулы относятся именно к числам. Эти два числа называются координатами точки. Расстояние от вершины угла до основания перпендикуляра, опущенного на горизонтальную сторону угла, обычно обозначают буквой x и называют абсциссой точки. Горизонтальную сторону угла называют при этом осью иксов, или осью абсцисс. Другую сторону угла называют осью ординат, или осью игреков. Вторую координату точки - ее расстояние от оси абсцисс - обозначают буквой y, называя это число ординатой точки. Ось иксов и ось игреков называют осями координат, а точку их пересечения - началом координат. Очевидно, что для точки, лежащей в начале координат, и x и y равны нулю. Если двигать точку вправо, то значение x будет увеличиваться, а если ты будешь двигаться вверх, то будет расти значение y.

- Ясно. Если я пойду в левую сторону от оси ординат, то мне уже придется значения x считать отрицательными, а если пойду вниз, ниже осп абсцисс, то там надо значения y считать отрицательными.

- Совершенно верно. Теперь ты сможешь определить положение любой точки на плоскости с помощью двух чисел. Ну, а теперь подумаем, нельзя ли нам как-нибудь записать с помощью формулы то свойство биссектрисы, о котором мы только что говорили. Какую бы точку ни взять на биссектрисе, для нее длины перпендикуляров, опущенных на обе стороны угла, должны быть равны...

- То есть абсцисса и ордината всякой точки на биссектрисе равны между собой! - воскликнул Илюша. - Это я понимаю, но как же это записать, если абсцисса и ордината могут принимать какие угодно числовые значения? Когда, например, x равен единице, то и y должен равняться единице; когда x равен двум, то и y равен двум...

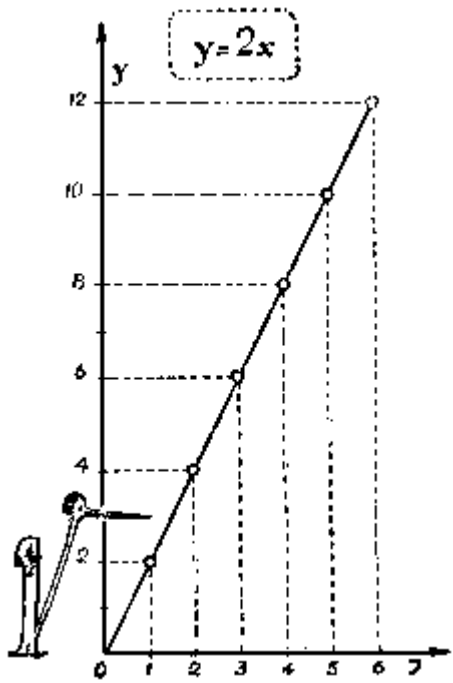
Илюша внимательно посмотрел на чертеж, потом на своего друга, немного поколебался и написал:

$y = x$.

- Правильно! - сказал Радикс. - Если ты будешь искать на плоскости те точки, координаты которых удовлетворяют этому условию, то ты как раз и получишь твою биссектрису.

Мы будем называть такие равенства, переводящие свойства

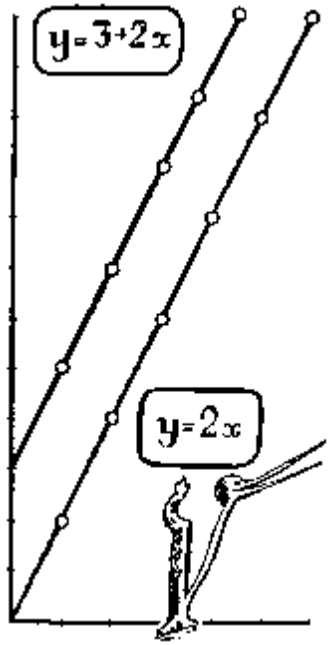
геометрических образов на алгебраический язык, уравнениями кривых. Такие уравнения определяют положение точек по отношению к выбранным координатным осям. Кстати сказать, угол между осями необязательно нужно брать прямой. Вообще можно определять положение точки на плоскости и другими способами, то есть можно применять, как говорят, различные системы координат. Некоторые элементы такого рода системы употреблялись еще в Древней Греции, у Аполлония Пергейского (эллинистическая эпоха, время Архимеда).



А у нас здесь самая простая система прямоугольных координат на плоскости. Она потому так называется, что угол между осями прямой. Их называют также декартовыми, по имени замечательного француза, крупнейшего математика и философа Ренэ Декарта, жившего в семнадцатом веке, который впервые ввел их в науку. Их называют еще картезианскими, ибо ведь в то время ученые сочинения писали по-латыни и имена авторов тоже переделывали на латинский лад, а по-латыни Декарт называл себя Картезием. Однако надо тебе знать, что впервые метод координат был предложен тем самым удивительным математиком Пьером Ферма, с чьей замечательной теоремой ты недавно познакомился. Это было в тридцатых годах семнадцатого столетия, хотя некоторые схожие с этим методом приемы были известны еще древним. Ферма много и плодотворно занимался

вопросом о значении понятия геометрического места, и вот в результате этих его размышлений и опытов родился на белый свет метод координат. В одной из своих работ великий французский геометр говорил, что он придумал этот метод специально для изучения вопроса о геометрических местах и что он уверен, что благодаря этому новому способу анализа изучение этой отрасли геометрии станет для всех доступным.

Теперь мы можем хорошо оценить, какова была тонкая проницательность этого гениального ума. Действительно, Ферма, а за ним и Декарт придали учению о геометрических местах такую простоту и ясность, что этот очень мощный метод мог быть применен целым рядом ученых к труднейшим задачам с великой пользой для дела. Некоторые историки полагают, что во всем этом интереснейшем и полезнейшем перерождении математики ученым очень помогло то, что Декарт ввел в употребление метод графиков, таких, какие мы сейчас рассматривали. И этот наглядный способ очень помог ученым в их новых рассуждениях. Вслед за Декартом над той же задачей работал Исаак Ньютон, исследуя очень сложные кривые, и в его работах все основные трудности нового метода уже были преодолены. Самое замечательное следствие этих плодотворных работ Ферма, Декарта и Ньютона заключается в том, что благодаря им в математике удалось объединить и обобщить целый ряд различных сведений из геометрии, а вслед за этим привести их и в некоторую вполне стройную систему. Кстати сказать, именно Декарт стал обозначать переменные величины последними буквами латинского алфавита: x, y, z.



- Меня немного удивляет, - произнес в ответ Илюша, - что ты так много говоришь о системах. Мне кажется, что самое важное в математике - это уметь решить какую-нибудь задачу или, скажем, целый ряд каких-нибудь похожих друг на друга задач. Разве это не так?

- Почему не так? - возразил Радикс. - Конечно, это так, но я говорил о том, что когда ты решаешь целый ряд схожих между собой задач, то имеет смысл собрать воедино все способы их решения, а затем рассмотреть, что в них есть общего и чем они друг с другом связаны. В других случаях ты берешь какой-нибудь один способ решения задач и рассматриваешь, какого рода задачи можно при его помощи решать.

При этом ты нередко находишь связующие нити между задачами различного рода, и тем самым они объединяются. Постепенно путем таких объединений и обобщений строится общая теория. Вот что я имел в виду... А теперь посмотрим, что получится на чертеже, если мы вместо y = x напишем такое уравнение:

y = 2x.

Давай иксу различные значения, начиная с нуля, и следи, что будет происходить с игреком. А потом нарисуй, что у тебя получится.

Илюша составил табличку.

x | 0 1 2 3 4 5

y | 0 2 4 6 8 10

Когда он попробовал нанести точки на график и соединить их, то у него получилась снова прямая, но только теперь она не была уже биссектрисой, а шла гораздо ближе к вертикальной оси, как это показывает рисунок на странице 228.

- Опять прямая, - сказал Радикс, - только она наклонена по отношению к оси абсцисс под другим углом. Изменив коэффициент у икса в уравнении, ты изменил наклон прямой. Значит, этот коэффициент определяет наклон прямой. Ясно?

- Как будто ясно. Если увеличить коэффициент, то она будет еще скорее подниматься.

- И поэтому этот коэффициент называется угловым коэффициентом прямой. Ну, а теперь, - продолжал Радикс, - давай прибавим к правой части уравнения постоянную величину, например "три".

Илюша написал уравнение, а затем составил табличку:

y = 3 + 2x.

x	2x	y
0	0	3
1	2	5
2	4	7
0	0	3
8	1	1
3	0	0

Когда теперь он нарисовал две последние прямые, то оказалось, что вторая прямая идет параллельно первой, но всюду проходит выше ее на три деления, как на рисунке на стр. 228.

- Ну вот, - заключил Радикс, - ты получил две параллельные прямые. Значит, по уравнению прямой ты очень легко можешь судить о том, как она расположена. Коэффициент этих прямых определяет наклон прямой, а свободный член говорит о том, выше или ниже прямая расположена. Теперь продолжим оси. Ось иксов продолжим влево за нуль; там мы будем наносить, как уже ты сказал, отрицательные значения x. Ось игреков продолжим ниже нуля, и там мы будем наносить отрицательные значения y. Теперь вот что: дадим у значение нуль в уравнении

y = 2 + x.

Илюша написал:

2 + x = 0.

- Ну, чему равен икс? Это ведь уравнение первой степени.

- Икс равен минус два.

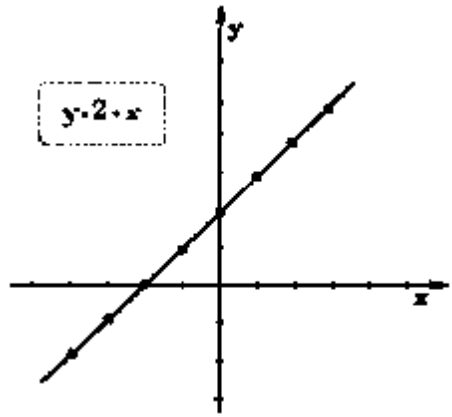
- Справедливо. А что это будет обозначать на графике?

Илюша составил табличку, потом график; взял линейку и

продолжил прямую влево за ось игреков. Оказалось, что прямая пересекла ось иксов как раз в точке - 2.

- Да, это графический способ решения уравнений.

И он чрезвычайно полезен, когда дело идет об очень кропотливом решении уравнений высших степеней. Таким образом, ты видишь, что с геометрической точки зрения корень уравнения есть не что иное, как абсцисса точки пересечения кривой с осью абсцисс.



- Как интересно! - сказал Илюша. - Значит, этим способом можно решать уравнения?

- Слушай-ка, - сказал Илюша, - а что получится, если мы возьмем квадратное уравнение?

- Давай попробуем. Пиши:

$y = x^2 - x - 2$

Теперь подставляй значения икса. Начнем с минус четыре и дойдем до плюс четыре.

Илюша составил табличку и нанес точки на график.

x	x^2	-x	y
-4	16	4	18
-3	9	3	10
-2	4	2	4
-1	1	1	1
0	0	0	-2
1	1	-1	-1
2	4	-2	0
3	9	-3	4
4	16	-4	10

- Когда будешь соединять точки, - сказал Радикс, - имей в виду, что это не ломаная кривая, она гнется очень плавно.

Илюша нарисовал кривую. Получилась дуга, открытая сверху и симметричная, как на рисунке (стр. 232).

- А ну-ка, напиши вместо игрека нуль и реши уравнение!

Илюша получил два корня:-1 и +2. Когда он взглянул на график, то убедился, что его кривая как раз и пересекает ось иксов в этих точках -1 и +2.

- Вот как хорошо! - сказал Илюша. - И как просто!

А что получится на чертеже, если под корнем будет отрицательная величина?

- То есть если квадратное уравнение имеет комплексные корни? Тогда кривая будет на графике вся находиться или ниже или выше оси иксов...

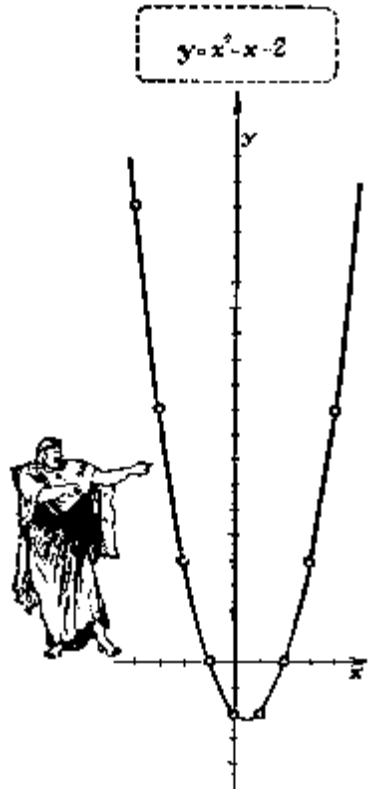
- Вот как удобно! Начертил - и готово. И все видно.

- Ясно! - отвечал, посмеиваясь, Радикс. - Ну, а теперь пойдем к моим друзьям. Это премилые старички. Они, правда, большие чудаки, но ты уж не удивляйся. Да, вот еще...

Радикс взял Илюшу за руку и остановился.

- Ты должен еще запомнить, - добавил задумчиво Радикс, - что Ренэ Декарт был одним из самых замечательных мыслителей нового времени. Его влияние на умы образованного мира было огромно и необыкновенно глубоко. Многие его мысли имели решающее значение для развития человеческого общества, а некоторые и поныне не утратили этого значения для каждого из нас. Суровый, трезвый и прямодушный мыслитель, он заставил человека размышлять над собой и своей мыслью, исследовать то, о чем ты мыслишь, и то, в чем сомневаешься. Ведь, зная, как ты судишь о мире, можно вывести, что ты в состоянии сделать.

Декарт был первым, кто тогда утверждал, что разум человеческий сам по себе способен постичь истину и овладеть ею.



Декарт придавал громадное значение методу (то есть способу либо способам) мышления, рассуждения и вообще умственной работе, а его математические труды носят глубокий отпечаток этого его убеждения. Именно потому его философия и внесла в науку и жизнь столько прямого здравомыслия, что он опирался на математический способ рассуждения. А в математике он вместе с Ферма, как мы уже говорили, создал новую, так называемую аналитическую геометрию, то есть такой метод изучения геометрических кривых, который объединил геометрию и алгебру, связал геометрические кривые с алгебраическими уравнениями. Это дало позднейшим ученым возможность построить еще более мощные математические методы, раскрывшие перед человечеством совершенно необыкновенные возможности и обеспечившие дальнейшее развитие цивилизации и технической культуры.

- Как это все интересно!

- Мало того, - продолжал Радикс, - одно из главных достоинств труда Декарта состоит в том, что до него заниматься теорией таких кривых могли только люди с исключительными дарованиями, а после него эту возможность получили многие.

Так что Декарт дал в руки большому числу людей способ

изучать и применять очень тонкие методы, поэтому и число ученых увеличилось. Узнай еще, что известные тебе из географии широта и долгота тоже координаты данной точки на глобусе.

Исторически это самые первые координаты, которые были придуманы во времена Эратосфена (эллинистическая эпоха).

Тут Радикс огляделся и важно скомандовал:

- К прыжку приготовились!.. Полный вперед!

- 232 -

И тут они прыгнули и тотчас помчались по воздуху с необычайной быстротой. Наконец они долетели до весьма симпатичного леска, где в изобилии росли красивые деревья с темной блестящей листвой. Небо над лесом было синее-синее, а откуда-то доносился глухой ритмичный гул морского прибоя.

Удивительно, как легко и привольно дышалось в этом чистом и прозрачном воздухе! Где-то довольно далеко на пригорке, едва заметное в утренней дымке, стояло очень красивое здание с колоннами. Издали доносился тоненький голос пастушьей свирели.

- Ах, как мне здесь нравится! - воскликнул мальчик.

Вдруг из-за деревьев выскочил очень странный человек. Он был голый, а ниже пояса покрыт густой серо-черной шерстью.

Ноги у него были козлиные, а на лбу - маленькие рожки, как у козленка. Он хитро поглядел на наших путешественников, вытащил из-за спины странный музыкальный инструмент, составленный из дудочек разной величины, связанных ремешками, быстро провел им перед губами сперва в одну сторону, затем в другую и сыграл какую-то мелодию, которая показалась Илюше и приветливой и веселой.

- Кто это? - спросил Илюша. - Похож на лешего, правда?

- 233 -

- А это и есть такой здешний леший. Его зовут Фавном.

Фавн еще раз сыграл на своих флейтах что-то очень славное и снова исчез за деревьями. А наши друзья отправились дальше.

Наконец они прошли лесок. Едва они миновали последние деревья, как увидели громадную вывеску на двух больших столбах. Илюша остановился и прочел:

ВАЖНО ДЛЯ ЗВЕЗДОЧЕТОВ!

КУШАЙТЕ НАШ ПРЕВОСХОДНЫЙ ШОТЛАНДСКИЙ СЫР!
ПРИЯТНО! ВКУСНО! ПОЛЕЗНО!
НЕТ НИЧЕГО ВКУСНЕЕ ШОТЛАНДСКОГО СЫРА!
по последним данным медицинской науки наш

ПРЕВОСХОДНЫЙ И ОЧЕНЬ ВКУСНЫЙ

СЫР!

УВЕЛИЧИВАЕТ ПРОДОЛЖИТЕЛЬНОСТЬ ЧЕЛОВЕЧЕСКОЙ ЖИЗНИ
РОВНО В ДВА РАЗА
ВАЖНО ДЛЯ ЗВЕЗДОЧЕТОВ!

замечательный, вкуснейший, прогрессивный,
астрономический
СЫР!

- Что это? - весело спросил Илюша. - Что это за сыр, который увеличивает человеческую жизнь? Из чего он делается? Он творожный?

- Не совсем, - ответил, улыбаясь, Радикс. - Он не столько творожный, сколько двурожный.

И они пошли дальше. Вдруг над их головами что-то зашипело, захрипело, защелкало, и гнусавый голос громкоговорителя произнес совершенно оглушительно:

"Внимание! Говорит Эллада! Говорит Эллада! Внимание! Рекомендуем путешественникам наш превосходный древний козий сыр, который представляет собой истинное совершенство по форме, а следовательно и по содержанию, и имеет вкус общеизвестного голландского сыра. По желанию может быть уложен пирамидальными числами! На вид очень приятен и напоминает солнце или апельсин. Внимание! Рекомендуем всем попробовать наш прелестный древний козий, совершенно голландский сыр! Не сыр, а объеденье!"

- 234 -

Громкоговоритель опять зашипел, защелкал и умолк. В это время веточка зацепила Илюшу за рукав, но когда он попробовал отцепиться, то, к своему крайнему удивлению, обнаружил, что его держит за рукав не ветка, а смуглая рука какой-то юной девицы. Ее черные волосы были перевиты лавровыми ветками, глаза сияли, а губы улыбались. Одета она была довольно легко. Но самое странное было в том, что эта милая девушка росла из дерева. Она еще раз улыбнулась Илюше и подала ему маленькую бумажку, свернутую в трубочку. Илюша недоуменно взял бумажку, а девушка немедленно спряталась в густых ветвях.

- Кто это? - спросил Илюша.

- А это здесь такие есть, ну... вроде русалок. В деревьях

живут. Их зовут Дриады.

Илюша развернул трубочку и прочел:

Древней дубравы Дриады так говорят тебе, отрок:
Кушай себе на здоровье наш замечательный сыр!
Кушай, гуляй и резвись по нашей привольной дубраве!
Сыр называется наш "Радость Большого Кита".

- Еще сыр! - сказал Илюша. - Какие странные названия у сыров! А разве киты любят сыр? Они, кажется, планктоном питаются?

- Питаться - это одно, - возразил Радикс, - а любить - это совсем другое. Один мой приятель любил папу с мамой, а питался преимущественно двойками...

Илюша совсем было уже ответил, что он понятия не имеет, о ком повел речь его спутник, но в это время из-за густой зелени, приплясывая и ловко перебирая своими тоненькими копытцами, снова выскочил козлоногий человечек. Он быстро сыграл на своих флейточках что-то веселенькое, а потом подбежал к Илюше и шепнул ему на ухо:

- Не верь! Не верь! Выдумывают! Самый замечательный сыр - это тот, из которого делаются морские камушки. Вот это сыр!

Снова засвистали и запели флейточки, и музыкант быстро исчез между деревьями.

- Из сыра камушки? - повторил в недоумении Илюша. - Совсем запутаешься!

- 235 -

Тут наши друзья вышли на светлую полянку. В глубине между деревьями стоял маленький домик. На ном внесла огромная вывеска, а на ней настоящими греческими буквами было изображено:

СЫРОВАРНЯ АПОЛЛОНИЯ ПЕРГЕЙСКОГО
И ПАППА АЛЕКСАНДРИЙСКОГО
НЕТ ЛУЧШЕ НАШИХ СЫРОВ!

- Ну вот, мы и пришли! - заявил Радикс.

Они теперь приблизились к тому самому домику с колоннами, который Илюша заметил еще издалека. Вместо двери у этого домика висела пурпуровая занавесь. Радикс откинул ее, и они вошли.

В большой светлой комнате, у которой не было потолка и

свет лился прямо с неба, у самого входа бил маленький фонтанчик, от которого очень вкусно пахло - то полежалыми яблоками, то вином, то лимоном, то айвой, а то еще чем-то вроде оливкового масла. Подальше сидели по-турецки два сморщенных бородатых старичка в длинных белых мантиях, подпоясанных красивыми золотыми шнурами. Они что-то уплетали за обе щеки. А сзади них на громадной тарелке возвышался большой, метра в два ростом, конус. На тарелке по краешку было написано: "Вот вам и сыр!"

Илюша хотел было спросить про это у Радикса, но в это время один из старичков произнес:

- Приятно пожевать хорошенького сырку! Дай-ка мне, Асимптотос, друг дорогой...

Но когда Асимптотос обернулся к своему приятелю, он вдруг весело воскликнул:

- Смотри, Коникос, гости! Сторона ль моя, сторонушка!

Кого я вижу!

- Привет! - отвечал Радикс.

- А что это ты привел? - спросил, прищурившись, Коникос. - Что-то микроантропоидное?

- 236 -

- По-видимому, сыроежка, - заметил Асимптотос.

Илюша с трудом перевел дух и огляделся.

- Может быть, это просто шутка? - спросил он сам себя, но невольно произнес эти слова шепотом.

- А может быть, и не просто? - укоризненно отозвался Коникос.

- И даже не совсем! - ворчливо откликнулся Асимптотос.

- А возможно, что именно так! - раздался чей-то сердитый голос сбоку, и Илюша поморщился, увидав доктора У. У. Уникурсальяна, гордо скрестившего руки на своей могучей груди и состроившего одну из самых своих замысловатых и невероятных гримас.

- 237 -

Схолия Тринадцатая,

из которой читатель легко мог бы узнать, как высоко стояло в древнее время искусство резать сыр и к каким удивительным последствиям мирового значения ведет то или иное положение сырного ножа при этой церемонии, если бы в эту схолию не ворвался несносный К. Т. Н. доктор Уникурсальян и не воспретил все сие. Зато тут говорится о том, как сотни разноцветных парабол улетели в небо, приветствуя свою прародительницу и угрожая врагам серьезнейшими неприятностями.

Далее излагается, почему невозможно понять, что такое восход солнца, если ты предварительно не покушал сырку, что ведет к ряду очень грустных воспоминаний о древних царях и калифах, из коих некоторые просто не хотели учиться, а другие поступали более решительно и сажали педагогов в очень сырые и темные места, дабы те к ним поменьше приставали. Затем читатель узнает, как считать планеты, начиная с собственных ушей, и как опасно соглашаться со специалистами по подобным подсчетам. Вслед за этим читатель знакомится с тремя инженерами, которые ехали с запада на юг в очень скором поезде.

Илюшу не очень-то обрадовал такой прием. Однако он поклонился старичкам. "Микроантропоидное? - подумал он. - Как будто это должно значить нечто ничтожно человекоподобное? .. Хм... А сыроежка?"

- 238 -

Это было, конечно, обидно, но тут Илюша подумал, что, может быть, это просто обозначает, что о", Илюша, хотел покушать сырку, и больше ничего?..

А когда он обернулся, то увидел знаменитого Командора Ордена Семи Мостов, который смотрел на всех собравшихся с величайшим презрением.

- Страшно подумать! - шепнул на ухо Илюше Радикс. - Ей-ей, мне кажется, что он сейчас речь произнесет.

Однако Доктор Четных и Нечетных лишь надменно покосился на Радикса, хотя было ясно, что он отлично понял, о чем тот перешептывается с мальчиком.

- Отменить! - воскликнул неожиданно командор. - Какой такой сыр? Что это за баловство? Не разрешается! Воспрещается!

Легкое и странное посвистывание в воздухе привлекло внимание всех присутствующих.

И невозможно описать всеобщее смущение, когда наши друзья заметили, что над зловеще скрестившим руки

Уникурсалом Уникурсалычем вьется в полной боевой готовности бесконечно сердитый и неограниченно длинный язычок прелестной Розамунды.

- 239 -

- Эге! - промолвил, почесывая затылок, Коникос. - Да тут что-то действительно не того!..

И, грустно ковыляя, он ушел в глубину своих апартаментов. Он недолго повозился там с чем-то, и вдруг громадная тарелка с его сыром покачнулась, внезапно куда-то провалилась и исчезла. Он позвал себе на помощь Асимптотоса, и вместе они выволокли вперед престранный аппарат, состоявший из большой круглой подставки с прямым тонким стержнем в середине.

Уникурсал Уникурсалыч осмотрел аппарат очень внимательно, обошел со всех сторон, потрогал стержень и, не без огорчения сообразив, что больше ему сердиться не на что, медленно растворился в воздухе, а за ним, посвистывая, исчез и язык Розамунды.

- Сей аппарат, - грустной скороговоркой, как заученный наизусть урок, забормотал Коникос, - есть наша неутомимая Центрифуга. В высшей степени полезное изобретение сие представляет собой механический станочек для получения поверхностей вращения. Так-с... Начнем с начала, как в таких случаях и полагается. Знаешь ли ты, дружок, как делается конус?

Асимптотос приволок откуда-то огромный прямоугольный треугольник, прикрепил его большой катет к стержню Центрифуги и подобострастно сказал станочку:

- Будьте добры, матушка-кормилица, не откажите!

Стержень Центрифуги начал вращаться, и при этом все скорее и скорее. Вместе с ним вращался и прямоугольный треугольник, пока наконец быстро мчащаяся по кругу гипотенуза треугольника не обратилась в серенький туман, действительно напоминавший конус. Тут Асимптотос подмигнул Центрифуге, и аппарат немедленно остановился. А конус остался стоять. В этом, по всей видимости, и заключалось волшебство.

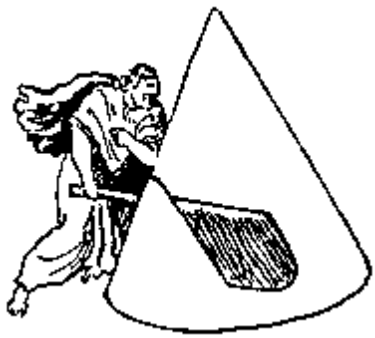
Тут Асимптотос поднял конус и поставил его на пол. Конус был красивый, отменно тонкий, внутри пустой, и высота его была два метра.

Коникос принес громадный, широченный нож, нерешительно посмотрел на собравшихся и сказал, опасливо покосившись в ту сторону, где исчез доктор Уникурсальян:

- 240 -

- Это у нас будет как бы секущая плоскость.

Тут Коникос стал на табуретку и срезал самую верхушку конуса, причем его широкий нож двигался в точности параллельно основанию конуса.



Затем он показал Илюше, что получилось на месте среза, и спросил:

- Круг?

- Круг, - отвечал Илюша.

И тут мальчик вспомнил, что ему как будто не зря толковал громкоговоритель про голландский сыр. Так как доктор Уникурсальян У. У. запретил поминать о сыре, то он молча поглядел на Асимптотоса, потом на Коникоса, потом на Радикса, потом на то самое место на полу, куда бесследно провалился конический сыр. Тогда Коникос знаками пояснил ему, что голландский сыр обычно имеет форму шара и, значит, как его ни режь, в сечении обязательно получится круг - фигура, которая у древних мудрецов символизировала нечто совершенное.

- Теперь, - сказал, Асимптотос, - следующий разрез. Тоже

предмет, достойный внимания!

И он начал резать конус, который уже опять был целый, поставив свой широченный нож параллельно образующей конуса. Затем он поднес Илюше отрезанный кусок.

Теперь срез имел форму дуги и показался Илюше знакомым.

С большой опаской и поминутно оглядываясь туда, где расплылся и исчез свирепый и неумолимый Доктор Четных и Нечетных, Асимптотос при помощи мимики и жестов дал понять Илюше, что именно об этом-то срезе - то есть об этом-то сечении конуса! - ему и говорила лесная девица Дриада, поминая какую-то "Радость Кита". Когда же Илюша шепотом спросил его, при чем же здесь, собственно, сыр, Асимптотос, весь дрожа от страха, снова знаками пояснил ему, что если бы У. У. Уникурсальян, К. Т. Н., Д. Ч. и Н. У. и проч., не был таким сердитым, то они бы ему показали, что их сыр (тот, который провалился) менял свой дивный вкус в зависимости

- 241 -

от того, как его резали, и что, разрезанный параллельно образующей, он и есть "Радость Кита", которая смертельна для врагов. Не успел Илюша спросить, при чем тут враги и киты, как Радикс уже состроил кислую мину и сказал:

- Слушай! Ну... не надо. Ну, зачем так делать? Ведь нехорошо! ..

Асимптотос густо покраснел и подал кусок конуса Илюше.

Как только Илюша взял в руки этот кусок, откуда-то раздался громкий треск и в воздух полетели сотни разноцветных ракет.

- Это в честь нашего сечения! - сказал Асимптотос. - Как ты видишь, ракеты летят в воздух по кривым, которые очень похожи на форму нашего среза. Когда снаряд летит из пушки, то он тоже двигается по этой кривой. Вот почему наш сыр так страшен врагам. Когда бьет фонтан, его струя летит вверх и падает так же, как ракета. Вот почему этот сыр так любят киты - это ведь они выдумали фонтан! Когда твои современники строят прожектор, то его отражательное зеркало тоже делается по этой кривой.

- Я ее где-то недавно видел! -воскликнул Илюша.

- Все может быть, - отвечал Коникос. - Может быть, ты видел большой бетонный железнодорожный мост? Может быть, ты видел кривую квадратов натурального ряда? Может быть, ты видел, как льется вода из Сочки?

- Не-ет, - сказал Илюша. - Постой-ка! Радикс!

А вот та кривая, которую мы рисовали в Схолии Двенадцатой?

- 242 -

- Мы их много рисовали...

- Вот та, которая получается из квадратного уравнения.

- Ах, эта! - воскликнул Асимптотос. - Она самая! Она называется параболой.

Однако Илюша успел уже сообразить, что сыр (тот самый, запрещенный, который провалился!), будучи параболически разрезан, приобретал особый, необыкновенный вкус и об этом-то и вспоминал милый Асимптотос.

- Итак, - продолжал Асимптотос, - срез помер третий! Внимание!

Теперь, когда Илюша взглянул на конус, то он увидел, что тот удвоился. Из вершины конуса вырос на той же самой оси еще один конус, стоящий вверх дном. Асимптотос снова начал резать. Теперь широкое лезвие ножа двигалось сверху вниз параллельно высоте нижнего конуса, то есть общей оси двух конусов. Как и следовало ожидать, Асимптотос отрезал сразу два кусочка от конусов.

- Необычайной формы! - заявил Асимптотос. - Идет главным образом на подтверждение закона Бойля-Мариотта, потому что объем газа обратно пропорционален давлению. В самом простом виде это сечение дает нам кривую обратных величин чисел. Если же эту кривую подвергнуть таинственной обработке[17] при помощи Знаменитого и Всемогущего Змия, то получается нечто

совершенно неожиданное: продолжительность жизни астронома увеличивается ровно в два раза, так как новая кривая дает ему в руки логарифмы, а они очень сокращают длиннейшие астрономические вычисления. Кривая эта называется гиперболой. И если ты вспомнишь синьориту Одну Энную, то есть возьмешь за ординаты числа, обратные абсциссам, то эту кривую и получишь.

Затем Асимптотос улыбнулся и произнес:

- Срез номер четвертый!

- 243 -

Он снова подошел к конусу, который опять принял свой прежний вид, и начал его резать наклонно к основанию, но не настолько, чтобы сечение прошло через основание конуса.

Кривая квадратов натурального ряда.

- Кривая этого поразительного сечения, - произнес Асимптотос торжественно, - называется эллипсом. Она имеет самое непосредственное отношение ко Вселенной, потому что Земля ходит вокруг Солнца именно по эллиптической орбите! И мы еще поговорим об этом, когда угостим тебя тем прелестным напитком, который бьет у нас из фонтана. Кривая эта долго занимала самые просвещенные умы, ибо длину ее страшно трудно было вычислить. Как вычисляется длина окружности, ты знаешь. Длину дуги параболы вычислить тоже не так уж трудно, если ты, конечно, заручишься помощью Величайшего Змия. Совсем другое дело с этой эллиптической дугой.

Еще Бонавентура Кавальери пытался вычислить ее длину, но ошибся и признался, что это ему не удалось. Тут даже сам Многомощный Змий был некоторое время в недоумении. Ты, наверно, знаешь, что на свете есть тригонометрические функции?

- Синус, косинус, тангенс... - начал Илюша.

- Вот именно. Скажу тебе под большим секретом, что у нашей приятельницы гиперболы тоже есть свои "синусы", и "косинусы". Они так и называются - гиперболический синус, гиперболический косинус. А у эллипса есть свои эллиптические функции. Штука это довольно-таки хитрая...

- Один из основателей нашего дивного домика, - продолжал Коникос, - великий Аполлоний Пергейский, как и все его современники, называл эти кривые коническими сечениями, ибо ты сам видел, что мы их все получили, рассекая конус.

- 244 -

- Эллипс, впрочем, - добавил Асимптотос, - ты можешь получить и из цилиндра, рассекая его наклонно к основанию.

Наверное, ты уж это не раз и делал, когда отрезал себе ломтик вкусной колбаски. Надо тебе кстати сказать, что ко времени возрождения наук и искусств в Европе - примерно в

шестнадцатом веке - интерес к этим замечательным кривым возник раньше всего у зодчих, которым приходилось при проектировании и возведении колонн иметь дело с цилиндрическими сечениями. Но Папп Александрит в свое время излагал учение об этих кривых как об особых геометрических местах.

Тут Асимптотос поднял свой корявый указательный палец, чтобы Илюша оценил по достоинству все значение этого важного открытия. А Илюша мгновенно вспомнил, что ему рассказывал Радикс в Схолии Двенадцатой насчет геометрических мест.

- Так вот слушан, что он придумал! Первое коническое сечение - круг - есть известное тебе геометрическое место точек, лежащих на равном расстоянии от одной точки, которая является его центром. Возьмем теперь на плоскости прямую АС и точку F, лежащую вне этой прямой. Опустим из точки С перпендикуляр, возьмем на нем некоторый отрезок, а конец этого отрезка Е соединим с данной точкой F, и если теперь линии EF и СЕ будут равны, то тогда точка Е лежит на параболе. Другими словами, парабола есть геометрическое место точек, равноотстоящих от данной прямой АС, которая называется директрисой, и данной точки F, которая называется фокусом.

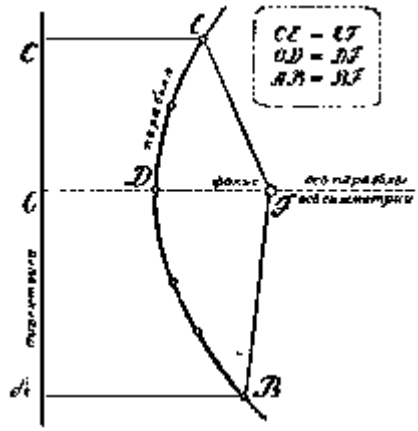
Если ты спросишь, почему точка F носит такое странное наименование, то я тебе открою, что слово "фокус" по-латыни обозначает "очаг" (а поэт Вергилий употреблял его даже в смысле "костер"), то есть место, где раскладывают огонь и откуда исходит свет. А при этом знай, что парабола имеет еще одно чудесное свойство. Если ты поместишь в точку F источник света, то каждый луч, дойдя до параболы и отразившись от нее, будет двигаться в направлении, параллельном оси симметрии параболы.

Вот почему луч прожектора такой узкий и длинный. Конечно, он в небе, как ты, наверное, замечал, тоже немного расширяется, уходя от прожектора, но это оттого, что источник света - не точка и, кроме того, изготовить математически точное параболическое

зеркало слишком трудно.

- 245 -

И Аполлоний и великий Архимед горячо любили эту кривую, но только уж время Греции уходило, а с ним уходило и время их любимой и поистине прекрасной науки...



- Но ведь теперь, - осторожно возразил Илюша, - даже мы, дети, учим про вашу параболу. Чего же вам огорчаться?

- Теперь да, - отвечал Коникос за своего пригорюнившегося друга. - Но знаешь ли ты, что после того, как рухнула древняя культура, Рим погрузился в такую бездну невежества, что в восьмом веке вашей эры во всей Западной Европе было, может быть, только несколько человек, которые могли правильно вычислить площадь треугольника или делить дроби?

- Я не слыхал об этом, - ответил Илюша. - Неужели же европейским математикам пришлось все начинать сначала?

- Нет, - ответил Коникос. - Нашлись люди, которые сохранили и нашу науку и наши книги. Это были ученые арабы.

Ведь даже слово "алгебра" - арабское слово и означает некий способ решения алгебраических задач.

- Про слово я слыхал, - ответил Илюша. - Но мне хотелось бы узнать, как математике пришлось бежать из Европы и искать приют у арабов.

- Ах, - сказал грустно Коникос, - это невеселая история! Великая наука философия и искусство древней Эллады были истинным чудом, и никогда люди не перестанут удивляться им и восхищаться ими! Но я, глядя на тебя, мальчик, из глубины тысячелетий, считаю тебя, а не древних греков, настоящим чудом! Ты еще совсем птенец желторотый и все-таки уже прочел несколько книг Евклида, и при этом никто даже не порол тебя, как это полагалось в темное время после падения Рима.

- А зачем же пороть? - удивленно спросил Илюша.

- Не зачем, а отчего! Изучение науки было до того трудным, что на него без жесточайшего принуждения были способны только исключительно одаренные люди. Уже гораздо позже восьмого века в обычай вошло давать ученую степень "магистра математики" студенту, который с грехом пополам сумел добраться до теоремы Пифагора. Вот до чего все это было трудно и как упало образование!

- 246 -

В самом начале пятнадцатого века в университете итальянского города Болоньи (а это в то время был довольно крупный центр по части изучения математики) наша наука изучалась как один из разделов курса астрологии (как ты, вероятно, знаешь, это была лженаука, посвященная способам гадания по звездам). Вся программа преподавания математики заключала в себе действия с целыми числами и первые три книги Евклида, то есть начала планиметрии. А теперь студент второго курса знает много больше Архимеда.

- Но ведь так и должно быть, - возразил Илюша, - потому что ведь все развивается.

- Не в этом дело. А вот что мне припоминается. Однажды в Александрии, где пышно цвели науки, царь Птолемей, чья держава была громадна и могущественна, беседовал с Евклидом. И царь сказал так: "Скажи мне, о мудрец, нет ли иного способа изучить твою дивную науку и проникнуть в ее удивительные тайны, чем при помощи книги твоих труднейших "Начал"?" Ты сам понимаешь, что царям перечить не очень-то удобно. А Птолемей был великий царь и покровитель наук.

И все-таки Евклид поглядел на владыку мрачно и ответил:

"Есть только один путь в геометрии. И нет там особых путей даже и для великих царей".

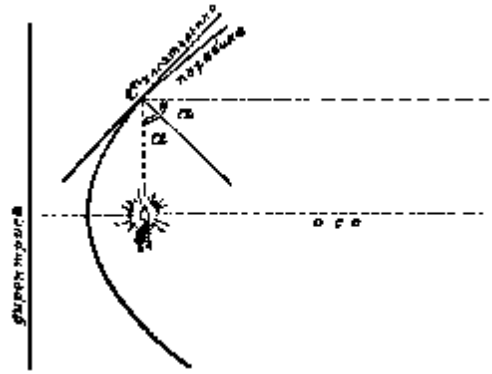
- Вот это здорово! - вскричал Илюша. - Так ему и надо, хоть он и царь!

Коникос грустно покачал головой.

- Нет, - отвечал он, - разве мудрец думает о том, чтобы сказать острое словцо, чтобы насмешить людей? Мудрец не помнит об этом, нет.

Это были гордые слова, а в то же время и немощные. Потому что этой фразой Евклид признался, что он не в силах научить своей науке человека со средними способностями. И вот в этом-то и было самое трудное.

Луч света отражается от точки E и уходит по прямой, параллельной оси параболы (угол падения a = углу отражения).



Источник света в фокусе.

Пока великое государство цвело, пока у царей было богатство в избытке, они ласкали науку, и она развивалась.

- 247 -

Чтобы ты мог себе представить, каково было это развитие, я скажу тебе, что уже во времена римлянина Цезаря (первый век до нашей эры) в Александрийской библиотеке насчитывалось семьсот тысяч свитков-книг! А когда наступили трудные времена, когда пришли легионы римлян, математика захирела.

У нее было слишком мало друзей. А простой народ думал, что мы колдуны. И не только простой народ, некоторые римские императоры держались того же мнения. Один из них издал страшный закон, где говорилось о том, каким наказаниям должны подвергаться "математики и прочие злоумышленники", которых они считали просто гадателями по звездам.

- Что за чепуха! - сказал Илюша. - Как это так выходит? Значит, если человек знает, что такое медиана, он злодей?

- Если ты не можешь объяснить людям просто, что такое твоя наука и зачем она нужна, то возникают неразрешимые недоразумения. А так как у тебя мало друзей, то некому тебя защищать. И ты становишься жертвой невежества. И ты и твоя наука. Грозный Рим ничего не мог дать нашей великой науке. Даже повторить ее начатки он не мог толком. А когда рухнуло и колоссальное Римское государство, светоч знания еще теплился в Византии. Учебник геометрии шестого века представлял собой маленькие выдержки из "Начал" великого Евклида - то, что вы теперь называете "конспектом". Теоремы приводятся без доказательств. Следовательно, ты получаешь ряд таинственных правил, выведенных неведомо как. Ты можешь их выучить наизусть. Но как же можно с такими "знаниями" двигаться далее? А долгое время в течение средних веков такие книжки считались венцом математической премудрости! Как плохо умели

управляться с основными понятиями своей науки ученые старого времени, ты можешь судить вот по какому примеру. Итальянский математик пятнадцатого века Тальенте, желая определить, что такое круг, говорил буквально следующее: "Круг есть нечто круглое".

И вот эту почти непонятную фразу повторяют вслед за Тальенте почти все учебники того времени! Другой итальянский математик того же времени, Лука Пачиоли, рассказывая в своей книге о совершенных числах, уверяет своего читателя, что разница между совершенными и несовершенными числами точно такая же, как между здоровым и больным человеком, и что, кроме того, совершенные числа потому кончаются четной цифрой, что все люди хорошего поведения обычно умирают хорошей смертью, то есть, подобно совершенным числам, имеют "хороший конец". Ты сам можешь судить, как были полезны для учеников эти пустые бредни и болтовня!

- А как же арабы восприняли вашу науку?

- 248 -

- Когда эти воинственные кочевники завоевали у ослабевшей Византии богатые и плодородные долины Египта, Сирии и Северной Африки, то там образовались могущественные и роскошные государства арабов. И великолепные калифы, так же как и владыки из дома Птолемеев, помогали ученым. Арабы стали собирать, изучать и переводить греческие рукописи. Среди их новых подданных, особенно в Сирин, оставались образованные люди, которые им помогали в этом.

Наука Индии тоже пришла к ним на помощь. Они изучали труды греческих геометров и философов, устраивали библиотеки, обсерватории, мощные и величественные развалины которых еще и теперь вызывают удивленно. Арабы вели долгие войны с ослабевшей, но не раз выстаивавшей Византией, и до нашего времени дошли тексты мирных договоров арабских калифов с византийскими базилевсами, по которым побежденные византийцы обязывались передать своим победителям - арабам - некоторое количество драгоценных греческих математических манускриптов. Вот как ценили арабы греческую науку! В дальних городах, вроде Хивы и Самарканда, выросли новые ученые, которые изучали геометрию Евклида, арифметику Диофанта и под влиянием индийских ученых начали строить новую науку - алгебру. В девятом веке арабский ученый Альхваризми уже формулировал элементарные положения этой науки. Его творения затем через сотни лет переводили в Европе. Арабское имя этого автора очень странно звучало для полуграмотных переписчиков книг, и они переименовали его в Алгорифм. Это

слово и по сию пору осталось в математике как термин, подобно тому, как именем известного физика Вольты называют физическую единицу, которой измеряется напряжение электрического тока. (Математики называют алгорифмом некоторую твердо определенную последовательность действий с буквами или числами, которая должна нас привести в конце концов к цели, поставленной нами в данном случае. Мы, например, можем говорить об алгорифме деления многозначных чисел, об алгорифме извлечения квадратного корня, об алгорифме Евклида для нахождения общего наибольшего делителя - способе последовательного деления. В более общем смысле мы называем алгорифмом целую систему правил для вычислений, которая применяется для решения ряда связанных между собой вопросов. Вот в этом смысле мы и говорим об "алгорифме десятичных дробей" и понимаем под этим выражением все те правила, которые относятся к действиям над этими дробями.)

Только уже после крестовых походов Западная Европа наконец ознакомилась вплотную с математикой. А после того как турки взяли Византию и совершенно разрушили это государство, греческие беженцы привезли европейцам древние рукописи, уцелевшие в Византии, где они переписывались, комментировались, даже изучались, но на практике применялись только разве что для нужд лженауки астрологии, то есть гадания по звездам. Так вообще было и на Востоке. Но после появления в Европе византийских рукописей (а это уже было в пятнадцатом веке) и начинается истинное возрождение математики в Европе, хотя почва для этого уже была подготовлена учеными двенадцатого века, которые узнали наконец греческие сочинения. Но это развернулось во всю силу только тогда, когда после долгих времен мрака и суеверия люди снова начали изучать природу опытами и когда ученые показали, что наша наука нужна не для разных детских глупостей, вроде гадания по звездам, а для развития техники. Вот как это было, если сказать вкратце. Надо еще добавить и то, что церковь долгое время боролась с наукой, уверяя, что старые легенды древних евреев, нравоучительные басни необразованных людей были гораздо более совершенной истиной по сравнению с тем, что может открыть наука.

- Как так? - спросил Илюша.

- Сейчас даже трудно понять, как мыслили люди, которые защищали древние сказки против научных истин. В старых сказках, например, говорилось, что Солнце ходит вокруг Земли, и естественно, что необразованный человек так и должен думать.

Когда же ученые пытались доказывать, что это не так, то церковь сперва начала их убеждать, что так думать грешно, а потом, когда это не подействовало, она стала их сажать в тюрьмы, мучить и казнить самым жестоким образом. Джордано Бруно умер, сожженный живым на костре в Риме. Вот какие убедительные доказательства приводила церковь, оспаривая положение, что центром Солнечной системы является не Солнце, а Земля! Когда ученые говорили, что Луна не планета, что планет всего не семь, а больше семи или меньше и что Солнце нельзя называть планетой, то им отвечали, что это невозможно по той причине, что семь - священное число. В доказательство этого удивительного соображения церковники говорили, что ведь и голова человека имеет семь отверстий, но не больше и не меньше. А отсюда для них было очевидно, что и планет может быть как раз не больше и не меньше семи. Коротко и ясно. Один из старинных математиков с большой опаской говорил об умножении дробей, боясь впасть в противоречие с библией, ибо там слово "умножить" употребляется только в смысле "увеличить"! Вот в каких условиях должны были люди бороться за науку. Но они не падали духом, боролись и победили. Вот почему ты уже сейчас знаешь больше того, что знали средневековые грамотеи.

Не забывай об этом!

- 250 -

- Нет! - отвечал мальчик. - Я узнал здесь много удивительных вещей, но, пожалуй, всего удивительнее - это то, с каким самоотвержением и с какой энергией ученые боролись с невежеством и каким замечательным мужеством они обладали. Даже подумать страшно, как же это можно рассуждать о том, что такое бесконечность, когда за число семь тебя могут казнить!

- Ты совершенно прав, - сказал Радикс. - В сущности, с великим Галилеем так и было. Он умер, находясь под домашним арестом и окруженный шпионами церковников еще и потому, что смеялся над разговорами о священных числах.

Самое жуткое во всей этой истории было то, что когда его привели на "суд" этих бесчеловечных невежд, он, опасаясь их раздражить, даже не стал спорить с ними. Именно это-то и возбудило в них самые черные подозрения. Они решили, что этот человек опасный "еретик" и сам прекрасно понимает, как он прегрешил против их "истины", а теперь при помощи притворного признания своей "вины" просто пытается увернуться от справедливого наказания. Вот какое это было страшное время!

- Да, - произнес задумчиво Илюша, - правда, страшное.

Но мне хотелось бы узнать подробно, как потом работали ученые и как возродили они математику.

- Хорошо, - сказал Асимптотос, - мы все это можем рассказать, если у тебя хватит терпения слушать, но кое над чем придется и голову поломать, иначе ничего не узнаешь. Раньше всего ты должен запомнить вот что: возрождение математики в Европе было не только воскрешением старой науки - нет, это было возрождение на совершенно новой основе. Наука наша перестала быть забавой великих калифов и достоянием немногих, она стала всеобщим достоянием и начала помогать людям строить здания, корабли, ходить в дальние странствия по морям и океанам, делать могучие машины, слышать голос человека за многие тысячи стадий, носиться по дорогам так быстро, как не может бегать ни одно самое быстроногое животное, сделать небесную молнию своей рабыней, перевозить из страны в страну тяжести, которые не под силу ни слону, ни киту, летать по воздуху быстрее стрекозы, обращать пустыни в цветущие нивы и так далее. Вот почему она стала дорога людям.

- Это я понимаю, - отвечал Илюша. - А в каком веке жили хозяева вашей прекрасной сыроварни?

- Аполлоний родился в царствование Птолемея Эвергета, а отошел в мир теней в царствование Птолемея Филопатора, который царствовал с двести двадцать второго по двести пятый год до вашей эры. Он происходил из города Перш.

- 251 -

А Папп родился в Александрии около трехсот сорокового года вашей эры, то есть в четвертом веке. Он моложе Аполлония на каких-нибудь полтысячи лет.

Илюшу вдруг кто-то тронул за плечо, и, обернувшись, он, к крайнему своему неудовольствию, снова увидел дорогого Уникурсала Уникурсалыча собственной персоной.

- Не морщитесь, любезное дитя! - важно произнес Доктор Четных и Нечетных, заметив, что Илюша не очень-то ему обрадовался. - У меня к вам есть важное дело. Я, во-первых, полагаю, что нечего рассказывать маленьким детям эти арабские параболические сказки. Надо, во-вторых, работать, а не сказочки слушать. Так вот изволь-ка мне немедля решить нижеследующую в высшей степени полезную задачку. Внимание! Однажды шел в направлении с запада на юг скорый поезд. Машинист, обер-кондуктор и проводник очень мягкого вагона - все были молодые люди и отчаянные спортсмены. Звали их Коля, Боря и Сережа, но... кого из них как звали, я и сам до сих пор разобраться не могу. Надеюсь, что ты мне поможешь. Дело в том, что мне известны некоторые подробности насчет этого удивительного скорого поезда, с помощью которых сообразительный молодой человек быстро догадается, как кого зовут. Представь себе, что в

мягком вагоне, где проводником был тот самый юноша, имя которого и представляет для нас, так сказать, камень преткновения, ехали три почтенных путейских инженера из управления этой дороги, люди пожилые и относившиеся к спорту с величайшим равнодушием. А звали их Сергей Николаевич, Николай Леонидович и Борис Павлович. В остальном мне известны следующие очень важные подробности. Николай Леонидович жил в Тамбове, а проводник мягкого вагона жил на полпути из Москвы в Тамбов. Сергей Николаевич получал хорошую зарплату, и вместе с премиями он за этот год выработал две с половиной тысячи рублей девятнадцать копеек. Проводник мягкого вагона зарабатывал в год одну треть того, что зарабатывал один из пассажиров, тот именно, по соседству с которым он живет, то есть тот из них, кто ему приходится земляком. А тезка проводника живет в городе Москве, на Лермонтовской площади. Один из этих шестерых людей, тот самый, которого зовут Борисом, обогнал в прошлом году на озере Сенеж брассом обер-кондуктора, так что тот с горя даже плавать бросил и перешел на шахматы и городки. Ну, я надеюсь, что ты все понял? Так вот ты мне скажи, пожалуйста: как звали машиниста?

- Хорошее озеро Сенеж! - мечтательно произнес Радикс.

- Самая симпатичная станция Московского метро - это "Лермонтовская"! - поддержал его Коникос.

- Да-а! - заметил Асимптотос. - Две с половиной тысячи рублей и девятнадцать копеек - это, что ни говори, хорошие деньги!

- Постой! - сказал вдруг Илюша. - Я понял: машиниста звали Борей.

- Враки! Ничего подобного! Ошибка! Переделать задачу наново! Безобразие! - заорал не своим голосом взбешенный Уникурсал Уникурсалыч.

- Задача решена правильно, - сказал сердито Радикс. - Зачем ты его путаешь? Как тебе не стыдно!

- Вранье! - еще громче закричал Доктор Нечетных.

Тут поднялся такой страшный крик, что ничего понять было невозможно, и как автор ни старался прислушаться, он не мог разобрать, кто тут прав, а кто виноват. Так что уж придется читателю самому разобраться, как звали этого молодчагу машиниста. Я уверен, что он с этим справится. Ясно, ясно, что справится!

Схолия Четырнадцатая,

посвященная самым возвышенным чудесам и до крайности загадочная, ибо хотя в ней снова толкуется о сырах, но сыры эти до такой степени замысловаты, что тех, кто их придумал, неоднократно и совершенно всерьез обзывали безумцами, а так как это делалось печатно, то отчасти напоминало ругань.

Речь идет всего лишь о том, как купить себе полчасика сыру, да кстати еще и о том, как поступил бы король Альфонс Кастильский, если бы он присутствовал при сотворении мира.

Затем вслед за таинственным появлением дивных древних теней мы видим одну забавную веревочку двухтысячелетней давности, одну особу весьма несложного устройства и аппарат, который понимает положительное и отрицательное совершенно по-своему и в особом смысле, хотя речь идет всего лишь о фисташковой скорлупе и самых обыкновенных кавалерийских седлах, а также о том, каким именно гигиенически-геометрическим телом надлежит пользоваться по утрам благонравным малюткам, и о некоем мире, где нет надобности в мерах длины.

Справедливость, однако, заставляет старательного автора этой правдивой книжки сообщить читателю еще следующее: дело в том, что - внимание! внимание! внимание! говорит ВОЛШЕБНЫЙ ДВУРОГ! - необыкновенные, неслыханные чудеса этой ослепительной схолии суть чудеса не простые, а особые.

А особенность их заключается в том, что их сразу трудно разглядеть, они сперва кажутся совершенно неуловимыми! По этой причине всякий из наших прилежных и усидчивых читателей, кто столкнется с этим странным явлением, должен поступить очень просто: прочесть эту трогательную схолию еще раз и еще раз, дабы наконец разобраться, как идут дела в том самом удивительном мире, где никогда ничего подобного не бывает!

Илюшины приятели и наставники так громко спорили друг с другом, с таким жаром доказывали, что врать не должно, но ставить в тупик в высшей степени похвально, что Илюше стало скучно, и он потихоньку выбрался из домика Асимптотоса. Пахучий воздух, красивые купы вечнозеленых растений и тишина словно обступили его со всех сторон. Неподалеку снова раздались знакомые звуки флейты, и козлоногий Фавн выскочил из-за кустов. Наконец он опустил свои флейточки и оглянулся на

домик Асимптотоса, откуда в то время донесся крик доктора У. У. Уникурсальяна: "А я, напротив того, буду утверждать, что то, что не невозможно, тем самым и является основным и даже единственным прототипом общеобязательного!.." Фавн поманил Илюшу немного подальше и, нагнувшись к самому его уху, торопливо начал шептать:

- У них еще есть! Что есть - боюсь сказать. Но то же... вроде... Тесс! Молчок! Дело в том, что у них, видишь ли, есть еще... особые сорта голландского. Один называется альмагестическим сыром. Это давнишний сыр, традиционный, легендарный, многозвездный, покровитель мореходов, любимый сыр звездочетов, пока, разумеется, они еще не знали того, шотландского сыра. А сверх того еще один сыр, необыкновенный, якобы круглый... Называется - казанский.

- Казанский? - переспросил Илюша с удивлением.

- В этом городе сварили такой сыр, что самые серьезные люди называли этого дивного сыровара Коперником геометрии!

Это был второй Евклид. И представь себе, что эти сыры измеряют не на килограммы, потому что это и устарелый и неостроумный способ. На километры тоже неудобно - очень длинно! Долго они думали над этим вопросом. Пробовали мерить мегомами, атмосферами, люксами, кулонами, лошадиными силами, грамм-молекулами, большими калориями - и все как-то не получалось.

Но когда Коникос умножил одну секунду на шестьдесят в квадрате, то вышло в самый раз.

- Шестьдесят в квадрате секунд? - сказал Илюша. - Да это ведь час? Как же это так? Приходишь в магазин и говоришь: "Будьте так добры, дайте-ка мне полчасика сырку!"

- 255 -

- Ну почему час? - возразил козлоногий его собеседник. - Не час, а градус! Даже и градус-то не особенно удобная мера для сыров. Они меряют сыр, умножая градус еще на девяносто, то есть, попросту сказать, меряют его прямыми углами.

Когда ты попросишь: "Отпустите мне альмагестического сыру три прямых", тут уже все ясно и никаких недоразумений быть не может.

Илюша никак не мог сообразить, как это можно измерять сыр прямыми углами, однако он заинтересовался этим, потому что только что убедился, что все, что в прошлой схолии ему рассказывали о различных сырах Фавн, Дриада и громкоговоритель, хотя на первый взгляд это и была чушь непролазная, в дальнейшем получило вполне понятное объяснение.

Поэтому он и сейчас подумал, что, наверно, Фавн, рассказывая ему об альмагестическом и казанском сырах и отвешивании оных при помощи прямых углов, имеет в виду что-то необыкновенно интересное. В это время занавесь домика Асимптотоса широко распахнулась, оттуда выскочил покрасневший, как свекла, Коникос и крикнул:

- Молодой человек! Куда ты девался?

Илюша, недовольный тем, что его оторвали от такого интересного разговора, вышел потихоньку из-за кустов. А из домика показался очень взволнованный Асимптотос.

- Справедливые боги! - воскликнул он, воздевая руки ввысь. - Вот благодарность за мои красноречивые рассказы!

Убежать от меня в лес и там начать болтовню с какой-то бессловесной скотиной! Клянусь плавающим параболоидом Архимеда, ведь ты же неведомо чего от него можешь набраться!

Идем скорей!

- Я не знал, - сказал смущенный Илюша. - Но у вас там такой крик стоял...

- Не крик, а чисто принципиальное недоумение! - строго ответил ему Магистр Деревьев, высунувшись из-за занавеси.

Илюша не осмелился вступать с ними в пререкания и снова вошел в домик.

Стоявший в уголке Радикс досадливо погрозил ему пальцем. Илюша поспешно подошел к нему.

- Послушай, Радикс, - сказал он еле слышным шепотом, - я просто вышел на минутку. А этот Фавн, тот самый - помнишь?..

Но не успел Илюша докончить этой фразы, как около него словно из-под земли вырос всепроницающий Командор О. С. М.

- Это что такое? - строго вопросил он. - Кто это тебе позволил, гадкий мальчик?

- 256 -

А не хочешь ли, я прикоснусь к тебе при помощи касательной так, что ты у меня улетишь на такую бесконечно удаленную точку, что тебе оттуда архимедово число с квадриллионами нулей с единичку покажется?

И не успел еще Илюша рта раскрыть, как Доктор Четных и Нечетных воскликнул гневно, мрачно и торжественно:

- Молчание!

И вдруг лопнул, рассыпавшись разноцветными искрами.

Радикс, Асимптотос и Коникос стояли озадаченные, оторопевшие.

- Н-н-ну-с... - произнес слегка вздрагивающим голосом Коникос, - кажется, обошлось... Но, пожалуйста, не шали больше! Приступим к дальнейшему.

И в тот же миг перед нашими друзьями вырос громадный шар, метров трех в диаметре. Коникос снова взял в руки свой широченный нож, подошел к громадному шару и начал:

- Если взять поверхность обыкновенного шара, то есть сферу, то из нее возможно получить некоторый своеобразный треугольник.

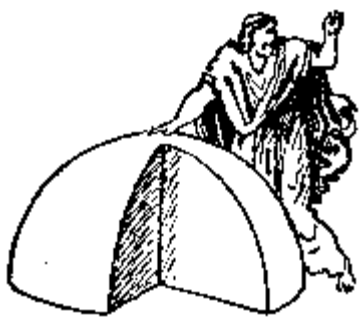
Тут Коникос разрезал сферу своим широченным ножом ровно пополам, по экватору, и толкнул нижнюю половинку; она сдвинулась, откатилась и исчезла, а верхняя половина медленно опустилась на пол. Коникос снова разрезал ее пополам. А затем получившуюся четвертинку сферы он рассек еще раз надвое.

- Ну, вот-с! - сказал он, поглядывая на эту восьмую часть сферы. - Я утверждаю, что я получил треугольник. И я попрошу тебя, Илюша, выяснить, чему равняется сумма его углов.

- Мне кажется, - отвечал Илюша, - что вот этот угол, который поближе, очень похож на прямой... Но только я не уверен, что его можно называть прямым, просто потому, что не знаю, как измеряется угол между двумя кривыми.

- Измеряется он довольно просто, - отвечал Коникос. - Мы в таком случае меряем угол не между самыми кривыми, а между двумя их касательными, касающимися наших кривых как раз в той точке, которая есть вершина нашего угла. Ясно?

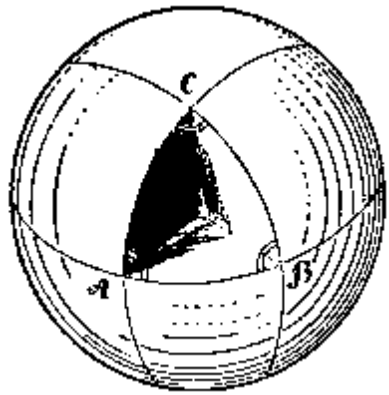
- Да, как будто ясно, - отвечал мальчик.



Илюша внимательно осмотрел получившийся у Коникоса кусок сферы, но сперва не обнаружил во всем этом ничего интересного. Разрезали шар на восемь частей - что же тут особенного? Иной раз так и арбузы режут...

- Я думаю, - заявил Илюша приглядевшись, - что этот кусок сферы образует с плоскостью, на которой он лежит, только прямые углы. Угол А прямой (смотри на картинку!), угол В прямой, и угол С тоже прямой! Следовательно, поверхность шара-сфера, - разрезанная таким образом, дает треугольник, сумма углов которого равняется трем прямым углам. Но как же это может быть? Ведь в настоящем треугольнике сумма углов равна

двум прямым углам!.. Впрочем, это треугольник кривой, а если его растянуть на плоскости...



- А ну попробуй растяни! - сказал Асимптотос, приподняв свой треугольник и подавая его Илюше. - Только не рвать!

Илюша начал растягивать, но оказалось, что этот странный треугольник не хочет растягиваться. Когда Илюша нажал на него покрепче, он выгнулся в другую сторону, как зонтик под сильным ветром, но растягиваться не соглашался.

- Вот как, Илюша! - сказал Радикс. - Учил ты, учил планиметрию, а как до трех прямых дошло, так и запутался!

Ты прими во внимание: все, что ты учил о треугольниках, правильно, пока они на плоскости. И там все евклидовы теоремы правильны. Так и говорится: "евклидова геометрия".

А на шаре мы получаем не-евклидову геометрию. Если взять огромный шар и рассматривать маленькие треугольники, то чем шар больше, тем ближе их геометрия приближалась бы к евклидовой. Если бы радиус шара был безгранично велик, тогда бы и на его поверхности Евклид оказался прав. А на данной сфере в таком треугольнике сумма углов зависит от его площади, тогда как на плоскости это величина постоянная и равна 2d. А это сферический треугольник, но не плоский.

- И существует, - добавил Коникос, - особая сферическая тригонометрия, которая весьма необходима мореплавателям и астрономам. Она даже появилась на свет ранее обычной в одном астрономическом сочинении Клавдия Птолемея, так называемом "Альмагесте", написанном около сто тридцатого года вашей эры в Александрии.

"Так, так, так! - подумал Илюша. - Вот почему Фавн говорил об альмагестическом сыре и прямых углах!"

- До Коперника, - продолжал Коникос, - это было самое серьезное и самое авторитетное сочинение по астрономии.

Европейцы узнали его в арабском переводе, и под этим арабским названием "Альмагест" оно и стало известно. Именно там и изложена геоцентрическая теория Птолемея. Настоящее заглавие этого сочинения - "Великое построение математическое". Оно несомненно заслуживает такого названия, ибо долгое время служило на пользу людям.

- Но ведь это же было неверно, - сказал Илюша, - раз он считал, что в центре нашей системы находится Земля, а не Солнце? Мне вспоминается, что у Ломоносова есть даже стихи по этому поводу...

- Какие такие стихи? - спросил Гадикс.

- Постой-ка, сейчас вспомню, - отвечал мальчик. - Ага... вот как:

Случились вместе два астронома в пиру
И спорили весьма между собой в жару.

Один твердил: Земля, вертясь, круг Солнца ходит;
Другой - что Солнце все с собой планеты водит.
Один Коперник был, другой слыл Птолемей.
Тут повар спор решил усмешкою своей.

Хозяин спрашивал: "Ты звезд теченье знаешь?
Скажи, как ты о сем сомненье рассуждаешь?"
Он дал такой ответ: "Что в том Коперник прав,
Я правду докажу, на Солнце не бывав.

Кто видел простака из поваров такого,
Который бы вертел очаг кругом жаркого!"

- Возможно, это и так, - отвечал Асимптотос, - в том смысле, что с физической точки зрения естественней считать центром системы Солнце, а все-таки службу "Альмагест" сослужил немалую. И без него было бы не так-то просто построить современную систему. Но система "Альмагеста" уже тем нехороша, что она чересчур сложна. Планета двигалась у Птолемея вокруг Земли не просто по кругу, а по некоторому небольшому кругу, а центр этого круга, в свою очередь, катился по другому, большому кругу, в центре которого находилась Земля. Круги вертелись в разные стороны, да еще с переменной скоростью. Если составить карту звездного неба и нарисовать на ней путь движения какой-нибудь планеты на фоне неподвижных

звезд ("планета" ведь и значит "блуждающая звезда"), то окажется, что он представляет собой кривую, которая образует петли. Планета двигается в определенном направлении, затем начинает опускаться, потом как бы идет назад, в "обратном направлении", снова поворачивает и, описав таким образом петлю, вновь начинает двигаться в том же примерно направлении, с которого мы начали.

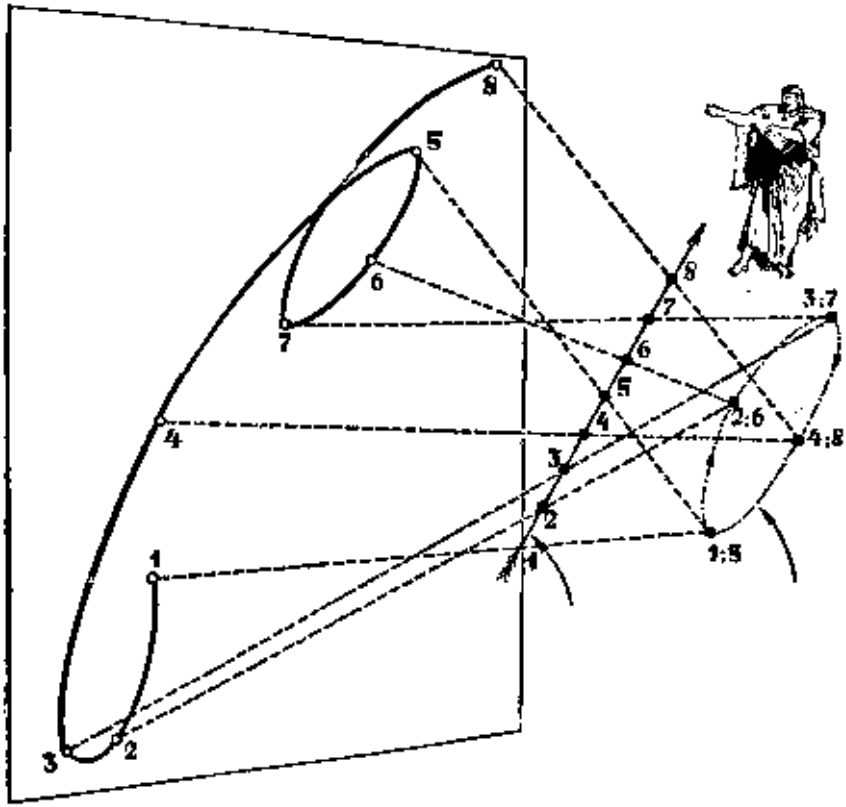
- 259 -

- Можно сказать еще, - добавил Коникос, - что греческим ученым казалось, что все планетные движения можно объяснить равномерными движениями по кругам. Но это не удавалось. Поэтому и была создана система Птолемея, то есть сложная система кругов (так называемых эпициклов и деферентов), которая имела в виду воссоздать теоретически эти петли планетных движений, что ей и удалось. Это придумал Аполлоний Пергейский, наш великий покровитель. Однако даже и эта сложная система не всегда давала правильные решения при отыскании места планеты на небе в тот или иной момент, и приходилось иногда вводить еще и третий круг. Рассказывают, что король Кастилии Альфонс Мудрый (XIII век нашей эры), твердо веривший, что еврейский бог некогда из ничего "сотворил" мир в шесть дней, ознакомившись с системой Птолемея, воскликнул: "Если бы я присутствовал при сотворении мира, я бы посоветовал господу богу устроить его как-нибудь попроще!" Александрийские астрономы, впрочем, не задавались целью определить, как двигаются планеты в трехмерном пространстве. Эта мысль пришла людям в голову много позже. Александрийцы были довольны и тем, что с календарем у них на небесном своде выходит все правильно. Коперник, однако, подошел ко всей задаче с точки зрения пространственной. И тогда ему не так уж было трудно объяснить, что на самом деле планета никаких Птолемеевых петель не описывает, а мы их видим потому, что смотрим на планету из различных точек в мировом пространстве. Если же смотреть на планету не с Земли, а с Солнца, то никаких петель мы не заметим.

- Понял? - спросил Радикс.

- Не-не... очень... - признался Илюша.

- 260 -



- А мы сейчас тебе расскажем. Ты смотришь с Земли на Солнце и на планету. Солнце за год обойдет окружность вокруг тебя, - тут все просто. Но ведь планета ходит не вокруг тебя, а вокруг Солнца. Следовательно, когда ты смотришь с Земли, ты видишь, как планета, двигаясь вокруг Солнца, вместе с ним двигается вокруг тебя. И выходит, что она совершает вокруг тебя нечто вроде винтовой линии. Ты смотришь на нее сбоку - вот и получаются петли. Ну как? Дошло?

- Как будто дошло, - отвечал Илюша. - Но ведь мы считаем, что не Солнце ходит вокруг Земли, а Земля вокруг Солнца...

- Чтобы понять, что ты будешь "видеть", нет нужды становиться на эту "точку зрения".

- Ведь дело-то не так уж хитро, - добавил Коникос, - если исходить из движения Земли по орбите. И все это легко выяснить на опыте.

- 261 -

Он махнул рукой, и в домике стало темно. Перед стеноп повис в воздухе небольшой еле светящийся шарик, а в руке у Коникоса оказался другой, испускавший довольно яркий свет, так что слабо светящийся шарик отбрасывал тень на стену.

- Допусти, - сказал Коникос, - что я наблюдаю с Земли за этим светящимся шариком, который есть не что иное, как планета. А стена у нас будет тем самым фоном неподвижных звезд, который виден с Земли и по которому мы и судим о движении планеты.

Коникос поднял свой ярко светящийся шарик и пошел справа от Илюши, затем назад к нему, а потом снова от него и снова к нему, изображая движение Земли по орбите. Тень слабо светящегося шарика, висевшего в воздухе, ровно ходила по стене туда и сюда как раз в противоположную сторону тому, куда двигался Коникос.

- Я, - сказал Коникос, - двигаюсь в пространстве, а планета моя не двигается. Ты видишь, что делается с тенью ее?

- Вижу, - отвечал Илюша.

- Теперь пусть наш слабо светящийся шарик идет вперед, параллельно стене.

Слабо светящийся шарик двинулся медленно вперед, а Коникос по-прежнему продолжал ходить из стороны в сторону.

Теперь тень светящейся точки сперва пошла назад, потом повернула и бросилась вперед, но спустя некоторое время снова повернула назад, а потом опять бросилась вперед.

- Ну, теперь я понял, - сказал Илюша.

- Надо еще не забывать о том, - добавил Радикс, - что наука о звездном небе с самых древних времен была необходима человеку в его путешествиях. Мореход в открытом море определяет свое положение по звездам. Так же поступает и кочевник в пустыне, где тоже нет ориентиров. Знания о звездах накапливаются и постепенно превращаются в науку. Наш русский путешественник-естествоиспытатель В. К. Арсеньев рассказывает[18], как зимой в тундре, среди необозримых снегов он кочевал с одним племенем тунгусов. Однажды ему сказали, что дня через два они сойдутся с другим кочующим народом. Наконец кочевники выбрали себе какое-то место, которое, по мнению Арсеньева, ничем не отличалось от других.

К вечеру старики стали наблюдать небо, но жаловались, что густая облачность не дает рассмотреть то, что им надо, и из-за этого они не совсем уверены, так ли выбрали место стоянки, ибо их родичи придут на определенное место. Прошло два дня, и утром, проснувшись, Арсеньев с изумлением обнаружил, что другие кочевники пришли на то же место. А в дальнейшем ему неохотно и не очень толково объяснили, что старики определили место по звездам, причем очевидно, что старики в обеих группах кочевников руководствовались одними и теми же признаками. Значит, астрономии человека учила сама жизненная необходимость!

- 262 -

- Ну теперь, - сказал Асимптотос, - вернемся еще к нашему сферическому треугольнику. Лучше сказать - к геометрии на сфере. Выясним, какие линии играют на сферической поверхности роль прямых. Архимед в сочинении "О шаре и цилиндре" вводит допущение, что прямая есть кратчайшее расстояние между двумя точками, откуда мы приходим к заключению, что "прямой" на сфере будет дуга большого круга, то есть такого круга, который получится при сечении сферы плоскостью, проходящей через центр сферы. Если это так, то очевидно, что на сфере не может быть параллельных "прямых", ибо две "прямые" обязательно пересекаются в. двух точках (как меридианы на полюсах). Площадь треугольника на сфере тем больше, чем более превышает сумма его углов плоскостную меру, то есть два прямых угла. Что касается до "прямых" на сфере, то это очень просто можно проверить на глобусе при помощи резиновой нитки. Попробуй-ка на глобусе поехать по тридцать девятой параллели из Лиссабона в Нью-Йорк или из Иокогамы в Сан-Франциско.

- Обязательно попробую! - сказал Илюша.

- И хорошо сделаешь, - отвечал Радикс. - Знай, что это обстоятельство крайне затрудняет черчение географических карт на плоскости и что над разрешением вопроса о том, как начертить карту, чтобы искажение масштабов было наименьшим, работал крупнейший русский математик Пафнутий Львович Чебышев, живший в девятнадцатом веке, а также и ученики его. Я тебя вот еще о чем спрошу: если мы начертим какую-нибудь геометрическую фигуру на плоском листе бумаги, а потом изогнем этот кусок бумаги как-нибудь, то что сделается с теми линиями, которые у нас на плоскости были прямыми?

- Они уже не будут прямыми, - отвечал Илюша.

- Правильно, - согласился Коникос. - Но кратчайшими расстояниями среди линий, соединяющих две точки на поверхности и целиком лежащих на поверхности, они останутся. Такие линии называются геодезическими. Геодезическими на сфере, очевидно, являются большие круги.

- Самое интересное, - добавил Радикс, - это то, что на сфере совсем не может быть параллельных линий.

- 263 -

- Н-да, разумеется... - задумчиво и неопределенно протянул Асимптотос. - Однако ведь у нас есть еще один необычайнейший треугольник. Сумма его углов не больше 2d и не равна 2d, а меньше двух прямых углов.

- Это уж что-то совсем непонятное! - сокрушенно заявил

Илюша.

- Разумеется, - промолвил Радикс, - геометрия, в которой можно построить такой треугольник, есть тоже не-евклидова геометрия. Ее открыл и разработал великий русский геометр Николай Иванович Лобачевский, профессор Казанского университета. Он жил с тысяча семьсот девяносто третьего года по тысяча восемьсот пятьдесят шестой год. Его труды, опубликованные в тридцатых годах девятнадцатого столетия, были настолько поразительны и вели к таким необычным и неожиданным последствиям, что лишь немногие его современники могли понять и оценить эти труды.

- Надо тебе сказать, - продолжал вслед за другом Коникос, - что теорему Евклида, которая гласит, что сумма углов плоского треугольника равна двум прямым, можно вывести на основании одного из двух положений:

1) из одной точки можно провести только одну параллельную линию к данной линии или 2) всегда можно построить фигуру, подобную данной, но больше ее.

Таким образом, все эти положения тесно связаны друг с другом, так что если справедливо одно из них, то оправдываются и два других.

- Как это? - спросил Илюша.

- Слушай дальше: положение, или постулат, о параллельных принимается у Евклида за аксиому, однако, так как оно не кажется столь же очевидным и столь же простым, как другие аксиомы Евклида, то на протяжении долгих веков не прекращались попытки доказать этот постулат так, как доказывают теорему. Между прочим, одна из этих попыток - разумеется, не более удачная, чем все остальные - принадлежит автору "Альмагеста", Птолемею, который был незаурядным математиком. Однако теперь мы знаем, что большинство этих попыток свелось к тому, что допущение Евклида о параллельных бессознательно заменялось либо допущением о возможности построить подобную фигуру, либо допущением о том, что сумма углов треугольника есть величина постоянная и равна двум прямым. Существует, правда, кроме этих, еще несколько равнозначных положений, но их уж я касаться не буду. Наконец, все эти работы повели к тому, что геометры заметили (после работ Лобачевского) связь этих положений друг с другом и убедились, что "доказать" этот постулат Евклида невозможно. Однако этот постулат - или одно из перечисленных мной допущений - является необходимым, без него нельзя построить евклидову геометрию.

До Лобачевского очень многие полагали, что никакой другой геометрии, кроме евклидовой, не только нет, но и не может существовать. Мнение это было общепринятым. Иные утверждали, что евклидова геометрия есть наша "естественная" геометрия, которую человек всасывает чуть ли не с молоком матери. Но крупнейший немецкий математик Карл Гаусс на это возразил: "Мы не имеем права путать то, что нам кажется странным, с тем, что и на самом деле невозможно". Лобачевского на его труды натолкнули такие соображения: чтобы убедиться в том, что нет возможности доказать постулат Евклида о параллельных, следует попробовать построить геометрию, где бы этот важный постулат был вообще отброшен. Ход размышлений Лобачевского ты легко можешь усвоить, вспомнив, как доказываются геометрические теоремы "от противного". Мы, вместо того чтобы искать прямое доказательство, делаем противное допущение, и тогда, если в конце наших рассуждений мы сталкиваемся с противоречием, это опровергает наше противное допущение, тем самым подтверждая и доказывая то прямое положение, доказать которое нам и было нужно. Если постулат о параллельных необходим, то (так рассуждал наш великий геометр), мы, отбросив его, не сможем получить строгой системы геометрии и неминуемо придем к логическим противоречиям.

И таким образом мы проверим и необходимость и справедливость пятого (таков его порядковый номер в "Началах" Евклида) постулата. И вот Лобачевский строит новую геометрию,"воображаемую" геометрию, как он сам ее называл, где вместо постулата Евклида вводится иной, утверждающий, что из одной точки можно провести не одну, а две параллельные линии к данной.

Наконец он получает результаты своего изумительного прилежания и труда, и решение этой задачи пятого постулата. Но решение это оказалось таким, которого не ожидал и к которому не был готов почти никто из современных математиков, не говоря уже о философах, а еще менее о людях, не имевших специальных математических или философских знаний. Первое, к чему пришел Лобачевский, было утверждение, что пятый постулат никоим образом из всех иных положений геометрии выведен быть не может, а следовательно, его невозможно доказать как теорему, опираясь на иные, ранее доказанные положения или допущения.

Однако гораздо более важным оказалось то, что Лобачевский, развив свою новую геометрию до тех же пределов, до которых развил свою геометрию Евклид, нигде ни с какими противоречиями не встретился. Дальнейшие работы очень

крупных математиков в конце прошлого века раскрыли этот вопрос до конца и полностью подтвердили выводы Лобачевского. А важнейший вывод "воображаемой" геометрии гласит следующее: потому-то и невозможно доказать пятый постулат Евклида, что наряду с евклидовой геометрией может существовать иная, где этот постулат не имеет силы!

- 265 -

- Ну, а как же люди примирились с этой странной геометрией, которая сначала всем не нравилась?

- Сперва, - отвечал Радикс, - работы Лобачевского не только не нашли признания, но даже были встречены насмешками. Гаусс писал об одном из таких отзывов своему другу Герлингу (в 1844 году), что он видел "весьма отрицательный" отзыв о работе Лобачевского, но по словам Гаусса, для каждого сколько-нибудь осведомленного читателя ясно, что писал это "совершенно невежественный человек". Гаусс сам работал над этой темой, но не решился опубликовать свои результаты именно из-за страха перед неосведомленной критикой... Однако нашлись математики, которые дали себе труд подумать и разобраться в "воображаемой" геометрии. Одним из таких людей был итальянский математик Бельтрами, который в конце шестидесятых годов прошлого века выпустил в свет сочинение, где дал такое наглядное истолкование не-евклидовой геометрии Лобачевского, что всем стало ясно, что эти построения действительно представляют собой геометрическую систему, в известном смысле равноправную с обычной, а не только "воображаемую" геометрию. Бельтрами показал, что в обычном трехмерном евклидовом пространстве можно построить такое тело, на частях поверхности которого будет осуществляться планиметрия Лобачевского, откуда ясно, что геометрия его не может заключать в себе внутренних противоречий.

- Как же так? - с удивлением спросил Илюша. - или это вроде этих сферических треугольников, не похожих на наши обыкновенные, плоскостные?

- Да, это в некотором смысле то же самое. На сфере тоже осуществляется не-евклидова геометрия, но это будет геометрия Римана, для которой, в отличие от геометрии Лобачевского, сумма углов треугольника больше двух прямых, а кроме того, там прямая линия безгранична, но не бесконечна...

- Что это значит? - спросил Илюша.

- Припомни, что такое экватор на глобусе. Ведь он границы не имеет, но он и не бесконечен. Не правда ли?

- Ах да, совершенно верно! - спохватился Илюша.

- Итак, - продолжал Радикс, - Бельтрами нашел такую

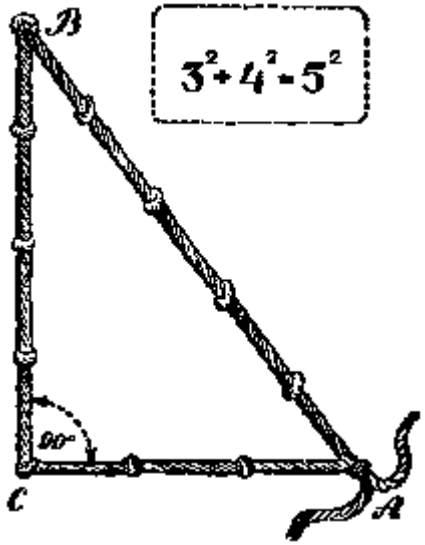
поверхность, на которой "воображаемая" геометрия Лобачевского, по крайней мере в части планиметрической, осуществлялась, хотя и не совсем полностью. Эта поверхность напоминает стеклянную воронку и называется псевдосферой, или, если сказать более по-русски, это будет якобы сфера.

- 266 -

Ее можно легко построить, и мы ее сейчас тебе покажем при помощи нашей Центрифуги. Таким образом Бельтрами, а за ним и многие другие ученые доказали, что "воображаемая" геометрия занимается вещами вполне реальными. Изучение и развитие неевклидовых геометрий оказало нашей науке громадные услуги, о которых ты, если будешь учиться дальше, узнаешь очень много. А если коснуться просто повседневной жизни, то и тут стоит сказать: то, что люди называли "естественной" геометрией, - это просто геометрия на плоскости. А когда землемер меряет поверхность горы или оврага, когда портниха шьет платье, то им нередко приходится иметь дело с "неестественными" геометриями, ибо оба они встречаются с седлообразными поверхностями, напоминающими ту же псевдосферу. Недаром замечательный русский математик Пафнутий Львович Чебышев занимался портняжьей проблемой кройки платьев и сделал в тысяча восемьсот семьдесят восьмом году доклад на эту тему в одном французском ученом обществе и даже представил при этом собравшимся его слушать ученым мяч, обтянутый двумя кусками материи в некотором, совершенно точном, смысле слова "наилучшим" образом.

- Вот странно! - воскликнул Илья, - вот уж я никогда бы не подумал, что землемер или портниха занимаются не-евклидовой геометрией! Впрочем... я и о фонтанах китов тоже не догадался бы.

- Вот то-то и оно! - сердито возразил Радикс. - Имей в виду, кстати, что сам Бельтрами был геодезист, то есть именно землемер. Есть основания думать даже, что и великий Гаусс, который много занимался задачами практического землемерия, натолкнулся на неевклидову геометрию Лобачевского, именно размышляя о своеобразии геодезических задач. Кстати тебе сказать, все споры О "воображаемой" геометрии только тогда и закончились, когда была опубликована наконец переписка Гаусса, где он откровенно говорит своим друзьям о своих открытиях в области геометрии Лобачевского. Это случилось уже в шестидесятых годах прошлого века, а работы Лобачевского начались с двадцатых годов.



Египетский мерный шнур для построения прямого угла. В точках В и С вбиваются колышки. Получается прямой угол в точке с при одновременном натяжении ВА и СА.

- 267 -

Илюша посмотрел на Радикса и подумал: "Псевдосфера!

Вот почему Фавн говорил о псевдокруглом сыре. Понятно".

- Ну, а теперь, - сказал, усмехаясь, Асимптотос, - надо нам вспомнить еще Илюшиного друга - Пифагора.

- Кстати, - подхватил Коникос, - слышал ли ты легенду о "египетском мерном шнуре" с двенадцатью узлами? Греки даже называли египетских землемеров "арпедонапты", то есть "вервиетягатели".

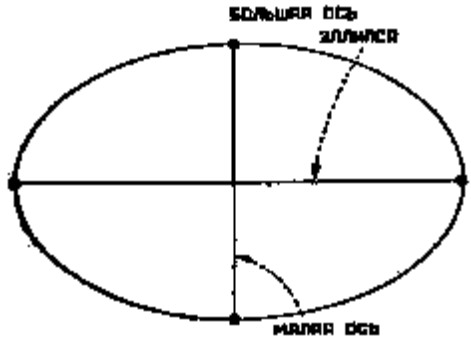
- Нет, - отвечал мальчик.

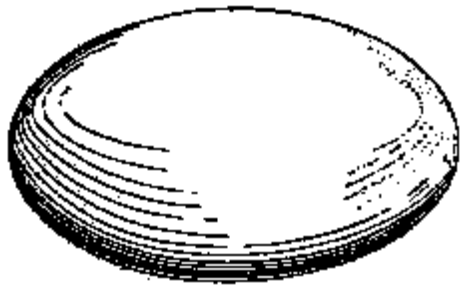
- Двенадцать, - продолжал Асимптотос, - легко разбить на три слагаемых: три, четыре и пять...

- Пифагоровы числа! - воскликнул Илюша.

- Они самые! Вот поэтому-то при помощи шнура с двенадцатью узлами очень легко построить прямой угол, который нужен и землемеру и строителю. Египтяне знали это правило чуть не за три тысячи лет до вашей эры. У нас здесь есть тоже треугольник - некий волшебно-математический аппарат, который показывает, куда мы попали - в знакомую страну или в незнакомую, где евклидовы и пифагоровы правила не годятся.

- Я как будто догадываюсь. Этот аппарат проверяет, плоская эта поверхность или нет?





Эллипсоид вращения

- Он не только это проверяет, он еще указывает, далеко ли отклоняется от плоскости данная поверхность и как именно она это делает. А стоит тебе это узнать, и ты сейчас же сообразишь, какая там геометрия годится. Вот и все.

- 268 -

Илюша осмотрел аппарат, который представлял собой прямоугольный треугольник, сделанный из оловянного листа, а сбоку был циферблат со стрелкой. В середине стояла большая буква "Е", и на нее указывала стрелка. С одной стороны было написано "Положительная кривизна", а с другой - "Отрицательная кривизна".

Однополостный гиперболоид вращения

Когда Илюша приложил аппаратик к сфере, тот немедленно ответил: "Положительная кривизна". Когда же он приложил аппаратик к стене, то стрелка осталась стоять против буквы "Е", а буква "Е", конечно, напомнила об Евклиде.

- А это что значит? - спросил Илюша. - Ты, Радикс, ведь говорил, что если взять очень большой шар, то там геометрия будет почти такая же, как евклидова.

Значит, чем меньше я буду брать шар, тем будет "более кривая" поверхность с точки зрения этого аппаратика?

- Правильно! - отвечал Радикс. - Если, например, ты на поверхности земного шара будешь брать треугольник со сторонами менее ста километров, ты можешь смело считать его совершенно плоским.

- Ну, а что может значить "отрицательная" кривизна?

Асимптотос с сомнением покачал головой и принес две кривые: одна была эллипсом, другая гиперболой.

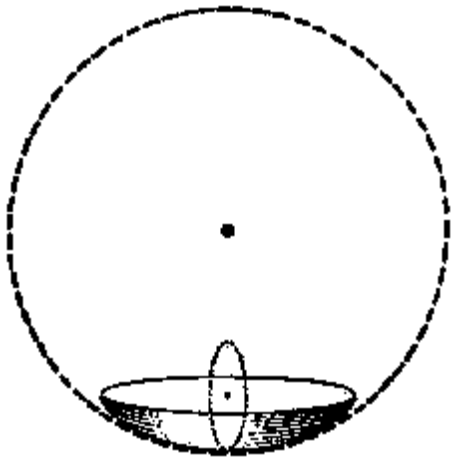
- Наша Центрифуга есть поистине дивный аппарат для получения поверхностей вращения.

Затем он взял эллипс и прикрепил его вдоль и посредине (то

есть по его большой оси - смотри на картинке!) к стержню, пустил в ход Центрифугу, а потом сиял получившееся тело со стержня.

- Это эллипсоид вращения, - объяснил он.

Однополостный гиперболоид вращения.



Центры кругов кривизны находятся по одну сторону поверхности - положительная кривизна.

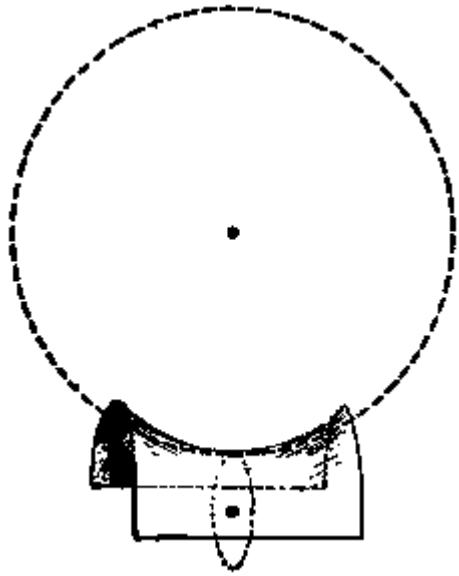
Тут он взял две ветви гиперболы и повесил их симметрично в воздухе на равных расстояниях от стержня.

- Простите, пожалуйста! - взмолился Илюша. - Вот когда вы снимаете с Центрифуги конус или эллипсоид, которые, собственно, состоят из ничего, и ставите на пол, ведь это волшебство?

- Мы все друзья и слуги ВОЛШЕБНОГО ДВУРОГА! - отвечал Асимптотос, торжественно подняв ввысь палец.

- А когда вы вешаете эти кривые в воздухе, это тоже волшебство?

- Не совсем! Я прикрепляю гиперболу к стержню при помощи со мнимой оси. Ну, а так как она мнимая, то ее, разумеется, довольно плохо видно. Вот и все! Если мы рассекаем два конуса с общей вершиной, мы получаем две ветви гиперболы.



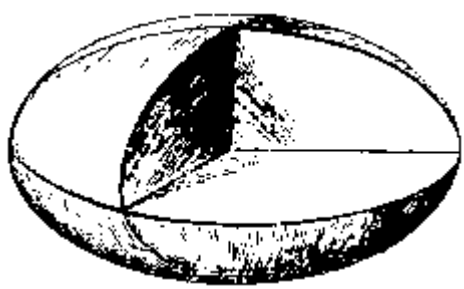
Центры кругов кривизны находятся с разных сторон поверхности - отрицательная кривизна.

Они симметричны в двух направлениях. Во-первых, они симметричны относительно действительной, или вещественной, оси гиперболы, параллельной оси нашего конуса. А во-вторых, они симметричны относительно воображаемой линии, перпендикулярной к оси конуса. Эта линия называется мнимой осью гиперболы. Вот я ее и надел на стержень.

- 270 -

Затем Асимптотос пустил в ход быстролетную Центрифугу. Вскоре из двух ветвей гиперболы образовалась поверхность вращения, средняя часть которой представляла собой кольцо с загибающимися краями.

- Это однополостный гиперболоид вращения.



Трехосный эллипсоид.

Если бы мы вращали гиперболу по вещественной оси, мы получили бы двуполостный гиперболоид, то есть две отдельные чаши. Ну, теперь все.

Он поставил гиперболоид на пол рядом с эллипсоидом.

- Начнем с эллипсоида. Замечаешь ли ты, что в длину он

согнут не так, как в ширину? Ясно, что и в ширину он в сечении даст круг, но дело в том, что в длину, то есть по своей большой оси, если мы будем рассматривать точку над самой ее серединой, он гнется не так сильно, как гнется в том же месте по направлению малой оси.

- Конечно! - отвечал Илюша.

- Следовательно, в одном направлении у него одна кривизна, в другом - другая. Теперь я разрежу эллипсоид пополам и возьму два круга - один побольше, другой поменьше.

Асимптотос разрезал эллипсоид вдоль. Оказалось, что он внутри совершенно пустой. Получилось такое эллиптическое корытце, вроде половинки скорлупы фисташкового ореха, если бы, конечно, орех был в точности симметричен.

- Смотри! - сказал Коникос. - Маленький круг я могу в него вставить и по направлению малой оси и по направлению большой. Маленький круг совпадает с сечением эллипсоида по малой оси и измеряет его кривизну в этом направлении.

А большой круг по малой оси в это эллиптическое корытце не влезает, но зато он очень хорошо входит в корытце по большой оси. Конечно, круг не совпадает с сечением по большой оси, ибо это сечение есть эллипс, а не круг, но он соприкасается с этим сечением как только возможно тесно. Этот круг измеряет кривизну эллипсоида по большой оси, однако только в данной точке. Ясно, что круги становятся друг к другу перпендикулярно, потому что ведь и сами оси перпендикулярны.

Самое важное в этом случае то, что центры обоих кругов находятся с одной и той же вогнутой стороны эллипсоида. Понял? Вот когда центры кругов, измеряющих кривизну, оказываются с одной стороны поверхности, то такая кривизна называется положительной.

Откуда идут эти названия, сразу не расскажешь, и на этих тонкостях я останавливаться не буду. А теперь перейдем к гиперболоиду.

Асимптотос разрезал и гиперболоид вдоль.

Получились две седлообразные поверхности, похожие на горный перевал.

- Смотри внимательно! - сказал Асимптотос. - Я беру снова среднюю точку и буду измерять кривизну опять теми же кругами и по таким же Двум взаимно перпендикулярным осям.

Когда Асимптотос начал приставлять круги к этой седлообразной поверхности, то оказалось, что эта поверхность в продольном направлении вогнутая, а в поперечном - выпуклая.

Поэтому центр большого круга оказался вне гиперболоида, а

центр маленького - по другую сторону поверхности гиперболоида. Центры кругов оказались с разных сторон поверхности.

- Ну вот! - сказал Асимптотос. - Когда центры кругов кривизны оказываются с разных сторон поверхности, то это и называется отрицательной кривизной. Геометрия Лобачевского осуществима только на поверхности с отрицательной кривизной. Однако слушай далее внимательно, ибо это еще не все.

Сфера имеет во всех своих точках одну и ту же кривизну. Мы говорим, что эта поверхность постоянной положительной кривизны. Ясно, что хотя эллипсоид имеет тоже положительную кривизну, но она отнюдь не постоянна. Однополостный гиперболоид, наоборот, имеет отрицательную, но тоже непостоянную кривизну. Спрашивается: имеются ли поверхности постоянной отрицательной кривизны? Такие поверхности были открыты еще до Бельтрами. Отличительной особенностью поверхностей постоянной кривизны является то, что кусок такой поверхности может скользить по ней самой без разрывов и сжатий, как футляр шара по поверхности шара или кусочек бумаги по гладкой поверхности стола либо цилиндрической колонны. Важнейшее открытие Бельтрами состояло вот в чем: он обнаружил, что треугольники, сторонами которых являются кратчайшие линии на поверхности постоянной отрицательной кривизны, подчиняются "воображаемой" геометрии Лобачевского. Таким образом, выяснилось, что плоская геометрия Лобачевского осуществляется на одной из простейших поверхностей с постоянной отрицательной кривизной (именно такой поверхностью и является псевдосфера), и тогда уже не оставалось больше никаких сомнений в том, что в этой геометрии, как и в геометрии Евклида, нам нечего бояться противоречий.

- Ну, как Илюша? - сочувственно спросил Радикс. - Способен ли ты после этого соображать дальше или нет?

- Сейчас! - ответил Илюша. - Я только еще попробую.

Мальчик взял волшебно-математический аппаратик,

измеряющий кривизну, и как только он приложил оловянный листик к поверхности гиперболоида, немедленно стрелка аппаратика пошла от буквы "Е" в другую сторону - это была самая настоящая отрицательная кривизна.

- Ясно? - спросил Коникос.

Илюша кивнул и сказал:

- Трудновато. Но мне кажется, я все-таки кое-что понял.

А теперь я хочу наконец про Архимеда послушать!

- Ну что ж! - раздумчиво промолвил Коникос. - Теперь-то, пожалуй, уж можно... Да, постой-ка! Я вот еще что хотел тебе сказать, чтобы ты не забыл. Дело в том, что наш эллипсоид вращения можно еще сжать сверху вниз так, чтобы его круглое сечение тоже обратилось из круга в эллипс. И тогда из эллипсоида вращения получится трехосный эллипсоид, у которого все три оси но всем трем измерениям, то есть и в длину, и в ширину, и в вышину, разные или по крайней мере могут быть разные. Ясно, что как ни рассекай его по всем этим трем перпендикулярным направлениям, в сечении получишь эллипс. Например, кусочек туалетного мыла, который в просторечии нередко называют обмылочком, обычно как раз и имеет форму трехосного эллипсоида! Или морские камушки, обкатанные морскими волнами...

- Как хорошо, - сказал Илюша, - что все эти ваши математические чудеса так легко встретить! Подумаешь, какое чудо обмылочек, а оказывается, он родственник самим коническим сечениям! (А про себя подумал: "Вот, значит, почему этот козлоногий человечек с флейтами говорил о морских камушках!") Постойте-ка, - продолжал он, - вы мне обещали показать, как делается псевдосфера.

- Совсем из головы вон! - сокрушенно сказал Асимптотос. - А ведь и вправду обещали! Поди-ка, Коникос, поищи-ка, где у нас там трактриса завалилась.

Не прошло и минуты, как Коникос вернулся весьма смущенный и раздосадованный.

- Пропала, скажи на милость! Истинное наказание!

- Ничего, - успокоил Асимптотос. - Подумаешь, какое горе! Возьмем да и новую сделаем.

Коникос принес довольно большую цепь с тяжелыми звеньями, вроде корабельной, и повесил ее за два конца на стену.

Цепь угрюмо повисла, образуя почти дугу, открытую сверху.

- Похоже на параболу, - шепнул Илюша Радиксу.

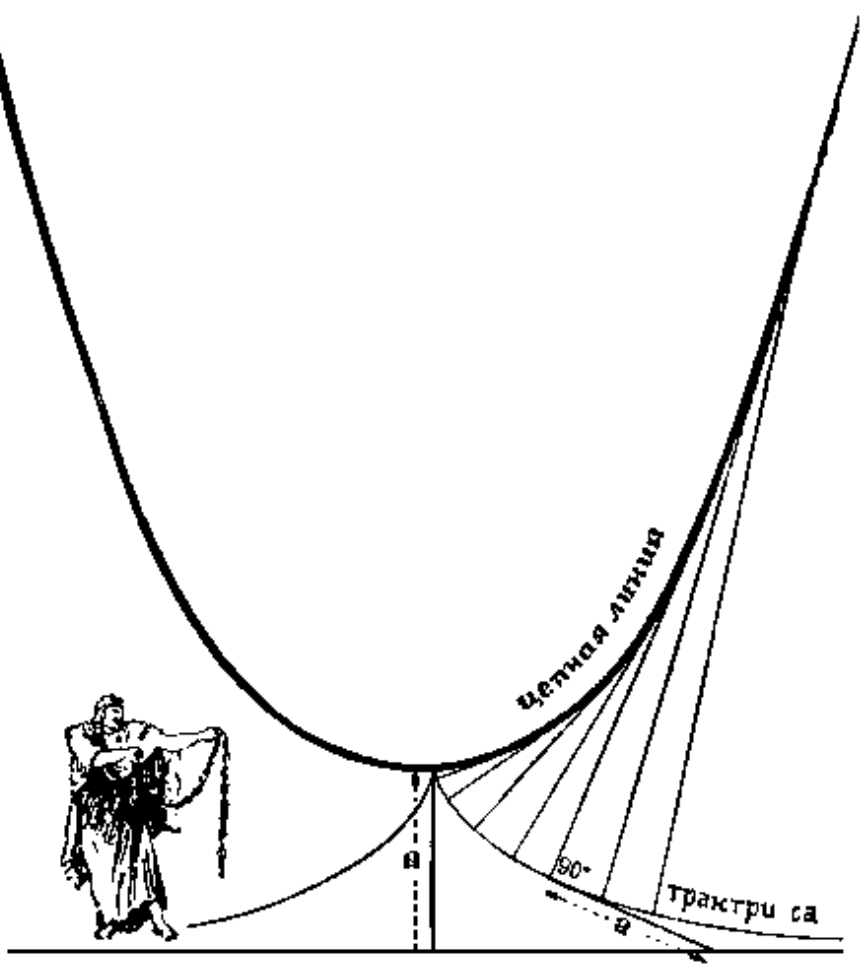
- Неверно. Впрочем, подобную ошибку в свое время сделал даже сам Галилей, так что тебе и подавно простительно.

Однако все же ты должен запомнить, что это вовсе не парабола, а так называемая **цепная линия**. Она только на маленьком участке у вершины очень похожа на параболу.

- К этой цепи у нас, - сказал Асимптотос, - прилажена особая ниточка, гибкая, нерастяжимая. Сейчас я ее отделю от цепи. Это особый способ чертить кривые - при помощи такой ниточки. Ты умеешь чертить по линейке, умеешь чертить циркулем, а это еще один способ чертить. Смотри внимательно!

Я отщипну эту ниточку в самой точке вершины цепи, то есть цепной линии, и буду, крепко все время натягивать нить, следить за тем, какую кривую опишет конец нити в той плоскости, в которой находится кривая. Так вот эту кривую, которую опишет конец нити, мы называем эвольвентой данной исходной, начальной кривой. А кривая, с которой надо сматывать нить, чтобы получить некую требуемую кривую, называется эволютой этой последней.

При этих словах Асимптотос отщипнул что-то от цепи в самой нижней ее точке. В руках его оказалась тонкая блестящая нить, которую наш ученый старичок начал как бы сматывать с цепи, все время крепко натягивая нить вниз и направо.



И конец нити послушно начертил новую своеобразную кривую, совершенно непохожую на ценную линию.

- Ну вот тебе и трактриса! - радостно воскликнул Коникос. - Сам Лейбниц дал ей это имя.

- Так что трактриса есть эвольвента цепной линии? - спросил Илюша.

- Точно! - отвечал Коникос. - Оказывается, ты кое-что соображаешь!

- Но если, - снова начал Илюша, - это особый способ чертить кривые, то должен ведь быть какой-нибудь общий прием, чтобы начертить так любую кривую?

- Это не так уж сложно, - вмешался Асимптотос. - Ты вот посмотри на перпендикуляры к касательным, которые именуются нормалями данной кривой.

- Радиус окружности и есть ее нормаль? - спросил Илюша.

- Справедливо! - отвечал Асимптотос. - Посмотри и заметишь,

что касательные эволюты суть не что иное, как нормали эвольвенты. Поэтому, если тебе задана эвольвента, то построй к ней побольше нормалей: все они будут касательными к эволюте, которую эти касательные очень ясно обозначат на чертеже. Это будет кривая, плавно огибающая все эти прямые, касаясь их.

- Эволют у нас девать некуда, - заметил Коникос, - целая кладовая. Но можно еще и по-другому все это проделать.

Возьми отрезок прямой, приложи его в одной точке к шаблону эволюты и кати его по кривой, только чтобы он не скользил.

Вот ты и получишь эвольвенту безо всякой нити, потому что какая-нибудь заранее отмеченная точка на катящемся отрезке вычертит эвольвенту.

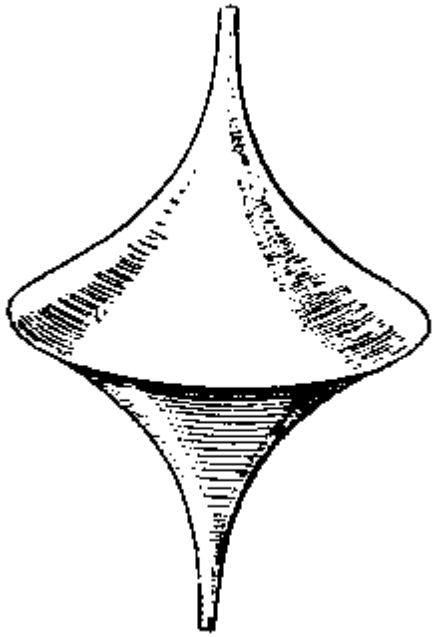
Радикс сейчас же объяснил Илюше, что он на досуге и сам все это может проделать. Надо взять топкую и нежесткую нитку примерно в сорок сантиметров длиной, намочить ее и мокрую повесить на стену на два гвоздика, которые вбиваются на расстоянии около пятнадцати сантиметров друг от друга.

А на то место, куда мы повесим нить, надо заранее прикрепить кнопками лист белой бумаги. Затем следует аккуратно начертить кривую, которую образует мокрая нитка, - это и будет приблизительно цепная линия. По этому чертежу надо изготовить картонный или фанерный шаблончик. В верхнем его углу следует закрепить нитку, обвести се по краю шаблона, а у вершины сделать петельку. Если теперь взять карандаш (сделав предварительно маленькую зарубку на графите) и вставить в эту петельку, то карандаш - если осторожно сматывать нитку - вычертит трактрису.

Коникос взял кривую и приладил ее, кряхтя и ворча, к диаграмме с картезианскими осями, повернув ее на девяносто градусов.

- 275 -

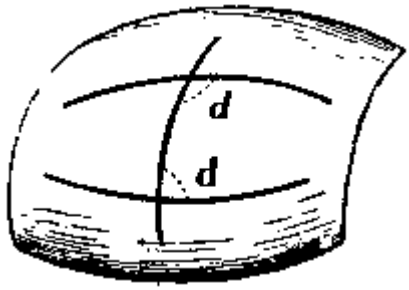
- Трактриса, - сказал он, передохнув после своей нелегкой работы, - это кривая весьма древнего происхождения.



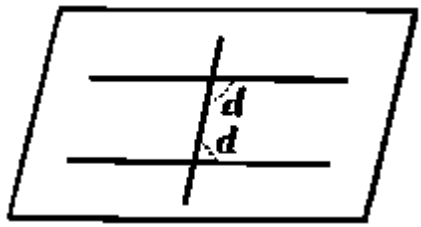
Псевдосфера

Одно из замечательных свойств ее заключается в том, что если к ней провести касательную в любой точке, то расстояние по касательной от точки касания до некоторой прямой будет постоянным (удаляясь от своей вершины, трактриса неограниченно приближается к этой прямой, и на нашем чертеже эта прямая будет перпендикулярна к оси цепной линии). Если поместить конец нити на расстоянии а от горизонтальной прямой, а потом другой ее конец тянуть вдоль этой прямой, то первый конец и опишет трактрису. Отсюда и название ее (от латинского слова "тянуть"). Если же теперь мы прикрепим трактрису по ее горизонтальной оси к Центрифуге, то мы и получим искомую поверхность вращения, то есть именно псевдосферу.

И действительно, как только прикрепили трактрису к Центрифуге и пустили последнюю в ход, получилась псевдосфера, каковую Асимптотос спокойно снял со станка и разрезал пополам, затем добыл откуда-то резиновую нитку и влез внутрь того вогнутого конуса, похожего на опрокинутый бокал, который представляла собой полупсевдосфера.



На выпуклой поверхности два перпендикуляра сходятся



На плоскости два перпендикуляра не сходятся и не расходятся

Поверхность была довольно прозрачная, и Асимптотоса было отлично видно. Намазав резиновую нитку сажей, он натянул ее на поверхность полупсевдосферы и, щелкнув ниткой, получил одно ребро треугольника снизу вверх, направо от основания к вершине - ровную темную черту. Затем он так же обозначил другое ребро треугольника сверху, от вершины вниз направо, подмигнул Илюше и сказал:

- Так как я имею дело с поверхностью отрицательной кривизны, то, для того чтобы провести основание треугольника, я должен, очевидно, выбраться из-под псевдосферы снова наружу.

Илюша внимательно поглядел на псевдосферу и сообразил, что если натянуть резиновую нитку горизонтально, стоя внутри седлообразной псевдосферы, то нить окажется в воздухе, а не будет вся целиком лежать на поверхности, как полагается лежать геодезической линии.

Асимптотос выбрался наружу и, лихо щелкнув начерненной ниткой, провел основание треугольника.

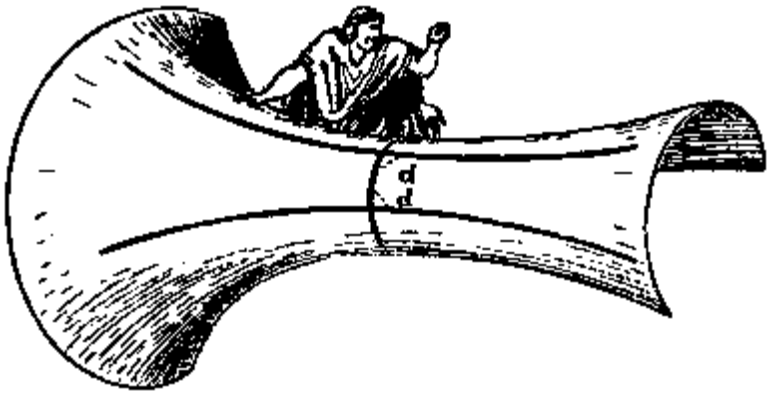
- Ну, Илюша, - сказал Коникос, - если ты внимательно посмотришь на этот треугольник, ты и сам заметишь, что углы его много меньше, чем им полагалось быть, если бы это был плоскостной треугольник.

Коникос вырезал псевдосферический седлообразный треугольник и положил на стол, а потом прикрепил три крепко натянутые нитки к его вершинам. Рассматривая углы, которые были образованы нитками, и собственные не-евклидовы углы треугольника, Илюша мог убедиться, что последние меньше,

нежели плоскостные.

- Ясно? - спросил Радикс.

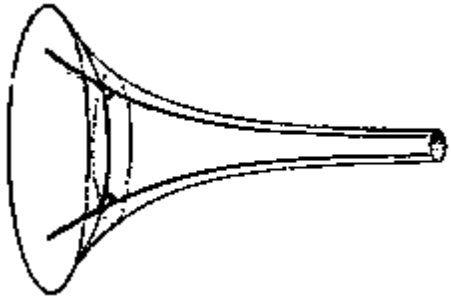
- Как будто ясно, - отвечал мальчик. - Ну, а как получается с параллельными? Я все-таки никак не пойму, как через одну точку провести две параллельные к третьей прямой?



На седлообразной поверхности два перпендикуляра расходятся.

- С параллельными, - отвечал Радикс, - не так-то просто. Давай сравним, как ведут себя два перпендикуляра к одной и той же секущей на выпуклой, плоской и седлообразной поверхности. На плоскости они идут на одном расстоянии друг от друга, то есть не сходятся и не расходятся. Но на выпуклой поверхности, как, например, на Земле, они будут вести себя так, как два меридиана, перпендикулярных к экватору, то есть будут приближаться друг к другу по обе стороны секущей и пересекутся на полюсах. На седлообразной поверхности наоборот: два перпендикуляра к одной и той же секущей будут расходиться по обе стороны, удаляясь друг от друга. Поэтому можно уменьшить углы их наклона к секущей, и полученные наклонные все еще не будут пересекаться. Если продолжать уменьшать угол наклона, то в конце концов мы дойдем до такого крайнего положения, при котором дальнейшее уменьшение угла наклона вызовет появление точки пересечения. В этом крайнем положении две прямые и называются, по Лобачевскому, параллельными друг другу "в ту сторону", в какую они образуют острые углы с секущей. Наши прямые "в сторону параллельности" еще не пересекаются и уже не расходятся, а сходятся друг с другом, так сказать, "в бесконечности", как обычные параллельные. На полупсевдосфере можно это очень хорошо представить себе, если взять два уходящих в бесконечность меридиана этой поверхности. Ты, может быть, возразишь, что это два перпендикуляра к параллели полусферы, но не забудь, что параллель (то есть сечение псевдосферы плоскостью, перпендикулярной к оси) не

будет линией кратчайшего расстояния (геодезической) на этой поверхности и потому не может нами рассматриваться как "прямая".



На полупсевдосфере два "параллельных" мередиана образуют острые углы с секущей геодезической.

- 278 -

- Я понимаю, - сказал Илюша. - Если я представлю себе, что полупсевдосфера лежит передо мной узкой частью вправо, то концы натягиваемой поперек поверхности нити придется оттягивать влево, иначе нить будет соскальзывать вправо.

- Поэтому, - продолжал Радикс, - два меридиана будут образовывать с пересекающей их геодезической острые углы (с параллелью они образуют прямые), как видно на чертеже.

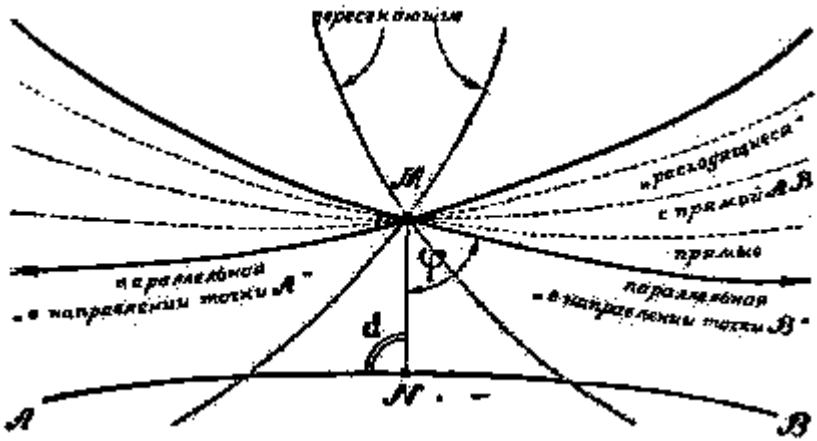
Несмотря на это, они не будут справа пересекаться, как бы далеко ты их ни продолжал на полупсевдосфере. Но отклони один из них чуть-чуть внутрь, по направлению к другому, и наверху появится точка пересечения. Это и означает, что два меридиана, по Лобачевскому, параллельны "в правую сторону" (нашей полупсевдосферы).

- А как же будут вести себя перпендикуляры к этой поперечной геодезической? Куда они денутся на псевдосфере? - спросил Илюша.

- Видишь ли, - ответил Радикс, - на небольшом участке псевдосферы хорошо видно, что два перпендикуляра расходятся, но дальше они начнут даже огибать поверхность снизу и где-то с нижней стороны пересекутся. Но не оттого, что они сходятся, а, наоборот, оттого, что они расходятся. Вообще надо иметь в виду, что только геометрия "куска" поверхности псевдосферы отвечает геометрии соответственного "куска" подлинной "плоскости Лобачевского"; вдобавок еще мешает "ребро" псевдосферы с нижней стороны. "Плоскость" же Лобачевского, как и наша обычная, простирается неограниченно во все стороны, и все направления на ней равноправны. Поэтому на плоскости Лобачевского получается такая картина.

Если взять секущую MN и в точке N провести к ней перпендикуляр AB, а в точке M наклонять второй перпендикуляр,

уменьшая его угол с секущей со стороны точки В, то наклонная, проходящая через точку М, начнет пересекать прямую АВ, только когда угол наклона станет меньше некоторого острого угла ф. Этот острый угол (он тем ближе к прямому, чем меньше расстояние MN) Лобачевский назвал углом параллельности, а наклонную в том крайнем положении, когда она еще не пересекается с перпендикуляром АВ, он назвал проходящей через точку М параллельной к АВ в сторону В. С другой стороны секущей получается та же самая картина. Крайнее положение наклонной, при котором точки пересечения еще нет, и будет второй "параллельной"



Лобачевского- параллельной в "другую сторону". Поэтому на нашем чертеже все прямые Лобачевского, проходящие через точку М, разделяются двумя параллельными - "в сторону Л" и "в сторону В" - на две категории. Одни, образующие с перпендикуляром NM угол, меньший "угла параллельности" φ, пересекают прямую АВ. Другие, образующие с перпендикуляром прямой или хотя и острый, но больший угла параллельности угол, проходят между двумя "параллельными" и не пересекают прямой АВ ни с той, ни с другой стороны. Они называются расходящимися с прямой АВ. Параллельные, конечно, тоже не пересекаются с АВ, но они выделяются из числа всех не пересекающихся с АВ прямых, проходящих через точку М, как раз тем, что положение параллельности - крайнее, при котором нет точки пересечения: две параллельные отделяют, таким образом, все пересекающие прямые от расходящихся. В отличие от геометрии Евклида, сумма внутренних односторонних углов, образованных параллельной в данную сторону с секущей, меньше двух прямых, так как угол параллельности φ острый. Величина этого угла зависит от

расстояния MN. Еще греки, по всей вероятности, догадывались о таких возможностях.

- Значит, - решил Илюша, - это гораздо хитрее того, что мы учим в школе о параллельных?

- Ну еще бы! - отвечал Радикс. - Если бы это было то же самое, так ведь тогда и говорить было бы не о чем.

- Какая же она, однако, удивительная, эта геометрия! - задумчиво произнес Илюша.

- 280 -

- Если хочешь знать, - отозвался Радикс, - сферическая геометрия еще удивительнее "воображаемой", только мы к ней более привыкли благодаря тому, что глобус стал нам приятелем со школьной скамьи, если не раньше. А если подумать, то нетрудно убедиться в этом. Сравни хотя бы такие обстоятельства. Прямая у Евклида безгранична, у Лобачевского тоже, а на сфере она (например меридиан) не только не безгранична, но еще и замкнута.

- Да! - отвечал Илюша. - А ведь действительно так!

- Насчет же всяких неожиданностей в "воображаемой" геометрии, так я могу тебе подарить на память еще один такой случай. Если ты возьмешь на плоскости Лобачевского окружность, разделишь ее на несколько равных частей и в точках деления проведешь касательные к этой окружности, то они образуют многоугольник только в том случае, если радиус окружности очень невелик, а в противном случае они вовсе не встретятся и не пересекутся.

- Мы можем, - добавил Асимптотос, - показать тебе еще кое-что по поводу треугольников Лобачевского, но только это будет потруднее. И нам кое в чем придется с тобой условиться.

- Как это условиться? - спросил Илюша.

- Вот как. Мы знаем, что роль "прямых" на сфере играют дуги больших кругов. А теперь мы условимся считать "прямыми"" на сфере не дуги больших кругов, а дуги некоторых других кругов. Мы начнем с того, что рассечем сферу пополам.

Положим полусферу на плоскость сечением вниз. А далее согласимся считать дуги кругов, плоскость которых перпендикулярна к той плоскости, на которой лежит наша полусфера, прямыми. Надеюсь, что ты понял меня?

- Но ведь можно "условиться" о чем угодно! - сказал в недоумении Илюша. - Захочу и "условлюсь", что у меня семь равняется нулю. Так что ж, так и будет?

- Мне кажется, - отвечал Радикс, - что не так уж трудно придумать случай, когда такое равенство будет иметь смысл. Например, допустим, что ты будешь различать числа только по

остаткам, которые они дают при делении на семь.

Ясно, что в этом смысле 1, 8, 15 и так далее будут равны между собой; 2, 9, 16 и так далее будут также равны между собой, а 7 окажется равным числам 0, 14, 21 и прочим. Тебе может показаться, что это бессмыслица. Но допусти, что некоторый месяц начинается в воскресенье и мы обозначим этот день нулем, понедельник - единицей, вторник - двойкой и так далее. Тогда, если мы интересуемся только днями недели, а "нуль", "семь" и "четырнадцать" - все будут обозначать воскресенья, то в этом смысле ты можешь не делать между ними различия. Так что уже не столь бессмысленно "условиться", что семерка равна нулю. Имей в виду, что при изучении известных вопросов вполне возможно поставить некоторое особое условие, и это может даже сделать для нас доступными такие вопросы, которые без этого трудно было бы исследовать[19].

- 281 -

- Пожалуй, - сказал Илюша, - я с таким рассуждением готов согласиться, но вот чего я боюсь: если мы условимся считать какие-то линии на сфере "прямыми", смогут ли эти "прямые" сохранить свои обычные свойства? А если не сохранят, то разве это будут "прямые"?

- Видишь ли, - отвечал Асимптотос, - все свои свойства наши "прямые", разумеется, сохранить не смогут, но ведь мы как раз и хотим рассмотреть на примере такую геометрию, в которой некоторые свойства прямых таковы же, что и на плоскости (например, две "прямые" пересекаются только в одной точке, через две точки проходит одна и только одна "прямая" и так далее). Однако в отношении свойств параллельности или величины суммы углов треугольника наши новые линии должны подчиняться не обычным законам геометрии, а законам геометрии Лобачевского. А если это так, то совершенно очевидно, что такие "прямые", поскольку мы их рассматриваем в нашем обычном евклидовом пространстве, должны и по внешнему виду отличаться от обыкновенных прямых. Сейчас нам даже придется отказаться и от того свойства, которое мы сохраняем на сфере при пояснении римановой геометрии:

"прямые" уже не будут линиями кратчайшего расстояния на полусфере. Однако, чтобы ты не очень уж задумывался над смыслом таких "условий", мы сейчас придумаем самый животрепещущий пример...

- Я бы полагал... - перебил нашего оратора Коникос.

- А именно? - вопросил Радикс.

Коникос задумчиво сказал:

- Необходимо соорудить при помощи волшебства...

- Да что именно? - спросил Асимптотос. - Уж не томи ты нас, говори прямо!

- Начнем с полусферы, - уклончиво ответствовал загадочный Коникос, - ну, а потом... посмотрим.

Действительно, тотчас перед Коникосом выросла громадная, трехметровая полусфера тонкого, прозрачного синеватого стекла, под колокол которой он немедля и забрался. Из-под своего халата Коникос тут же извлек громаднейшую кремневую пистолю, самую старозаветную, у которой один только курок весил до полукилограмма, и с торжеством показал свое удивительное оружие Илюше.

- Вот мое восхитительное изобретение! - сказал он. - Эта волшебно-не-евклидова пистоля имеет изумительные свойства.

Пуля этой пистоли и будет описывать не-евклидовы "прямые"! Я буду стрелять, но не прямо, а так, чтобы ее круглая нуля скользила точно, "в притирку" но внутренней стороне моей полусферы. Стекло это очень крепкое, и пробить его пуля не может, она только его поцарапает. Ясно?

- Ясно! - отвечал Илюша.

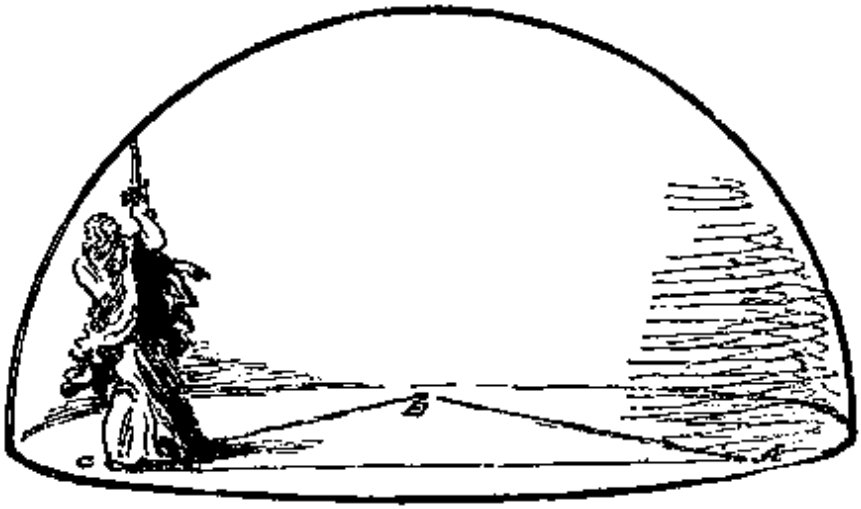
- Но только вот что! - добавил наставительно Асимптотос. - Запомни раз и навсегда: пуля этой казанской - или, что то же, не-евклидовой - пистоли, скользя по внутренней поверхности полусферы, все время остается в той же вертикальной плоскости, в каковой находился и пребывал ствол этой пистоли в момент выстрела.

Затем Коникос начертил внутри полусферы, на полу, равносторонний треугольник, почти вписанный в круг, который образовывал на полу край полусферы, как нарисовано на следующей странице.

- Ну, уж в этом-то треугольнике никак не может быть больше или меньше двух прямых! - торжествующе заявил Илюша.

Асимптотос и Радикс только чуточку усмехнулись в ответ на это заявление Илюши, а Копикос сказал:

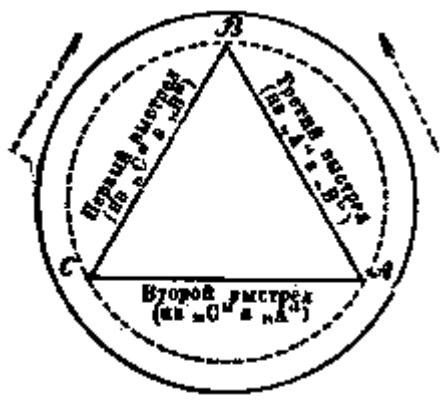
- Ты, юноша, не спорь, а следи как можно внимательнее за тем, что я буду делать.



С этими словами Коникос стал в левом углу при оснований начерченного на полу треугольника (угол С) и обернулся лицом прямо к углу при вершине его. Он поднял над головой свою пистолю, вплотную прижал ее почти совершенно вертикально к внутренней стороне сферы и выпалил.

- 283 -

Раздался страшный грохот, целое облако дыма вырвалось из широкого дула пистоли, по, несмотря на все эти пиротехнические эффекты, пуля летела так медленно, что Илюша видел, как она мелькнула по внутренней стороне полусферы, оставив за собой тонкий след в виде царапины по стеклу.



Вот такой треугольник начертил на полу Коникос, стоя под полусферой.

- Попал! - крикнул Коникос. - Какая меткость! С первого раза!

Илюша удостоверился, что пуля, обогнув полусферу, прошла как раз над вершиной треугольника (В) и ушла в пол.

Затем Коникос снова зарядил пистолю, подсыпал пороху на

полку, стал опять на то же место, но повернулся теперь лицом в сторону другого угла (А), который был с правой стороны основания треугольника. Снова бах! Пуля прошла как раз над вершиной справа у основания.

Затем Коникос перешел в тот самый угол, над вершиной которого только что прошла пуля. Теперь он стал в этот правый угол (А) и лицом обратился снова к углу в вершине (В).

Снова он поднял пистолю над головой, так что она стояла почти вертикально, то есть почти перпендикулярно к полу, а затем опять трах! Снова целое извержение порохового дыма, и опять мелькнула пуля, царапая стекло.

- Вот выстрел! Поищи-ка, где пересекаются оба следа.

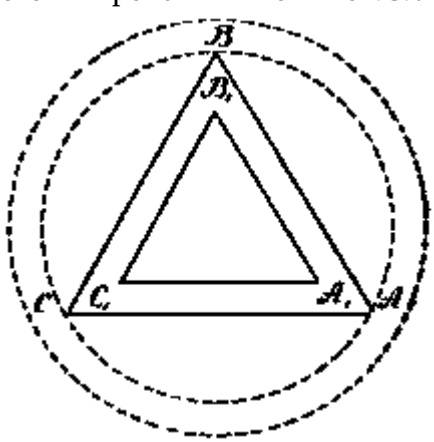
Илюша обошел сферу, подошел к углу при вершине и убедился, что оба следа пересеклись в точке, лежащей как раз над вершиной В треугольника.

Затем Коникос выполз из-под полусферы и сказал:

- Я полагаю, что пули летели "совершенно прямо", в неевклидовом смысле слова, как это им и свойственно. Они бы, разумеется, летели иначе, если бы им стекло не мешало и они не были бы обязаны сохранять вертикальную плоскость полета, но тут уж им при всей их любви к прямолинейности и краткопутности ничего другого не оставалось! Теперь я попрошу полусферу уменьшиться до полуметра в диаметре, дабы мы имели возможность обозреть результаты моей неподражаемой стрельбы в цель.

- 284 -

Полусфера сейчас же послушалась, и Илюша увидел, что пули начертили на стекле своеобразный треугольник. Тогда Асимптотос взял свой широченный нож и сказал мальчику:



Срез полусферы (экватор)

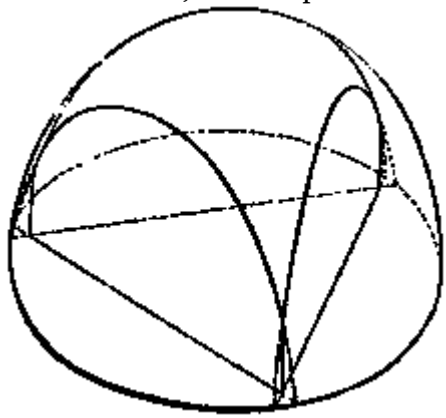
- Смотри: плоскость моего ножа, то есть секущая плоскость, стоит сейчас перпендикулярно к той плоскости, на которой лежит

половина сферы.

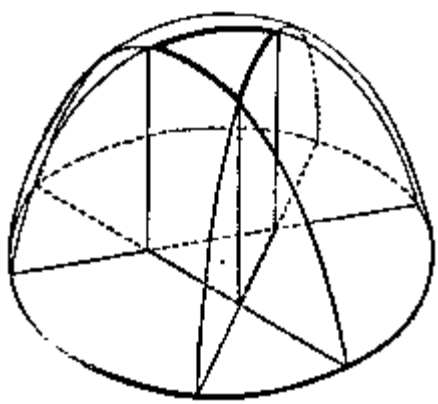
Ясно?

- Ясно.

- Я сделаю три сечения. Каждый раз нож будет стоять перпендикулярно к плоскости, на которой лежит полушар.



Затем Асимптотос аккуратно провел разрез так, что линия его шла от точки А к точке В. Второй разрез соединил точки В и С, а третий - точки С и А. И все разрезы шли в точности по царапинам, оставленным пулями. Затем он вынул из середины сферы получившийся кусок и дал его Илюше.



- Заметь, - сказал Асимптотос, - что если вершины треугольника будут лежать на самом срезе полусферы, то есть на ее экваторе, то все дуги "прямых", то есть вертикальных сечений сферы, проходящие через эту точку, будут иметь общую касательную вертикаль, а угол, образованный этими дугами, поэтому будет равен нулю.

(Вспомни, как Коникос учил тебя измерять угол между кривыми!) Но если немного сдвинуть вершину треугольника вверх по полусфере, как мы это сделали, то касательные наклонятся и разойдутся: это и даст нам возможность применять

нашу пистолю. Но так как мы сдвинулись немного вверх, то и угол между двумя положениями ствола пистоли Коникоса, то есть угол треугольника, будет очень мал, и он будет тем меньше, чем ближе вершина к экватору. Я вырежу еще такой же треугольник, только расположенный повыше и площадью поменьше.

Снова Асимптотос начертил круг, затем снова вписал в него равносторонний треугольник ABC, а затем начертил внутри этого треугольника еще один - A1B1C1, поменьше, подобный первому и симметрично расположенный. (Смотри на картинке, стр. 284.)

После этого он взял нож и вырезал еще один треугольник, уложив, разумеется, предварительно на чертеж еще одну половину сферы.

- А теперь, - заявил Коникос, - мы будем утверждать, что данные два треугольника по своим свойствам суть не что иное, как треугольники Лобачевского! Доказать тебе, наш юный друг, это обстоятельство было бы хлопотливо, однако это так. Поверь на слово. Был один француз-математик в истекшем столетии, который нашел это и доказал довольно-таки точно и неоспоримо.

Нахмуренная физиономия доктора У. У. Уникурсальяна немедленно появилась среди почтенной компании.

- Не следует, - сказал он, - утверждать того, чего ты не можешь доказать.

- Докажи, что я неправ! - предложил Коникос.

Но в ответ на это Доктор Четных и Нечетных почему-то отвернулся да и растаял втихомолку.

- Теперь далее! - наставительно произнес Асимптотос. - Слушай-ка хорошенько да мотай на ус. Тебе, я думаю, совершенно ясно, что эти два плоскостных треугольника, которые у меня были чем-то вроде выкроек для не-евклидовых треугольников, подобны друг другу?

- Абсолютно ясно! - заявил Илюша.

- А ну-ка, - продолжал словоохотливый старичок, - проверим-ка, подобны ли эти два удивительных не-евклидовых треугольника.

Сперва Илюша не мог сообразить, как ему взяться за эту проверку подобия, но затем придумал. Он положил оба треугольника на половинку сферы. Большой треугольник кое-как закрепил (кажется, кнопками), а малый стал передвигать так, что он скользил по сфере и по большому треугольнику.

Он рассуждал: если эти треугольники подобны, то углы у них равны, а следовательно, можно вдвинуть один из углов малого треугольника в один из углов большого, а если углы равны, то две стороны малого должны совпасть с двумя сторонами большого.

Сказано - сделано! И вот, представьте себе, когда он пододвинул один из углов малого треугольника к одному из углов большого, то стороны малого не только не пошли по сторонам большого, не только не совпали с ними, а даже закрыли стороны большого, так что Илюша должен был заключить, что углы малого треугольника больше - и заметно больше! - углов большого треугольника.

- Вот тебе и раз! - сказал Илюша. - Не подобны, нет...

И, честное слово, я не понимаю, как это выходит!

- Дело вот в чем, - серьезным тоном проговорил Коникос. - Мы уже тебе говорили, что сумма углов в не-евклидовых треугольниках не есть величина постоянная, в противоположность евклидовым треугольникам, где сумма углов всегда постоянна и равна, как тебе известно, ста восьмидесяти градусам. Мало этого, в не-евклидовых треугольниках сумма углов связана с их площадью. Причем если ты имеешь дело со сферическими треугольниками, то там чем больше площадь треугольника, тем больше и сумма его углов, и ты сам видел треугольник, сумма углов которого доходила до трех прямых углов. В треугольнике Лобачевского дело обстоит в некотором отношении так же, а в некотором - как раз наоборот. Там тоже сумма углов треугольника связана с площадью, но в обратном отношении, то есть чем больше сумма углов треугольника, тем меньше его площадь, и обратно, пока сумма углов не дойдет до своего естественного предела, то есть станет равной нулю для треугольников, все вершины которых лежат на экваторе сферы. Но уж это в геометрии Лобачевского, собственно, не треугольники, а фигуры, образованные тремя попарно параллельными прямыми. В силу именно этих обстоятельств ты и видишь сейчас, что каждый из взаимно равных углов равностороннего малого не-евклидова треугольника больше любого угла такого же большого треугольника, и так должно быть! А отсюда следует вывод чрезвычайно в данном случае значительный: никаких подобных фигур в не-евклидовых геометриях не существует, и там невозможно построить фигуру, подобную данной, но имеющую иные размеры.

Если нам с тобой повстречаются два треугольника с соответственно равными углами, то нетрудно будет убедиться, что эти треугольники равны. Любопытно еще и то, что площадь такого треугольника ограничена и не может превысить некоторой определенной величины, как бы мы ни увеличивали его стороны, ибо площадь эта прямо пропорциональна разности [180°- (α + β +γ)]. где α, β и -γ суть углы треугольника.

А наше выражение в квадратных скобках, очевидно, не может

быть больше ста восьмидесяти градусов. Однако и этого еще мало, и этим не исчерпываются необычайные чудеса этой геометрии.

В ней мы имеем возможность определить отрезок через угол. Ибо коль скоро треугольник вполне определяется своими тремя углами, то я могу точно определить отрезок, указав, что он является стороной равностороннего треугольника с заданным углом (меньшим, разумеется, нежели две трети прямого угла). Отсюда можно сделать один удивительный вывод.

Тогда как в обычном мире необходим эталон (то есть образчик) меры длины - метр, ярд, сажень, - в мире "воображаемой" геометрии в таковом эталоне нет надобности. Там с помощью геометрического построения, как бы исходя из свойств самого пространства, мы строим единицу длины наподобие того, как в евклидовой геометрии строится прямой угол (то, что мы потом его делим на девяносто градусов, к его величине касательства не имеет.)

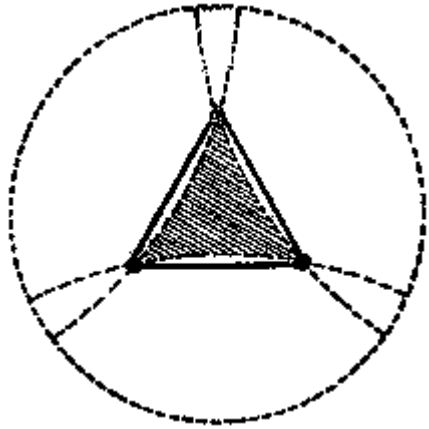
- Сумма углов равностороннего треугольника Лобачевского, - промолвил Асимптотос, - поистине меньше двух прямых, ибо каждый из них меньше чем шестьдесят градусов. Мы можем тебе показать это.

Снова перед Илюшей выросла полусфера высотой в один метр. Линии, которые провели по стеклу круглые пули Коникоса, были прекрасно видны. Асимптотос подошел к полусфере и лёгонько толкнул ее пальцем. Полусфера закачалась, перевернулась своим срезом (основанием) вверх.

Асимптотос взял ниточку и, нагнувшись над опрокинутой полюсом вниз полусферой, закрепил один конец нитки в одной из трех точек внутри полусферы, где пересекались два следа пуль. Илюша внимательно следил за всеми этими приготовлениями. Затем Асимптотос, туго натянув нитку, повел ее к другой точке пересечения следов не-евклидовой пальбы и закрепил во второй точке, а затем и в третьей точке. Наконец он потянул ниточку из третьей точки снова в первую и закрепил ее там, где она вся и кончилась. Таким образом, внутри полусферы в воздухе повис туго натянутый ниточный равносторонний треугольник. Он висел, разумеется, так, что плоскость его была параллельна полу.

- Теперь это будет тот самый треугольник, который Коникос чертил на полу и о котором ты еще высказал такое авторитетное мнение... насчет суммы его углов, помнишь?

Илюша очень хорошо помнил свое "авторитетное мнение", только ему совсем не хотелось, чтобы и другие об этом вспоминали...



Асимптотос похлопал рукой по краю полусферы, и она тут же превратилась в целую сферу, то есть на лежащей ее половине тотчас же выросла и вторая (верхняя) половина шара. Теперь у этой сферы было два полюса - южный (старый) и северный (новый, верхний). Коникос принес откуда-то маленькую ярко светящуюся точку и положил ее на северный полюс сферы. В светлице стало темно, и лучи ярко светящейся точки северного полюса бросали резкие тени. На полу под сферой эти лучи сейчас же отчетливо нарисовали тень экватора, которая, конечно, оказалась правильным кругом. А внутри этого круга, разумеется, нарисовалась, отступя на некоторое расстояние от окружности, и тень ниточного треугольника.

- Смотри хорошенько! - произнес Коникос. - Видишь, как легли на полу тени тех следов, которые нацарапали на стекле полусферы пульки.

Это, конечно, и было самое интересное в этом волшебном опыте! Илюша заметил без особого труда, что следы пуль Коникоса рисуются на полу, как дуги кругов, перпендикулярных к тени экватора. Они и образовывали на полу своеобразный треугольник с вогнутыми внутрь сторонами. А треугольник этот был как бы "вписан" в самый обыкновенный евклидов равносторонний треугольник, который был тенью ниточного треугольника.

- Ну-с? - произнес Радикс.

И в тот же миг стало опять совершенно светло, а сфера и сияющая полярная точка исчезли. На полу остался лежать очень четкий чертеж круга и двух треугольников внутри его.

Теперь уж не было никаких сомнений в том, что эти не-евклидовы углы много меньше евклидовых. Сумма углов равнялась 110°.

- Хорошо! - сказал Илюша. - На этом-то чертеже совершенно ясно, что углы не-евклидова треугольника гораздо меньше. Но

разве тени следов пуль образуют те же углы, как и самые следы?

- Видишь ли, - терпеливо отвечал ему Радикс, - вообще, разумеется, не те же. Однако, если по отношению к лучу света плоскость угла отклонить в одну сторону, а плоскость, на которую ложится тень, - в другую, так, чтобы обе эти плоскости образовали с лучом светящейся точки равные углы, то тени дадут тот же самый угол, который и был у тебя. Попробуй-ка начерти сечение нашей сферы по меридиану и выясни, какие получатся углы. Ты без особого труда, я полагаю, убедишься, что в нашем случае углы будут в точности одинаковые...

Следует еще помнить о том, что, имея дело с геометрией сферы, необходимо принимать во внимание ее размеры: именно это и определяет ее кривизну, как и для псевдосферы, то есть и для "воображаемой" геометрии. Сам Лобачевский полагал, что только физико-астрономические опыты могут дать нам материал для суждения о том, какая именно геометрия свойственна нашему пространству, в котором мы существуем. Поэтому тот, кто скажет, что великий русский геометр подходил к геометрии "как естествоиспытатель", будет очень близок к истине. Современные ученые полагают, что Лобачевский был прав в своих догадках: действительно, в некотором смысле геометрия нашего мирового пространства - это не-евклидова геометрия, хотя она и не совсем такая, как геометрия Лобачевского.

А теперь, чтобы ты мог себе уяснить с помощью некоторой особой аналогии этот взгляд на геометрию, а вместе с тем познакомился и с другим примером осуществления геометрии Лобачевского, вспомним прежде всего, что геометрии на малых участках будут очень мало отличаться друг от друга, на чем бы они ни были - на плоскости, сфере или псевдосфере.

- Конечно, - отвечал мальчик, - небольшой кусочек сферы или псевдосферы трудно было бы отличить от плоскости.

- Вот, - продолжал Радикс, - если ты сообразишь, что измеряемые нами обычно расстояния слишком малы и не дают вообще возможности отличить свойственную нашему миру геометрию от евклидовой, то тебе станет ясной идея Лобачевского - решить вопрос о нашей геометрии с помощью астрономических опытов. Это раз. А затем скажи мне: сумеешь ли ты отличить дугу окружности от прямой?

- Еще бы! - отвечал, улыбаясь, Илюша. - Дуга имеет кривизну, а прямая нет.

- Ясно. Но вот представь себе: я начерчу на протяжении тридцати сантиметров дугу окружности радиусом длиной в несколько километров. Что ты тогда скажешь?

- На таком маленьком участке, пожалуй, никак не отличишь, - согласился Илюша. - Но ведь если дугу эту сделать не в тридцать сантиметров, а побольше, то сразу станет видно.

- Постой! - прервал его Радикс. - Именно этого мы сейчас делать и не станем. Будем рассматривать геометрию на небольшом участке плоскости, но вместо прямых будем проводить окружности очень больших радиусов.

- 290 -

Для примера пусть радиусы будут длиной около пяти километров, а мы будем при помощи таких радиусов чертить фигуры на обыкновенной классной доске. Вряд ли ты заподозришь, что они не проведены с помощью самой обыкновенной линейки.

- Наверно, нет! - усмехнулся Илюша.

- Сверх этого, мы будем все эти окружности чертить не как-нибудь, а с соблюдением некоторого особого условия: возьмем какую-нибудь очень далеко отстоящую от нас прямую и будем все центры окружностей выбирать на этой прямой.

- Очень далеко, - сказал Илюша, - то есть около пяти километров?

- Пусть так, - согласился Радикс. - А потом вот еще что. Чтобы подчеркнуть, что эти окружности заменяют нам прямые (они у нас так и будут называться "прямые", в кавычках), будем называть линию их центров "бесконечно удаленной" в нашей геометрии.

- Ну да, - подхватил Илюша, - ведь, вероятно, потому, что дуга окружности тем больше похожа на прямую, чем больше ее радиус, иногда и говорят, что прямая - это окружность бесконечного радиуса?

- Именно поэтому! - отвечал Радикс. - А теперь давай рассмотрим, какая геометрия получится на большом расстоянии от нашей "бесконечно удаленной" прямой. Начнем с того, что выясним, можно ли в таких условиях провести через две данные точки одну "прямую", и только одну.

- Да ведь это сводится к задаче провести через две данные точки окружность, центр которой лежал бы на данной прямой? Это очень просто сделать.

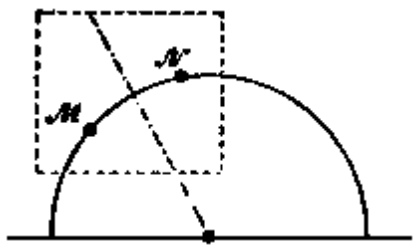
- Ну, а будет ли в нашей геометрии "прямых" правильно, что две прямые пересекаются в одной точке?

- Если, - сказал, подумав, Илюша, - мы будем рассматривать все только по одну сторону от линии центров, то есть только полуокружности, да еще без их крайних точек, потому что они ведь тоже попадают на эту "бесконечно удаленную" прямую (я думаю, мы можем ее считать просто для нас недоступной), то, разумеется, две полуокружности могут пересечься только в одной

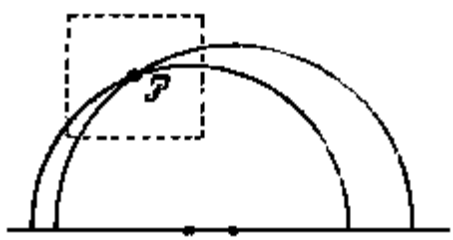
точке.

- Видишь, ты и сам замечаешь, что наши "прямые" этими своими свойствами, как, впрочем, и многими другими, не будут отличаться от обыкновенных евклидовых прямых, а на малом участке вдали от центров ты и по виду их от прямых не отличишь. Тебе будет казаться, что ты имеешь дело с обыкновенной геометрией Евклида. Там можно строить треугольники, восстанавливать и опускать перпендикуляры и так далее.

Однако если спросить, сколько "прямых", не пересекающих данную, можно провести через точку вне этой прямой, то хотя на глаз на малом участке будет казаться, что все обстоит так же, как обычно, но на самом деле именно здесь-то и обнаружится, что в действительности наши "прямые" подчиняются не законам Евклида, а законам геометрии Лобачевского.



Через всякие две точки M и N можно провести одну, и только одну, "прямую".



Две "прямые" могут пересекаться только в одной точке.

- Как же это так получается? - спросил удивленный Илюша.

- Посмотри внимательно на чертеж! Вспомни, что мы с тобой условились рассматривать только часть площади по одну сторону от линии центров, которую мы к нашему пространству не причисляем, считая ее геометрическим местом "бесконечно удаленных" точек нашей геометрии. Если дана "прямая" AB, то есть полуокружность с центром в точке C "бесконечно удаленной" линии, и точка M, не лежащая на AB (скажем для определенности, расположенная на большем расстоянии от C), то получится вот что: кроме полуокружности радиусом CM, можно провести через точку M любое количество "прямых", не пересекающихся с "прямой"

AB, слегка смещая центр из точки C по горизонтали и

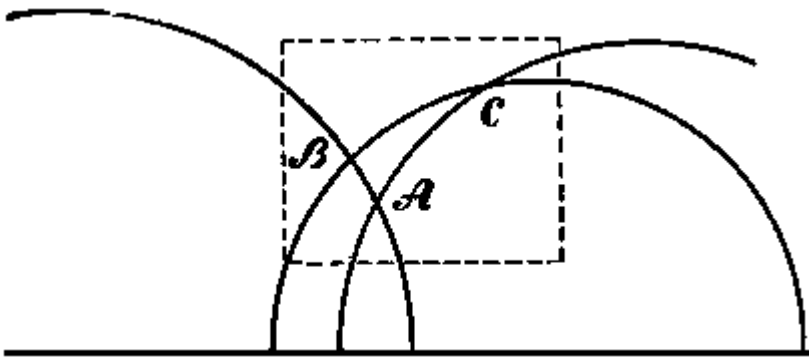
соответственно изменяя радиус.

- Хорошо, - сказал Илюша, - это я теперь понимаю.

А какие же "прямые", проходящие через точку М, будут параллельными по геометрии Лобачевского к "прямой" АВ?

- Припомни, что параллельные отделяют непересекающиеся, то есть "расходящиеся" с данной, "прямые" от пересекающих ее. Такими, очевидно, и будут "прямые", изображаемые теми двумя полуокружностями, которые встречают данную полуокружность именно на "бесконечно удаленной" прямой.

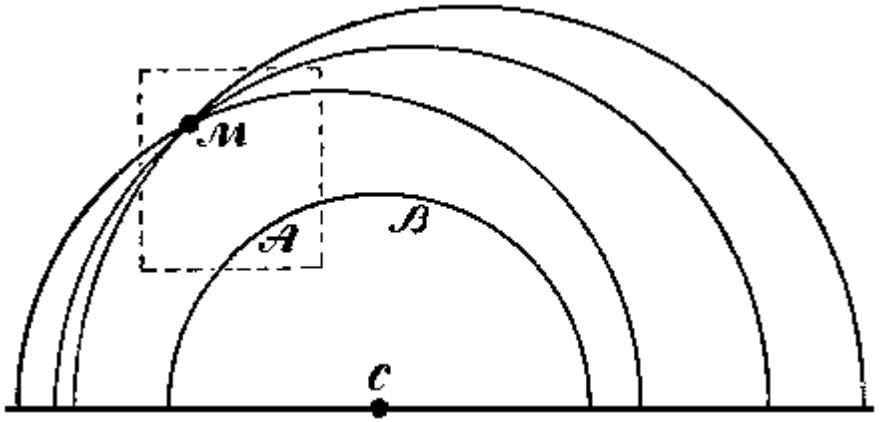
То есть это будут те именно полуокружности, которые касаются данной полуокружности слева и справа на линии центров, образуя с ней в точках касания нулевые углы. Если ты построишь два перпендикуляра к какой-нибудь "прямой" АС, то легко убедишься, что они будут "расходящимися".



Прямоугольный треугольник ABC.

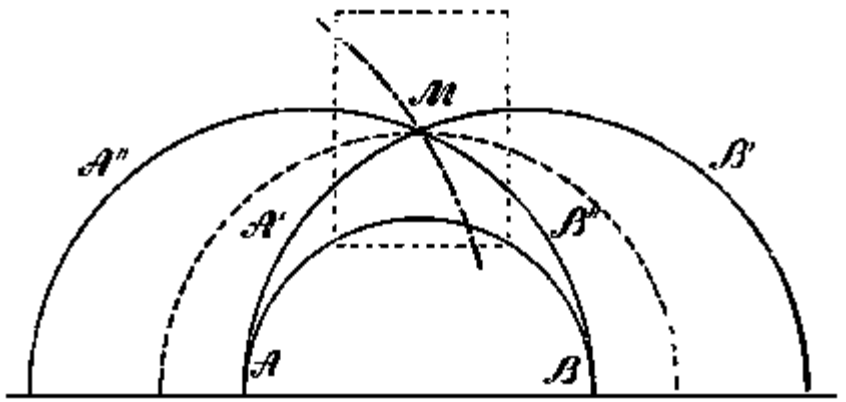
- Так, - сказал Илюша. - Действительно не очень-то все это просто! А как же насчет суммы углов треугольника?

- Возьми чертеж, на котором две полуокружности равных радиусов почти касаются друг друга. Угол, образуемый ими в их невысоко расположенной точке пересечения, будет невелик, хотя и больше нуля. В остальных же двух точках пересечения, образованных третьей полуокружностью, получаются углы, близкие к шестидесяти градусам. Таким образом, сумма углов будет немногим больше ста двадцати градусов вместо ста восьмидесяти градусов. На маленьком треугольнике этого нельзя заметить так отчетливо.



Через точку М проведено несколько "прямых", не пересекающих "прямую" АВ.

- 293 -

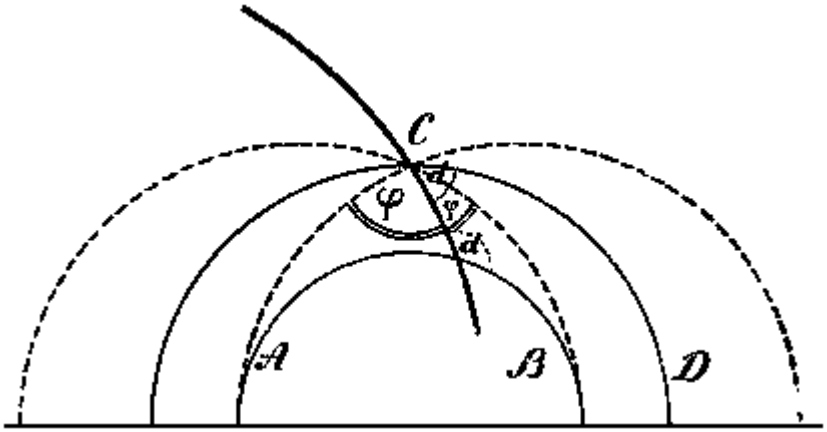


"Прямая" АВ параллельна АВ, в сторону А; "прямая" А"В" параллельна АВ в сторону В. "Прямые", проходящие внутри углов АМА" и ВМВ", "расходятся" с АВ. "Прямые", проходящие внутри углов АМВ" и ВМА", пересекают АВ.

- Потому что они похожи на евклидовы и в них сумма углов почти равна ста восьмидесяти градусам! - воскликнул Илюша. - Кажется, я начинаю наконец разбираться понемногу...

Тут Илюша снова откуда-то услыхал звуки флейты Фавна.

Обернувшись, он увидел, что его хитрая рожица выглядывает из-за уголка цветной занавеси домика. Он протягивал Илюше правую руку и манил его к себе левой.



Два перпендикуляра - AB и CD - к одной "прямой" "расходятся" - угол параллельности φ острый

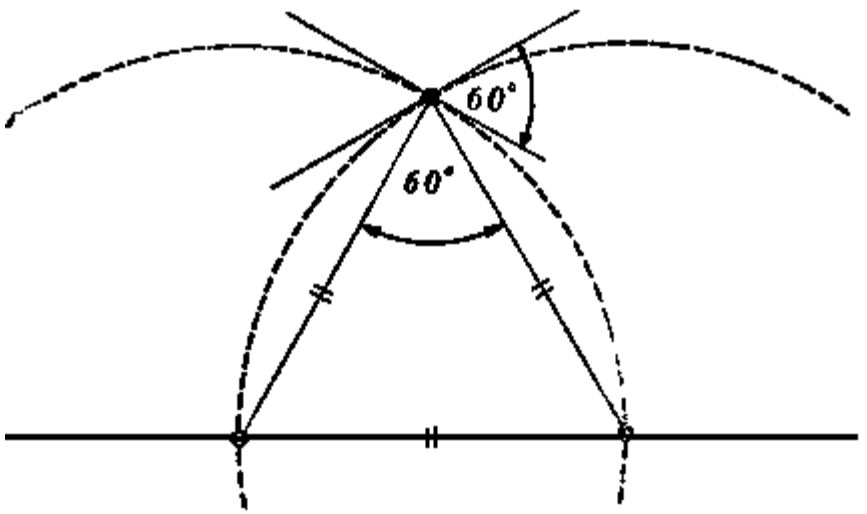
- 294 -

- Ты только попробуй! - произнес Фавн шепотом. - Никогда никто не кушал ничего вкуснее!

- Может быть, это и стыдно, - сказал Илюша, отломив втихомолку добрый кусочек казанского сыра и делая вид, что он никакого Фавна и в глаза не видел, - но я должен сознаться, что я тоже до сих пор думал, что геометрия Евклида единственная.

- Стыдного тут ничего нет, - отвечал Асимптотос. - Ты просто не знал, вот и все. Но спорить с построенной системой - это уже совсем другое дело.

- Значит, я уже узнал здесь, кроме евклидовой, три новые Угол между двумя окружностями одного радиуса, из которых каждая проходит через центр другой, равен 60 градусам. геометрии: геометрию лабиринтов, потом геометрию Лобачевского и геометрию Птолемея...



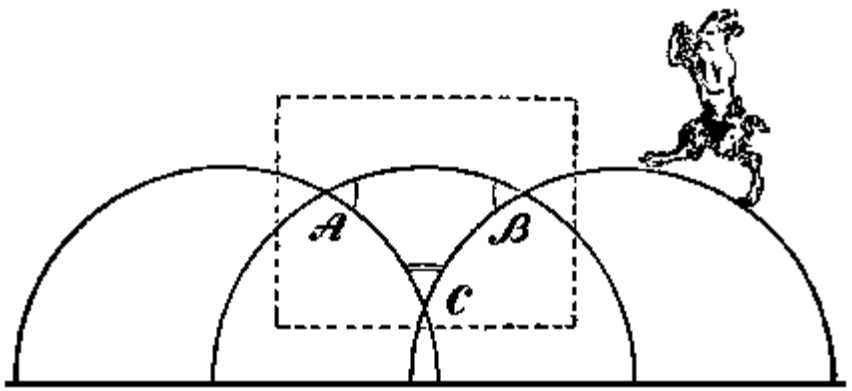
Угол между двумя окружностями одного радиуса, из которых каждая проходит через центр другой, равен 60 градусам.

- То есть сферическую, - заметил Копикос. - Однако я могу тебе показать еще одну геометрию. Это будет геометрия теней. Ты увидишь сейчас удивительные тени. Слышал ли ты такой стишок:

Вот пройдут любые тени По стене,

Странных очерки видений При огне...

Неужели ты его не знаешь? Почитай, голубчик! Его написал прекрасный русский поэт Александр Блок. Это почти эти самые тени и есть.



В треугольнике ABC углы A и B близки к 60 градусам, а угол C очень мал, поэтому сумма углов этого треугольника немногим больше 120 градусов.

Асимптотос притащил откуда-то лампочку очень странной и красивой формы, немножко похожую на чайник, в носик которого был вставлен фитиль. Лампа горела не очень ярко, но все-таки светила. В ней было налито нечто вроде оливкового масла. Говорят, будто это была та самая лампа, из-за которой начались несчастья бедной Душеньки в той самой поэме Богдановича, которую так любил юный Пушкин, потому что Апулей (сочинивший книгу "Золотой осел", где изложена история Душеньки) ему нравился гораздо больше рассудительного Цицерона[20]. Масло для этой лампы Коникос зачерпнул из фонтана. Затем Коникос сделал какой-то странный жест, и в светлице стемнело. Только и было света, что от масляной лампы.

Асимптотос поставил ее на стол и вырезал круглый кусочек плоскости.

- Смотри теперь на тень этого кружка. Если я поставлю мой диск вертикально параллельно стене на одном уровне с источником света, то и тень на стене получится...

- Круглая, - отвечал Илюша.

- Справедливо. Теперь смотри, что будет с тенью, если я буду

поворачивать кружок вокруг его вертикального диаметра. Если я поверну кружок на некоторый угол так, чтобы диск у меня стоял наклонно к плоскости стены, то тень будет...

- 296 -

- Эллипсом! -отвечал Илюша.

- А теперь, - продолжал Коникос, - смотри, какие тени будут получаться от кружка на столе. Если я опущу диск ниже пламени, то на столе получится... На-ка, возьми диск, попробуй сам!

Илюша взял диск, опустил его немного ниже пламени лампы и получил две тени: эллиптическую и круговую, которые он уже видел на стене.

- Теперь, - сказал Асимптотос, - слушай мою команду! Поставь диск вертикально так, чтобы самая высокая его точка находилась на уровне пламени.

Илюша поставил. Тень от кружка стала с одной стороны овальной, а с другой - уходила прямо по столу, и казалось, что две стороны тени уходят вдаль, стремясь сделаться все более и более параллельными.

- Эта тень похожа, - сказал Илюша, - пожалуй, опять на кривую квадратного уравнения.

- Справедливо, - отвечал Коникос. - Ты получил параболу. А теперь подними кружок еще немного повыше, так, чтобы его горизонтальный диаметр был на уровне пламени.

Илюша приподнял кружок. Теперь на стол падала тень только от нижней части кружка. С одной стороны она тоже была похожа на овал, но с другой стороны тень уходила до самого края стола. Однако ее стороны не стремились к параллельности, а шли почти прямо в разные стороны.

- А это что такое?

- Н-не знаю, - сказал Илюша. - Но так как мы видели все конические сечения, кроме гиперболы, это, наверное, она и есть?

- Она самая. А скажи, пожалуйста, не встречал ли ты гиперболу вечером на улице?

- На улице? - удивился Илюша. - Нет, кажется, не встречал.

- А видал ли ты вечером на улице такую картину: у подъезда дома стоит автомобиль с одной зажженной фарой, и свет от фары падает на мостовую?

-Это я, конечно, видал, - ответил Илюша.

- Так вот имей в виду, что освещенный кусок мостовой и рисует на асфальте самую настоящую гиперболу, то есть одну из ее ветвей. Почему? Потому что световой пучок выходит из фары конусом, а мостовая в данном случае является секущей плоскостью по отношению к этому конусу. Когда увидишь эту гиперболу в следующий раз, кланяйся ей от меня... Эта геометрия теней называется проективной геометрией. Вот тебе и пятая геометрия! Учи только, не ленись, у нас геометрий хватит!

- Хорошо, - сказал скромно Илюша, - постараюсь.

- Эта геометрия, - пояснил Радикс, - имеет самое непосредственное отношение к искусству живописи, ибо только она может научить нас, как нарисовать некий предмет на плоскости так, чтобы зрителю казалось, что он видит перед собой настоящий предмет в трехмерном пространстве. Во времена Возрождения эта наука развивалась в трудах крупнейших живописцев того времени: таковы были знаменитый Аьбрехт Дюрер, живший в начале шестнадцатого века, крупнейший

архитектор-итальянец Альберти (конец пятнадцатого века) и один из величайших художников всех времен, разносторонний гений Леонардо да Винчи (родился в тысяча четыреста пятьдесят втором году, скончался в тысяча пятьсот девятнадцатом), тоже итальянец по происхождению, который недаром сказал, что глаз человеческий - это "князь математики". Далее ее разрабатывал Паскаль (о нем ты уже слышал), а также и другой француз, Понселе, который был офицером наполеоновской армии, участвовал в походе на Россию, был тяжело ранен в сражении под Красным и подобран русскими войсками на поле боя. После этого он попал в плен к русским и почти целый год прожил в Саратове: там-то он и написал свое знаменитое сочинение по геометрии. Кстати сказать, развитие этой ветви геометрии способствовало правильному истолкованию математиками геометрии Лобачевского.

- Конечно, - заметил Илюша, - эта проективная геометрия теней очень красива, но геометрия Лобачевского мне как-то больше нравится.

- С тобой можно согласиться, - ответил Радикс. - Открытие Лобачевского вызвало сначала полное непонимание...

И при этом не только со стороны людей, которые были заведомо невеждами, а даже со стороны тех, которые, казалось бы, могли разобраться... Но слишком для них все это было неожиданно и непонятно. У себя на родине Лобачевский подвергался жестоким издевательствам в продажной печати времени императора Николая Первого. В то время как великий Гаусс учился русскому языку, чтобы прочесть сочинения Лобачевского в подлиннике, русские журналы, руководимые известным гонителем Пушкина, царским шпионом - Булгариным, глумились над Лобачевским, уверяя, что такую геометрию может выдумать только человек, поставивший себе цель - издевательство над наукой. Даже угрюмый реакционер,

тогдашний министр народного просвещения, Уваров пытался защитить Лобачевского, но безуспешно. Булгарин спрятал его возражения "под сукно". Все, что мог сделать Уваров для Лобачевского, который был все-таки ректором Казанского университета, - это напечатать в официальном ученом "Журнале министерства народного просвещения" в ежегодном списке трудов русских ученых против имени Лобачевского: "Ректор Казанского университета, занимался сочинением статьи для журнала Крелле". Это кое-что значило для людей понимающих, ибо в то время математический немецкий журнал, издаваемый Крелле, был самым авторитетным журналом в мире.

В дальнейшем выяснилось, что Уваров рассчитал не так плохо, ибо статью Лобачевского в журнале Крелле заметил и похвалил сам Гаусс! А гордость родины, математик Лобачевский, так и умер, даже не удостоенный звания доктора наук за свои труды, ставшие краеугольным камнем для всей новой математики девятнадцатого века[21].

- Страшно слушать!.. Но мне все-таки хотелось бы узнать, в чем самая суть этих удивительных трудов Лобачевского?

- Видишь ли, - задумчиво произнес Радикс, - попросту и коротко рассказать все это трудно. Но попробуем все-таки!

Древняя математика оставила нам замечательные достижения.

Недаром некоторые историки науки говорили о "греческом чуде". Но кроме того, от древности нам в наследство осталось немало нерешенных вопросов, научных загадок. И некоторые из них были трудности непомерной. С квадратичными иррациональностями греки сами справились. Удивительные труды Архимеда и Аполлония затронули более сложные вопросы, которые дождались своего разрешения только уж в Европе в шестнадцатом и семнадцатом веках. Но вопросы, связанные с самыми основаниями евклидовой геометрии, смущавшие ученых еще в древности (как это видно из трудов Птолемея), получили свое разрешение только в девятнадцатом веке в работах Лобачевского. Когда это наконец было сделано, осознано и разработано, наша наука вступила в новую стадию. Это уже не было прямой разработкой творений Архимеда, а чем-то совершенно своеобразным, что дало науке новые великие силы.

Ибо наука получила после Лобачевского возможность не только исследовать те или иные задачи, но научилась изучать и понимать свою собственную сущность и все свое своеобразие.

- Собственную сущность... - повторил Илюша неуверенно, - то есть самую суть? Так я говорю?

- Да, в общем так. Но самое главное заключается в том, что великая система не-евклидовой геометрии, построенная Лобачевским, постепенно привела людей к полной уверенности, что математика есть наука опытная.

Схолия Пятнадцатая,

где продолжается беседа о судьбах древней математики, которая, как выясняется, долгое время жила на положении рабыни у жестоких восточных деспотов, выполняя под их свирепым надзором всякую черную работу, пока наконец хитроумный греческий мореход с железным копьем, на котором было высечено слово "ОТЧЕГО?" с громадным вопросительным знаком, не похитил ее и не привез под лазурное небо Эллады, где она и обрела наконец свою истинную родину. Затем Илюша постепенно узнаёт все более серьезные и удивительные вещи: о том, например, как греческий философ Демокрит придумал способ для определения объема конуса, и как этот способ стал развиваться в работах Архимеда, и как впоследствии из всех этих удивительных событий вырос тот самый Великий Змий, с грозной тенью которого Илюша имел честь встретиться в Схолии Второй.

Все уселись в кружок, и Коникос начал так:

- Математика пришла в Грецию от древних восточных цивилизаций - Шумера, Вавилона, Египта. Зародилась она очень давно. Уже к концу четвертого тысячелетия у шумеров - это было на землях теперешнего Ирака - были сделаны первые основательные шаги. У шумеров, а также у их преемников - вавилонян уже было накоплено довольно много знаний. Это было связано, во-первых, со взиманием налогов, во-вторых, с различного рода расчетами при постройках.

Таким образом, из дошедших до нас документов - преимущественно обожженных глиняных плиток-таблеток, на которых перед обжигом наносились знаки, - большинство относится к развитой государственной жизни, когда необходимо учитывать урожай, сбор шерсти, рассчитать, как построить плотину, мост, сколько потребуется народу, чтобы возвести то или иное сооружение, и так далее. Многие таблички представляли собой учебники для школ будущих чиновников, которые и должны были уметь делать все эти вычисления. Составлялись таблицы для облегчения расчетов. Важное значение имела и астрономия, в основном как служба календаря, определявшая сроки сельскохозяйственных работ.

- А как все это узнали? - спросил Илья.

- Глиняные таблетки, - продолжал Коникос, - которые находят археологи при раскопках, - материал прочный, под землей могут

пролежать тысячи лет, огня не боятся. В восточных царствах было накоплено, по-видимому, много практических знаний. Существовала ли в то время теоретическая математика, сказать трудно, но что какие-то начатки теории уже были, в этом, по-видимому, нельзя сомневаться. Среди Вавилонских таблеток можно встретить чертежи правильных многоугольников, причем вычисляются их площади, встречаются приближенные определения квадратного корня из двух, находится приближенная квадратура круга, существуют способы определения довольно сложных объемов, решаются квадратные уравнения и многое другое. Трудно сказать, осмыслено ли все это было теоретически. Но все же приходишь к мысли, что кое-что делалось... Никакой хозяйственной необходимости, например, вычислять площадь круга в то время не было. Однако в учебниках есть задачи на вычисление: сколько семян надо, чтобы засеять круглое поле? Хотя круглых полей делать никто не станет. Греческие философы передают, что в египетских храмах в течение тысячелетий хранились записи всего нужного и интересного. Там имелись и астрономические наблюдения, и очень трудно допустить, чтобы при всем этом можно было бы обойтись совсем без научных работ.

Практика больших сооружений в странах с искусственным орошением и с постоянными работами по усмирению больших рек могла поставить трудные задачи.

- Интересны эти задачи на вычисление насчет круглого поля! - заметил Илюша.

- Конечно, интересно! - откликнулся Асимптотос. - Крупные ученые-историки приходят к заключению, что у вавилонян неизбежно должно было возникнуть что-то вроде нашего доказательства, когда сложное решение вопроса опирается на целую цепь более простых соображений. Конечно, вряд ли им приходило в голову интересоваться, как достигается тот или иной теоретический вывод, но им уже нельзя было обойтись без того, чтобы не пользоваться им.

- Когда все это было?

- У шумеров, - отвечал Коникос, - примерно в третьем тысячелетии до нашей эры, но там о теории, наверно, еще и слуху не было, а во втором и первом тысячелетиях до нашей эры процветал Вавилон, особенно в первой половине первого тысячелетия до нашей эры. Древняя Греция оказалась наследницей всего этого научного богатства.

- А как бы в общем сказать про эту древневосточную науку? - задумался Илюша.

- Пожалуй, - заметил Асимптотос, - верней всего было бы сказать, что это была наука писцов, чиновников, казенных канцелярий. Постепенно там родился интерес и к самому искусству вычисления, а из него мало-помалу выросла и алгебра в виде первых решений квадратных уравнений. Причем пока еще никто не мог найти ни одной практической задачи на Древнем Востоке, для которой было бы необходимо решение квадратного уравнения. Поэтому историки и считают, что это решение искали не для практики, а именно из чисто научного интереса. Наука Вавилона, видимо, была выше египетской.

Одним из замечательных достижений шумеро-вавилонских ученых было построение позиционной системы счисления.

Она, правда, была не такая, как наша общепринятая десятеричная, а была шестидесятеричная. Она еще и у нас осталась в делении окружности на триста шестьдесят градусов, час мы делим на шестьдесят минут, а минуту на шестьдесят секунд.

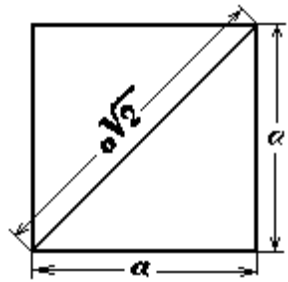
- Какая живучая система! - усмехнулся Радикс.

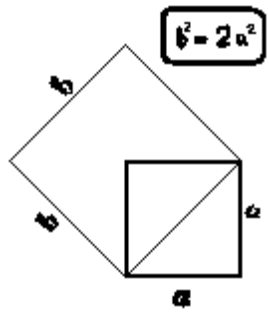
- Историки считают, - продолжал Коникос, - что изобретение позиционной, или поместной, системы настолько важно было для культурного развития человека, что это можно вполне сравнить с изобретением письменности. Вавилоняне знали теорему Пифагора - и не только для отдельных случаев, по и вообще. На одной вавилонской таблетке дано численное значение корня квадратного из двух, правильное до шестого десятичного знака[22]. Конечно, корень из двух, позволяющий увеличивать данную площадь вдвое, необходим в строительном деле. Но с такой точностью он ни одному столяру или каменотесу совсем не требуется. В деле строительства вполне можно было бы удовлетвориться двумя знаками, а впрочем, можно даже взять расчеты и погрубее.

- А помнишь ли ты, - спросил Радикс мальчика, - как с помощью корня из двух удваивается данная площадь?

- Еще бы! Если дан квадрат, а сторона равна единице, то диагональ по теореме Пифагора будет равна корню из двух. Вот и удвоение площади! Умножил сторону на этот корень и получил сторону квадрата с двойной площадью.

- Хорошо! Знаешь твердо.





Площадь квадрата, построенного на диагонали другого, вдвое больше площади последнего.

Учись, не отставай, и все будет в порядке. А мы всегда к твоим услугам.

- Вот что еще мы можем рассказать тебе о Древнем Востоке, - добавил Коникос. - Примерно в начале первого тысячелетия нашей эры вокруг Средиземного моря происходят огромные перемены. К морским берегам из глубины континентов приходят новые люди. Бронзовые мечи и топоры заменяются железными, гораздо более удобными и дешевыми. Несколько столетий подряд на берегах Средиземного моря и его островах бушуют непрерывные битвы. Падает под ударами врага мощное Критское царство, которое было тоже центром культуры бронзового века. Впрочем, теперь археологи склоняются к мысли, что Критская островная культура могла погибнуть почтя внезапно из-за грандиозного извержения вулкана неподалеку, страшного землетрясения и всеразрушающих морских волн, которые называются цунами (они достигают огромной высоты и все уничтожают на своем пути, неожиданно обрушиваясь на сушу, а потом с той же силой стекая обратно в море).

А затем под натиском "людей с моря" слабеет Египет.

В Греции начинается новая культура, появляются мореплаватели, купцы, градостроители - люди, пользующиеся большой свободой по сравнению с вавилонянами и египтянами.

Греческий город, а не дворец деспота становится хозяином

нового мира. Восток пробует подчинить новую культуру - персидские полчища идут на греков и терпят неудачу. 11 вот в этом мире, где наука освободилась от религии, расцветает Площадь квадрата, построенного на диагонали другого, вдвое больше площади последнего.

- 304 -

10 новая мысль, жадно впитывающая все, что было создано на Востоке, и перерабатывающая все это древнейшее наследие.

Однако все же на территории Вавилона, несмотря на смены народов, научные труды и интересы сохраняются еще долгое время. Греческая культура была основана на труде рабов, которых приводили в страну в качестве военнопленных греческие воины. Тем не менее эта новая цивилизация создала нового любознательного человека, которого интересовали многие вопросы, особенно астрономия, а за ней математика, которая развивалась рядом с учением о правильном размышлении - логикой.

- Ну, разбираешься ли ты в том, что слышишь? - спросил Радикс.

- Кажется, разбираюсь. А если я в чем-нибудь запутаюсь, я потом спрошу тебя.

- Надо помнить, что новый мир Древней Греции, - взял слово Радикс, - породил людей, которые благодаря своему приволью и богатству занимались наукой не только по необходимости хозяйственной, а независимо от этого, ради желания проникнуть в суть научного рассуждения, в существо решения трудных задач. А затем греческие ученые постепенно стали переходить и к новым задачам, которых древневосточный мир либо не ставил, либо не придавал им особого значения.

- Вот мы вспоминали об удвоении площади, - добавил Коникос, - тут нужен корень из двух. В этом случае всего проще взять самое грубое приближение, то есть дробь 7/5, которая иначе 1,4, то есть корень из двух с точностью до первого десятичного знака. Если 7/5 возвести в квадрат, получается 49/25, или 1,96, то есть двойка с ошибкой на четыре сотых. Для плотника это отлично. Но греки на этом не хотели останавливаться и стали изучать теорему Пифагора (которую прекрасно знали и на Востоке) и вскоре открыли, что вся трудность не в вычислении, а в том, что корень из двух совсем необычное число, которое очень легко построить геометрически...

- А как его построить? - еще раз спросил Радикс, обращаясь к Илюше.

- Так это будет диагональ единичного квадрата, о котором мы только что говорили! - не задумываясь воскликнул Илья и

посмотрел на Радикса.

- Молодец! - похвалил Асимптотос. - Признаться, не ожидал от тебя такой прыти!

- 305 -

- ... очень легко построить, - продолжал Коникос, - но невозможно точно вычислить. Вот тогда открыли иррациональные числа, а затем придумали особенное построение, при помощи которого эту величину можно вычислить с любой степенью точности[23]. Одно открытие привело к другому.

- Значит, это было замечательное открытие!

- Конечно! Наука стала объяснять законы счета, проникать во все своеобразие этих законов. Халдей говорил: "Делай так, потому что иначе ничего не выйдет!" А грек говорил:

"Рассудок учит, что, делая вот так, ты следуешь законам мира чисел, а поступая иначе, ты эти законы безрассудно нарушаешь, поэтому-то ты в последнем случае и расплачиваешься ошибкой!"

- Но ведь халдей даже не знал об этих законах? - спросил Илюша.

- Действительно, не знал, вернее, не догадывался. Да ведь и греки не сразу догадались...

- Но зачем же древневосточным ученым нужен был корень квадратный из двух с такой точностью, которая на практике была им не нужна? - спросил Илюша.

- Прямо ответить на этот вопрос невозможно, - сказал Коникос, - но уж раз мы знаем, что такие весьма точные вычисления существовали, мы убеждаемся в том, что либо это делалось просто из научной любознательности, либо это были упражнения для учеников. Но и в том и другом случае это все-таки очень похоже на то, что мы теперь называем наукой.

Возможно, что некоторые вопросы, вроде теории квадратного уравнения, изучались преимущественно на числовых решениях. Может быть, это не самый лучший способ анализа, но и он давал некоторые результаты. Квадратное уравнение вавилоняне решали просто: находили два числа по их сумме и произведению... Что ты на это скажешь?

- На основании формул Виета как раз выходит квадратное уравнение:

$x2 + px + q = 0$.

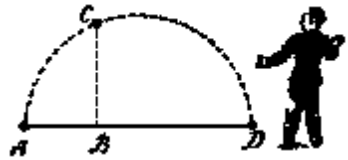
Сумма его корней равна p с обратным знаком, а их произведение = q.

- Вавилонянин решал задачу так: либо эти искомые величины (корни) равны между собой, либо нет. Если нет, то между ними есть некая разность z. Тогда можно написать, что

$x_1 = -p/2 + z$; $x_2 = -p/2 - z$, где $z = 1/2(x_1 - x_2)$.

- 306 -

Затем во второе уравнение x1 • x2 = q подставляем эти значения корней и приходим к известной формуле квадратного уравнения, что нетрудно проверить.



AB = a; BD = 2a; CB = a√2

Илюша немного повозился с расчетами, выяснил, что получается, а затем сказал:

- Но ведь ученый халдеи не знал формул Виета?

- Формул, конечно, он не знал, но самый факт определенных взаимоотношений между исходными данными такой задачи и ее решением не мог быть для него тайной, потому что тогда он не сумел бы так решить задачу. Формулировать это еще не умели и не понимали, может быть, сколь это полезно, но факт был известен. Догадываешься, в чем тут разница?

- Как будто... то есть, как вы говорите, не знали, почему?

- Вот именно, - подтвердил Радикс. - Удвоить квадрат оказалось довольно просто, а основное правило решения выясняется при помощи теоремы Пифагора. Если сторона квадрата равна a, то мы узнаем x из пропорции:

Ты, наверно, помнишь, как геометрически производится построение средней пропорциональной?

- Конечно! - отвечал мальчик. - Это мы по геометрии проходили. Откладываешь на прямой отрезки, равные a и 2a, и на их сумме, то есть на 3a, строишь полуокружность, радиус которой равен 1,5a. А теперь, если AB будет отрезок a и 2a отрезок BD, то из точки B ты восстанавливаешь перпендикуляр до пересечения с окружностью - это и будет искомая средняя пропорциональная. Доказать, что это так, нетрудно. Теорема Пифагора все тут объясняет.

- Хорошо. Таким образом, тебе, следовательно, ясно, что, применяя это несложное построение, для которого ты пользуешься двумя известными тебе по своим свойствам геометрическими местами, то есть прямой и окружностью - иначе сказать, линейкой и циркулем, - ты получишь совершенно точно искомую величину. Но затем стал вопрос об удвоении объема.

- 307 -

Тут нужен не квадратный, а кубический корень из двух. Конечно, и для него не так уж трудно найти грубое приближение,

вроде дроби 29/23, потому что, если эту дробь возвести в куб, получится 24389/12167 что Равно 2,0045, то есть двойка с ошибкой меньше пяти тысячных. Опять для целей строительства - прекрасное приближение! Но и в этом вопросе, который оброс в Древней Греции разными легендами и широко обсуждался, древнегреческий ученый действует по-особому. И для куба Гиппократ Хиосский вводит в пропорцию еще одну величину, y, причем он допускает, что между x и y соблюдается то же соотношение, что и между a и x. Строится пропорция

a : x = x : y = y : b,

откуда

$x^2 = ay$; $y^2 = xb$; $x^4 = a^2y^2 = a^2xb$;

$$x^3 = 2a^3; \quad x = \sqrt[3]{a^2b}$$

Положив теперь b = 2a, мы и получаем искомое решение:

$x^3 = 2a^3$

$$x^3 = 2a^3; \quad x = a \cdot \sqrt[3]{2}$$

- А тут я чего-то, наверно, не понимаю, - признался Илья. - Зачем же Гиппократу понадобились все эти сложности[24] с его пропорцией? Ведь то, что ты называешь решением, то есть равенство $x^3 = 2a^3$, можно прямо написать из условий задачи. Для чего здесь нужна была эта длинная пропорция?

- Видишь ли, чтобы сообразить, зачем Гиппократу понадобилась эта сложная пропорция, надо вспомнить, что греки не располагали современной символикой. Это ты теперь можешь написать сразу:

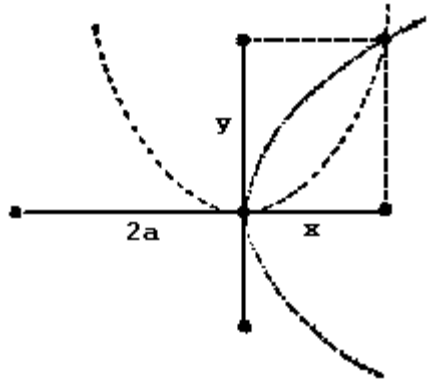
$$x = a \cdot \sqrt[3]{2}$$

а у греков пропорция была единственным способом для построения кратных соотношений между величинами. Следы этого громоздкого пропорционального подхода к подобным вопросам можно заметить вплоть до семнадцатого века вашей эры. Гиппократ придумал нужную пропорцию, и заслуга его в том, что он формулировал решение задачи, то есть он "составил уравнение", которое должен был далее решить геометрически, построением. Но Гиппократу это все-таки не удалось.

- 308 -

Он только указал общий принцип решения. Решили эту задачу другие греческие математики, в том числе Менехм, ученый, который много занимался коническими сечениями (так что три эти сечения даже назывались в его честь "триадой Менехма"). Это решение представляет собой нечто более сложное, нежели известное тебе построение средней пропорциональной. Искомый отрезок x строится при помощи двух пересекающихся парабол, поскольку парабола имеет близкое отношение к

средним пропорциональным.



Построение Менехма.
Параболы: $x^2 = ay$; $y^2 = ax$;
Ищется средняя пропорциональная между a и 2a.

Впрочем, другие математики древности дали иные решения, не менее остроумные, и подошли впервые к решению кубического уравнения. Рассказ об этой задаче очень популярен среди ученых Возрождения, и для нас интереснее всего то, что принцип Гиппократа и всех, кто шел по его пути, представляет собой не только решение одной-единственной задачи, а является решением определенного типа задач на две средние пропорциональные. Этот вывод уже греческий.

- Это справедливо, - заметил Асимптотос, - но вот что еще можно отметить. Греческая разработка древневосточной науки привела постепенно греков к убеждению, что геометрия покоится на некоторых общих положениях, из которых путем ясного, простого и последовательного рассуждения можно вывести все важнейшие теоремы. Самые размышления стали глубже и проще: вместо того, чтобы покоряться неведомым силам природы, человек стал доискиваться их причин и мало-помалу пришел к заключению, что мировой порядок может быть изложен при помощи вычислений, то есть математически.

Разумеется, успехи вавилонских вычислителей-астрономов очень помогли этому. В Греции возникла пифагорейская школа мыслителей, которая учила, что все на свете определяется числом, причем целым. Значение этой школы в том, что она утверждала; мировой порядок есть нечто от человека не зависящее, что законы природы представляют собой не просто что-то таинственное, но нечто сложное, однако постижимое для человека. И вот при разработке этого учения древние мыслители столкнулись с явлением, которого не знал Древний Восток, - с иррациональностью, которая никакими числами точно выражена быть не может. Это открытие разрушило веру в целое число, а с

другой стороны, показало, что геометрия в некотором смысле сильнее арифметики, ибо построить корень из двух нетрудно, а вычислить невозможно.

- 309 -

- Значит, - решил Илья, - это и было одним из завоеваний новой науки?

- Конечно! - ответил Радикс. - Иногда оно выражалось очень странно. Например, утверждали, что геометрия великая наука, а простой счет, которым люди пользуются на базаре, - нечто жалкое и убогое...

- Теперь понять это нетрудно, а тогда... - продолжал Коникос. - Греки постепенно создали такую геометрическую алгебру, где при помощи построений решались довольно сложные задачи. Причем весь ход решения, все рассуждения от начала до конца можно было проследить, обдумать и провести с точки зрения логики точно и ясно. Ясное размышление и точное доказательство - вот драгоценный вклад Древней Греции в математику.

- Но ведь все нельзя точно доказать? - усомнился Илюша. - Многое люди делают и без доказательства.

- Конечно! - подтвердил Коникос. - Мы и говорили о том, как целые поколения простых тружеников, ремесленников, со временем совершенствуя свое мастерство, добиваются замечательных успехов. А осмыслить эти достижения очень трудно. Догадка - великое дело! И обычно она идет впереди рассуждения. На опыте не только человека, но даже насекомого - пчелы, мы видим, что за миллионы лет пчелиное искусство строить соты приобретает такие качества, которые только и можно выразить математически: соты при наименьшем количестве израсходованного материала (воска) обладают наибольшей вместимостью. И это обстоятельство не осталось у греков незамеченным. Но преимущество человека перед пчелой то, что он не только может учить своего преемника на живом примере, но может еще кое-что объяснить и записать...

- Все это очень интересно! Расскажите, пожалуйста, еще про Древнюю Грецию, - попросил Илюша.

- Новый мир Древней Греции, - продолжал Коникос, - был уже в полном своем расцвете. Замечательное различие между людьми из восточных стран, где царили неумолимые деспоты, и людьми нового мира, греками, заключалось в том, что раб деспота умел только исполнять повеления, тогда как в греческом, более свободном государстве, человек научился рассуждать, опираясь не просто на приказы, а на подлинные законы общежительного мира, которые, в свою очередь, состояли из законов природы и

великих достижений человеческого труда и опыта. Греки заимствовали у своих соседей ряд важных социально-экономических нововведений: у одних они заимствовали простую и удобную азбуку, у других - чеканную монету, что в результате очень облегчило торговые связи, а вскоре восточные царства пали под натиском греческого оружия.

- 310 -

Вспомни-ка походы Александра! А затем в новом богатом эллинистическом мире, где смешались древневосточная культура и греческая городская цивилизация, произошли и новые математические открытия. Великий философ Древней Греции Аристотель, основатель научной логики, учил, что геометрия занимается вещами недвижимыми, если не считать того, что двигается по небу, то есть тела небесные. Но вскоре понятие движение вошло и в геометрию. Аристотель в свое время учил, что точка "не может двигаться", что она есть пересечение двух прямых, подобно тому, как прямая - пересечение двух плоскостей, а плоскость - граница объема. Но пришло время новых задач, более трудных, и они потребовали ввести в геометрию движение.

- Вообще, - добавил Радикс, - в древности, а также и в средневековье полагали, что геометрия строится путем чистого рассуждения и как бы независимо от опыта, что, разумеется, неправильно. Отсюда делался необоснованный вывод, что такого рода наука в некотором смысле выше наук опытных, так как опыт, дескать, может и обмануть. Греческий философ и математик Платон утверждал, что геометрия "разрушается", если мы "низводим ее к чувственному миру", то есть к миру опыта, вместо того чтобы "насыщать ее невещественными и мысленными образами", то есть плодами чистого рассуждения и размышления. Отчасти это было полезно тем, что люди научились рассуждать абстрактно, а в этом был, конечно, свой смысл. Наконец греки столкнулись с задачами, к которым с помощью таких рассуждении подойти было невозможно.

И тогда-то в геометрические задачи и вторглось нечто совершенно новое, а именно движение.

- А что же тут такого? - спросил Илюша. - Почему же нельзя рассуждать о движении в математике? Разве это так сложно?

- Спустя много веков после того, как греки впервые подумали об этом, конечно, вопрос этот кажется совершенно несложным. А в то время это было не так-то просто. Геометрия Востока учила главным образом вычислять площади. Греки сами немало потрудились над определением объемов. Но вое это касалось свойств некоторых неподвижных и вполне определенных тел и фигур. Когда же дело коснулось линий, порожденных движением,

то возникло немало споров о том, что такое движение, можно ли говорить о нем с той же строгостью и точностью, с какой мы говорим о геометрических соотношениях. И были такие философы, которые утверждали, что говорить о движении вообще невозможно, что это понятие разрушает всю человеческую логику.

- Как странно это! - сказал Илюша. - Впрочем, мне вспоминаются стихи Пушкина:

Движенья нет, сказал мудрец брадатый,
Другой смолчал и стал пред ним ходить.
Сильнее бы не мог он возразить;
Хвалили все ответ замысловатый.

Но, господа, забавный случай сей
Другой пример на память мне приводит:
Ведь каждый день пред нами солнце ходит,
Однако ж прав упрямый Галилей.

Но что же такого в движении, что оно казалось таким неопределенным?

- При рассмотрении движения древние мыслители сталкивались с большим для них затруднением, которое представляло тогда понятие непрерывности, ибо для понимания движения следовало представить себе, что движущееся тело проходит через бесконечное множество промежуточных положений. Вспомни рассказ про Ахиллеса и черепаху из Схолии Двенадцатой.

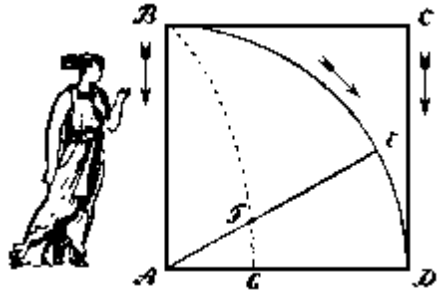
- Как же они применили движение в геометрии? - спросил Илюша.

- Ну вот, - сказал Асимптотос, - посмотри, как решил задачу о трисекции угла греческий математик Гиппий Элидекий, современник Сократа, в пятом веке до вашей эры. Возьмем квадрат ABCD. Радиусом AE, равным стороне квадрата, проведем четверть окружности BED.

Приведем теперь радиус AE в совпадение со стороной AB и будем поворачивать его по движению часовой стрелки по направлению к стороне AD. В то же время будем перемещать сторону BC вниз параллельно ей самой так, чтобы это перемещение шло равномерно, согласованно с движением радиуса.

- Не понимаю, - сказал Илюша. - В каком смысле

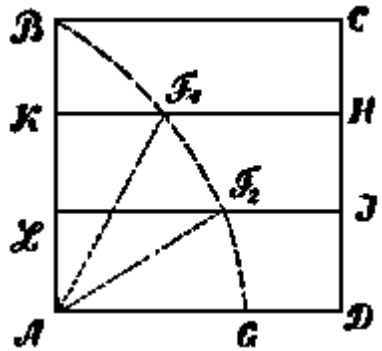
согласованно?



Сторона BC опускается вниз; радиус AE поворачивается вокруг точки A по часовой стрелке. Кривая BFG называется квадратрисой. Она есть геометрическое место точек пересечения двигающихся линий BC и AE. AB = BC = AE.

- 312 -

- В таком, что обе линии начинают двигаться в один момент, а затем в один и тот же момент сливаются с линией AD.



Квадратриса делит угол на три части.

Если они будут двигаться именно так, то когда линия BC пройдет половину стороны AB, радиус AE пройдет половину угла BAD. Следовательно, если линия BC пройдет четверть своего пути, то и радиус AE пройдет четверть прямого угла, и так далее. Будем теперь отмечать точки пересечения радиуса AE и стороны BC. Геометрическим местом этих точек пересечения будет кривая BFG, намеченная пунктиром. Очевидно, что мы можем получить любое число таких точек, то есть построить всю кривую BFG. Когда же это сделано, нам достаточно разделить сторону CD на любое число равных частей, чтобы разделить угол на то же число частей. Если я разделю сторону CD на три части, как показано на этой странице, и проведу через точки II и I линии, параллельные стороне BC, то точки пересечения этих прямых HK и IL с кривой BF1F2G, то есть точки F1 и F2, достаточно соединить прямыми с точкой A, чтобы разделить угол BAD на три части. И подобным же образом можно поступить не только с прямым, но и с любым

углом и с любыми его частями, то есть разделить любой угол на любое число частей. Видишь, как все это просто и как остроумно решено.

- Да! - сказал Илюша. - Правда, очень просто! А что же это за кривая?

- Кривая эта называется квадратрисой. Это гораздо более хитрая кривая, чем те, с которыми древние геометры имели дело до нее. Следовательно, древним для решения этой задачи пришлось изобрести новую кривую. Именно это решение и вводит в ход рассуждения движущиеся линии, тогда как раньше речь шла только о соотношениях неподвижных линий. Говорят, философы были недовольны и считали, что это решение не геометрическое, а механическое. Но опыт показывал, что решение получается скоро и просто.

- 313 -

- Вот, значит, - добавил Асимптотос, - и выходит, что, заставив точку непрерывно двигаться и, полагая, что она, двигаясь, может начертить кривую, мы и получаем несложное средство для деления угла на любые части. Только в дальнейшем выяснилось, что сама эта кривая значительно сложнее и окружности и параболы. Но тем не менее был найден новый способ для решения задач. Это одна из так называемых "механических кривых" древности. "Механической" она называлась потому, что ее тогда невозможно было обосновать теоретически из геометрических соображений. И как ни странно, ни одна из таких "механических" кривых не повлияла непосредственно на развитие древней науки. Они стали приносить пользу только уже во времена Ньютона. Древняя математика еще не в силах была осмыслить их. Догадаться, как надо сделать, смогли, а рассудить почему - не сумели. Поэтому и философы ворчали и говорили, что это "не настоящая" геометрия.

- Однако имей в виду, - заметил Радикс, - что в руках Архимеда этот способ чертить кривые при помощи движущейся точки дал необыкновенный результат.

- Какой?

- Ты, наверно, знаешь, что такое граммофонная пластинка?

- Еще бы! - отвечал Илья не без удивления. - У нас их очень много.

- Очень хорошо - одобрил Радикс. - А теперь скажи, пожалуйста, какую кривую описывает иголка звукоснимателя, когда она бежит по бороздке пластинки?

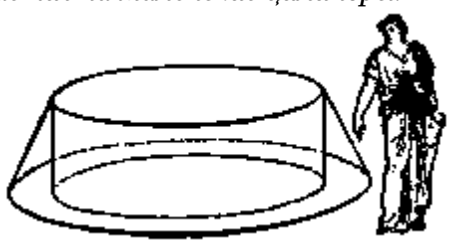
- Папа говорит, что это спираль...

- Верно. Так эту самую спираль и нашел Архимед. Она так и называется "спираль Архимеда". Точка чертит спираль.

- А как она чертит? Я понимаю, как иголка бежит по пластинке. Но как это получается с точкой?

- В проигрывателе пластинка вращается. Но в нашем опыте мы ее оставим неподвижной, а в центре укрепим отрезок прямой и, пользуясь нашими волшебными возможностями, прикажем отрезку: вращайся вокруг этой средней точки против часовой стрелки (это направление мы будем считать положительным), но при этом увеличивайся в длине в соответствии с углом, на который ты повернулся. Чтобы нам удобней отсчитывать вращение отрезка, мы направо от точки в середине проведем горизонтальную прямую и назовем ее полярной осью. Пока отрезок - радиус-вектор - будет еще лежать на полярной оси, угол его с ней равен нулю, а затем он будет увеличиваться. Итак, вперед!

Конус разбивается на маленькие цилиндры.



Усеченный конус и цилиндр.

Тотчас в полутьме возникло все, что заказал Радикс: в середине светилась оранжевая точка, а от нее направо шла розовая полярная ось. Что-то очень маленькое лежало на этой оси...

- А, Мнимий Радиксович! Мое почтение! - воскликнул Илюша.

И Мнимий, возникший из средней точки, стал вращаться, постепенно вырастая, и своим кончиком чертить спираль Архимеда. Описав несколько витков, Мнимий исчез, а спираль так и осталась висеть в воздухе.

- Эта спираль, - сказал Коникос, - умеет делить как угодно любые углы. А с ее помощью Архимед даже построил очень точно длину, окружности.

- Длину окружности? - воскликнул Илюша. - Да ведь это что-то вроде квадратуры круга! Разве это можно?

- Для такой умницы спирали оказалось возможным, - произнес Коникос[25].

- Так вот каким образом греки, решая геометрические задачи, пришли, во-первых, к новым основаниям для геометрических суждений и убедились до некоторой степени, что геометрия не такова, какой они себе ее представляли; во-вторых, они пришли к новым кривым, неизвестным египетским вервиетягателям, о которых вспоминал Демокрит. Именно его атомистическая теория, кстати сказать, и привела к новым удивительнейшим открытиям в математике.

- Как же это так? - спросил Илюша. - Ведь атомы - это касается физики и химии. А при чем здесь математика?

- Мы уже говорили о том, как связана математика с изучением природы, поэтому вполне естественно, что человек, который пришел к убеждению, что весь мир состоит из атомов, начинает думать и о том, что геометрические образы, то есть кривые, площади, объемы, тоже как бы составлены из некоторых элементарных частиц. Кроме того, в таком деле играет очень большую роль опыт. В одном своем сочинении Архимед рассказывает, что Демокрит нашел объем конуса и показал, что его объем равен одной трети объема цилиндра с тем же основанием и той же высотой. Проверить это на практике, то есть путем опыта, ровно ничего не составляет.

Любой слесарь сделает тебе цилиндр, то есть ведерко, и конус.

Налей в ведерко воды, смеряй конусом, сколько ее там, и найдешь это соотношение. Вот что говорит тебе опыт. Если не поверишь первому опыту, можешь повторить его, сделав цилиндр и конус, например, с другим основанием. И снова ты убедишься, что соотношение это правильно. Необходимо только найти логический способ, которым можно это доказать без участия слесаря.

- Значит, Демокрит раньше теоремы своей уже знал это решение? - спросил заинтересованный Илюша.

- Возможно, что и так. Возможно и обратное. Может быть, он сперва вывел свою теорему, а потом проверил ее на опыте. Но еще более вероятно, что он узнал ее от слесаря, кузнеца или медника, которые благодаря своему ремеслу сталкивались с такого рода соотношениями уже не раз. Кстати сказать, теорема эта была доказана со всей необходимой строгостью гораздо позже Демокрита. Весь вопрос заключался в том, чтобы вывести это -

такое простое на вид -соотношение теоретически. И я не знаю, с чего начал Демокрит: атомистическая ли теория привела его к этому решению или это решение привело его к мысли об атомах.

- Как это интересно! - воскликнул Илюша. - Значит, у них и физика, и философия, и геометрия - все было вместе?

- Конечно. Над входом в одну греческую академию было написано: "Да не входит сюда никто, кто не знает геометрии!"

- А как Демокрит решил эту задачу?

- Решил он ее вот как. Он предположил, что конус можно весь разрезать на очень тоненькие кружочки, если резать параллельно основанию, то есть на цилиндрики с очень малой высотой. Правило, по которому изменяется диаметр кружков, вывести не очень трудно. Мы этого пока еще делать не будем, так как сейчас речь не о выводе формулы, а о способе рассуждения, с помощью которого ее можно вывести. Теперь допустим, что цилиндриков не только очень много и толщина их ничтожно мала, но что число их безгранично увеличивается, а толщина тем же порядком уменьшается. Конус заменяется ступенчатой фигурой из кружков. Конечно, это ступенчатое тело не есть конус, но чем дальше я буду уменьшать толщину кружков, которых будет накопляться все больше и больше, тем меньше это ступенчатое тело будет отличаться от конуса.

Допустим, что высота конуса равна 500 мм, а цилиндрики, на которые его режем, сделаны из бумаги, толщина которой примерно равна 0,05 мм, следовательно, всего в конусе их будет десять тысяч. Вряд ли такой конус, склеенный из десяти тысяч листов бумаги, можно отличить от сделанного, скажем, из гипса. А так как объемы цилиндров определить нетрудно, то таким путем мы определим и объем конуса.

- Что-то я плохо понимаю, - грустно сказал Илюша.

- Ничего! Не падай духом! Слушан хорошенько и понемногу поймешь, - подбодрил его Радикс. - Ясно, что когда я заменяю маленький усеченный конус маленьким цилиндром, то делаю ошибку. Но эта ошибка, вычисленная в процентном отношении к измеряемой величине (так называемая "относительная ошибка"), будет сколь угодно мала. Ведь можно взять настолько тонкие кружки, что объем, которым я пренебрегаю, составит, например, менее одной десятой, либо сотой, либо тысячной процента и так далее по отношению к объему конусика (или цилиндрика; считай как хочешь, это неважно). Но раз это так, то нетрудно сообразить, что если суммировать цилиндрики, то и искомый объем большого конуса тоже будет с той же относительной ошибкой, то есть менее одной десятой, либо сотой, либо тысячной процента и так

далее по отношению к истинному объему. Следишь ли ты за развитием моего рассуждения?

- Да-да! - ответил поспешно мальчик. - Слежу и пока, кажется, все понимаю.

- Приятно слышать. Ну, слушай далее! Итак, если конус высотой в метр делить на кружки, толщина которых равна одному микрону, то есть тысячной доле миллиметра, то велика ли - опять-таки в процентах! - будет разница между объемом кружка и объемом усеченного конусика, на которые делится конус, если действовать совершенно точно?

- Нет, - ответил Илюша. - Раз каждый кружок будет толщиной в микрон, то наверно разницу-то и заметить будет невозможно.

- Справедливо, - отвечал Асимптотос. - Но ведь у нас нет надобности резать на самом деле конус на кружки, нам достаточно только вообразить это, ибо мы это делаем только для рассуждения, а если так, то никто не мешает нам допустить, что мы будем разрезать каждый кружок в тысячную долю миллиметра толщиной еще на миллион сверхтончайших кружков.

Как ты тогда обнаружишь разницу между объемом кружка и элементарного усеченного конусика? А ведь в рассуждении я могу повторять мое деление на миллион еще любое число раз. Этот метод деления объема на крайне малые объемы назывался в древности "методом исчерпания", ибо такими крохотными объемами мы как бы "исчерпываем" данный объем.

- Значит, - сказал Илюша, - мы будем все делить и делить, и "высота-толщина" цилиндрика-кружка будет изменяться...

- Как и полагается переменной величине! - сообщил многозначительно Радикс.

- Ну да, - отвечал Илюша, - конечно, если она все время меняется, то ясно, что это величина переменная. И так она изменяется, уменьшаясь и приближаясь, - я думаю, здесь можно сказать - к некоторому пределу?

- Разумеется, - отвечал Асимптотос, - так сказать не только можно, но даже и должно. Но вот вопрос: к какому именно пределу стремится эта твоя "высота-толщина"?

- Мне кажется, - осторожно произнес Илюша, - что если она будет уменьшаться все больше и больше, то естественно, что пределом ее будет нуль.

- А мы уже говорили в Схолии Двенадцатой, - заметил Радикс, - что если переменная величина имеет своим пределом нуль, то мы называем ее бесконечно малой. А это обозначает, что какое бы малое положительное число ни задать, в течение ее изменений наступит момент, начиная с которого ее абсолютная

величина станет и будет оставаться меньше этого числа.

- Это я понимаю, - отвечал Илюша. - Но ведь это еще не все. А что же делается в это время с числом кружков-цилиндриков? .. Мне кажется, что число их в это время растет безгранично.

- Разумеется. Однако не забудь о том, что я собираюсь получить при помощи такого деления на кружки вовсе не приближенный объем конуса, а совершенно точный! Ведь мы действительно убедились с тобой, что в процентном отношении к искомому объему разница может быть сделана сколь угодно малой, если мы будем уменьшать толщину цилиндриков. Убедились мы также и в том, что если в каждом слагаемом мы сделаем ошибку меньше тысячной процента, то при вычислении всей суммы общая ошибка не может превысить того же самого процентного отношения. Не так ли? Тебе все здесь ясно?

- Как будто так, - отвечал Илюша. - То есть этот множитель-ошибка при суммировании просто выйдет за скобку?

- Ну разумеется! А теперь сообрази-ка, что же получится в пределе. Разницу между истинным объемом конуса и суммой можно сделать меньше 0,001, или меньше 0,000001 процента, то есть одной миллионной, или меньше 0,0000000000000000001, то есть одной десятиквинтиллионной процента.

- Постой-ка! - воскликнул Илюша. - А нельзя ли изображать и десятичные дроби через отрицательные степени "десяти"?

- Разумеется, можно. 10^1 будет 10; 10^{-1} - единица, деленная на 10, то есть 0,1, ибо,

$10^{-1} = 10^n / 10^{n+1} = 1 / 10 = 0.1$

а следовательно, 10^{-2} будет 0,01, и так далее.

- А тогда, - сказал Илюша, - эти проценты я запишу так: вместо $0{,}000001\text{-}10^{-6}$, а вместо $0{,}0000000000000000001 - 10^{-19}$.

Но если делать так, то, значит, можно и здесь воспользоваться самыми громадными делителями единицы, вплоть до того невероятного архимедова числа в сто шестьдесят биллионов километров длиной, о котором мы говорили в Схолии Десятой.

Слушай, Радикс! Скажи мне, пожалуйста: может быть,Архимед именно это и имел в виду, когда сочинял "Псаммит"? ..

- Весьма вероятно! И очень хорошо, что ты сам теперь это понял.

- Но если, - продолжал далее мальчик, - точность суммы неограниченно возрастает за счет увеличения числа цилиндров и утончения их, то ясно, что в пределе я и получу совершенно точно искомую величину!

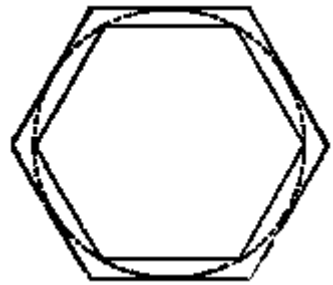
- Так, - отвечал Коникос. - Вот выходит, что "чем больше ошибок ты сделаешь, тем лучше окажется твой результат", ибо чем больше ошибок, тем каждая из них меньше. А отсюда ясно, что ты действительно имеешь возможность при вычислении объема конуса разбивать его на тончайшие слои и считать каждый слой цилиндром, пренебрегая теми крохотными колечками (они у нас останутся, если из каждого цилиндрика вычесть соответственный усеченный конусик), которые представляют собой бесконечно малые более высокого порядка.

А это уже величины такой малости, что по сравнению с ними бесконечно малые первого порядка, о которых мы до сих пор говорили, суть величины бесконечно большие.

- А все-таки есть одна вещь, которую мне очень трудно усвоить! - вздохнул Илюша. - Как это так можно чем-нибудь пренебрегать в математике?

Длина окружности не может быть больше периметра описанного многоугольника и меньше периметра вписанного. Однако если бесконечно удваивать число сторон многоугольников, то оба периметра будут приближаться к длине окружности, как к пределу.

- Чем можно пренебрегать, а чем нельзя, мы узнаем первоначально, разумеется, из опыта. Замечательный физик и мыслитель девятнадцатого века Больцман утверждал, рассуждая о вопросах, близких к тем, о которых мы сейчас говорим, что не логика решает в конце концов, правильна ли данная система размышлений или неправильна. Решает этот вопрос дело, то есть наша человеческая повседневная деятельность. "То, что ведет нас к верному делу, - говорил Больцман, - то и есть истина". И если бы мы с помощью данных рассуждений не могли достигнуть некоторых неоспоримых практических результатов, то никогда и не могли бы установить, как же, наконец, следует рассуждать - так или иначе. Если я путем такого процесса бесконечного уменьшения слагаемых кружков получаю правильное решение, то, следовательно, и способ мой правилен.



Длина окружности не может быть больше периметра

описанного многоугольника и меньше периметра вписанного. Однако если бесконечно удваивать число сторон многоугольников, то оба периметра будут приближаться к длине окружности, как к пределу.

Конечно, затем нужно обсудить теоретически, обосновать и осмыслить все эти операции. Очевидно, что можно так обращаться с конусом только в том случае, если есть возможность убедиться, что этим путем я действительно могу приблизиться к некоторому пределу. И вот так-то, перерешав бесчисленное множество таких задач, люди и научились складывать бесконечно малые величины и узнали постепенно их свойства. Ничего нет удивительного в том, что человек, который никогда не имел дела с бесконечно малыми, не знает, как с ними обращаться. Что же касается понятия предела, то тут вот что можно сказать для выяснения. Ясно, что периметр вписанного многоугольника, если мы будем последовательно удваивать число его сторон, должен безгранично приближаться к длине окружности. Стать больше ее он не может, ибо ведь он вписанный, а не описанный, но, увеличиваясь, он все тесней и тесней приближается к ней по мере новых удвоений его сторон. Отсюда мы можем прийти к определению длины окружности как предела периметров вписанных многоугольников, если мы безгранично удваиваем число их сторон. С другой стороны, и периметр описанного многоугольника при бесконечном удвоении числа сторон также будет стремиться, уменьшаясь, к тому же пределу, то есть к длине окружности. Стать меньше ее он не может, так как он описанный, а не вписанный.

- 320 -

Длина окружности лежит всегда между периметром описанного и периметром вписанного многоугольников. Она меньше первого и больше второго.

И оба стремятся к ней. Поэтому можно проверять одно приближенное решение при помощи другого и установить границы, между которыми лежит искомая величина, наподобие того, как Архимед установил, что правильное значение корня квадратного из трех лежит между двумя неправильными дробями.

265/153 и 1351/780

(если взять корень из трех с точностью до семи десятичных знаков, то есть до одной десятимиллионной, то первая дробь дает значение корня из трех с недостатком в 247 десятимиллионных, а вторая с избытком в пять десятимиллионных). Архимед, кстати, при вычислении длины окружности пользовался вписанным и описанным многоугольниками с девяноста шестью сторонами.

Однако это касается уже самого вычисления, и там, разумеется, ты волен остановиться на таком приближении, которое кажется нужным. А выкладки дают способ вычисления. А какая нужна точность в каждом данном случае - это уже дело твое. Повторим теперь еще раз знакомый нам из древности пример убывающей геометрической прогрессии. Пусть ее первый член будет равен единице, а знаменатель - половине. Тогда предел, к которому стремится ее сумма, будет равен двум целым. И это очень легко заметить. Вот эта прогрессия:

1; 1/2; 1/4; 1/8; 1/16; 1/32; 1/64...

Теперь запишем последовательные суммы:

1 = 1

$$1 = 1$$
$$1 + \frac{1}{2} = 1\frac{1}{2}$$
$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 1\frac{3}{4}$$
$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = 1\frac{7}{8}$$
$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = 1\frac{15}{16}$$
$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} = 1\frac{31}{32}$$
$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} = 1\frac{63}{64}$$
. . . . . .

Но

$$1 = 2 - 1$$
$$1\frac{1}{2} = 2 - \frac{1}{2}$$
$$1\frac{3}{4} = 2 - \frac{1}{4}$$
$$1\frac{7}{8} = 2 - \frac{1}{8}$$
$$1\frac{15}{16} = 2 - \frac{1}{16}$$
$$1\frac{31}{32} = 2 - \frac{1}{32}$$
$$1\frac{63}{64} = 2 - \frac{1}{64}$$

откуда ясно, что каждый следующий член этого ряда сумм будет все ближе и ближе к двойке.

- Да-да! - сказал Илюша. - Вот как раз именно так мы с Радиксом делили яблочко в Схолии Двенадцатой. Я сразу сейчас вспомнил.

- Вот именно. Однако самый процесс разыскания пределов

отнюдь не так-то прост, и в нем очень легко ошибиться.

Например, не во всякой геометрической прогрессии сумма имеет предел. Если взять геометрическую прогрессию с первым членом, равным единице, а знаменателем минус единице, то получим следующий ряд:

1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - ...

Попробуем вычислить сумму такого ряда. Если я напишу ряд в таком виде:

S = (1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + ...

то очевидно, что сумма его равняется нулю. Однако стоит его изобразить иначе:

S = 1 - (1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + ...

и получится в сумме не нуль, а единица! Но я могу придумать еще одно начертание:

S = 1 - (1 - 1 + 1 - 1 + 1 -...),

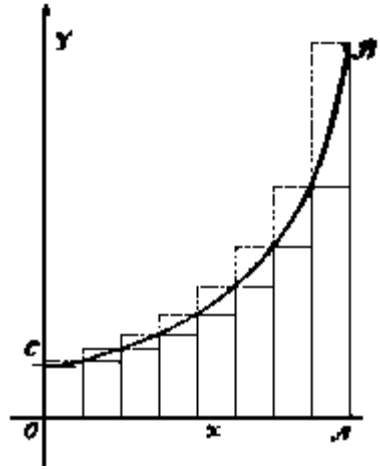
и тогда сумма S будет, очевидно,

S= 1 - S.

Получающееся уравнение, как ты видишь, решить нетрудно, но в таком случае сумма равняется уже и не единице и не нулю, а просто половине! Из ряда подобных "вычислений" можно заключить, что о сумме такого ряда говорить в том же смысле, в каком мы говорим о сумме конечного числа членов, невозможно. Математики бились с этим рядом очень долго, пока не убедились наконец, что прежде чем говорить о сумме бесконечного ряда, надо сперва точно определить, что следует понимать под этими словами. В данном случае то общее определение, согласно которому мы под суммой бесконечного ряда

1 + 1/2 + 1/4 + 1/8 + 1/16 + 1/32 + ...

понимали рассмотренный выше предел, то есть двойку, нам совершенно не подходит, так как последовательные суммы нового ряда попеременно равны то единице, то нулю, и ни к какому пределу не стремятся.



Надо найти площадь ABCO. Сумма площадей прямоугольников, начерченных сплошными линиями, будет мельше искомой площади; эта же сумма с добавлением площадей пунктирных прямоугольников будет больше искомой площади. Но если число прямоугольников бесконечно увеличивать, то основания их станут бесконечно малыми и как сумма "входящих", так и сумма "охватывающих" прямоугольников будут обе бесконечно приближаться к искомой площади и в пределе будут ей равны.

В этом смысле мы можем теперь сказать, что такой ряд вовсе не имеет суммы, а следовательно, все рассуждения о том, "чему же равно выражение 1-1 + 1-1 + 1-... и так далее до бесконечности", просто бессмысленны. Так вот, если ты установил, что можешь миновать такого рода трудности, то можно пользоваться этим в высшей степени удобным способом. То, что я тебе изложил, в целом есть завоевание уже гораздо более поздних времен. Самый вопрос о бесконечно малых и о пределах настолько сложен, что греки не смогли с ним справиться. Против деления площадей и объемов на бесконечно малые составляющие было выдвинуто очень много возражений, и некоторые из них казались вполне основательными. Говорили, например, что из целой массы величин, которые почти не отличаются от нуля, нельзя составить конечной величины - "из ничего и выйдет ничего".

- 323 -

- Да, - сказал Илюша, - а ведь это очень похоже на правду!

- Похоже, конечно, - отвечал Радикс, - но есть одно обстоятельство, которое это правдоподобие нарушает. Если взять бесконечно малую величину и повторять ее слагаемым конечное число раз, то, несомненно, получится снова величина бесконечно малая. Но если рассматривать сумму неограниченно возрастающего числа бесконечно малых, то нельзя ручаться, что

будет величина бесконечно малая. То есть в одном случае окажется нуль, но в иных можно получить некоторую конечную величину, отличную от нуля. Разумеется, все это должно делать обдуманно и с рядом самых серьезных предосторожностей. Кстати сказать, Паскаль на упрек, выраженный в фразе "из ничего и выйдет ничего", отвечал, что он вовсе не суммирует нули, а разбивает некоторую конечную величину, которая ему дана. Такое разбиение отнюдь не равнозначно уничтожению этой величины.

- Вот именно, - сказал Коникос. - Но такие подробности, в данном случае очень важные, ускользали от внимания древних математиков. И тем не менее начало этого дела было ими положено. А в дальнейшем Архимед, опираясь на работу Демокрита и других развил этот способ. Он нашел площадь сегмента параболы, поверхности шара, сумму квадратов натурального ряда и сделал еще немало других открытий. Историки рассказывают, что он до того был предан геометрии, что его слугам приходилось чуть не насильно отрывать его от занятий и кормить. Он был убит при взятии города Сиракузы римлянами. Говорят, будто это произошло случайно, что предводитель римского войска Марцелл отдал даже особый приказ пощадить великого ученого. Архимед много помогал своим согражданам при осаде города Сиракузы, организовав всю защиту своего родного города.

- А правда, что он сжег римский флот при помощи каких-то особенных зеркал? - спросил Илюша.

- Нет! - отвечал Радикс. - Это сказка, которую выдумали в средние века. Уже Кеплер смеялся над ней. Зеркалом, разумеется, можно зажечь дерево, но для того, чтобы на расстоянии километра это сделать, надо изготовить зеркало диаметром в полкилометра... Вот этот-то Марцелл и назвал Архимеда "Бриареем геометрии", сравнив его со сказочным сторуким чудовищем.

- А как же называется этот способ вычисления площадей фигур вроде параболы и тому подобных?

- 324 -

- Ты хочешь сказать "площадей криволинейных фигур"?

Этот способ теперь в математике называется интегрированием.

Вдруг все замолчали, напряженно вглядываясь во что-то, что было за спиной Илюши.

Мальчик обернулся и увидел громадную тень Великого Змия, повисшую в воздухе.

- 325 -

Схолия Шестнадцатая,

где выясняется, какие прекрасные математические плоды нашел однажды астроном Кеплер. Затем Радикс знакомит Илюшу поближе с его старой приятельницей касательной, и тут он узнает, что эта линия является волшебницей, умеющей делать самые настоящие чудеса, а кроме того, объясняются некоторые необъяснимости, как, например, почему Илюша не может закинуть камень в 20 граммов весом за полкилометра, хотя, согласно тройному правилу, это вполне возможно. Дальше выясняется, как наконец подружились Кеплер и Галилей с Аполлонием и Архимедом, кто мешал этой дружбе, и что из этого получилось, и как после этого Исаак Ньютон пришел с простыми и умными гипотезами и со своим "микроскопом" в царство тех могущественных карликов, которых мы называем бесконечно малыми, и как они научили людей познавать законы природы.

Громадный призрак исчез. Радикс и Илюша поблагодарили любезных старичков и собрались уходить.

- Постой, - сказал Коникос, - а ведь ты не попробовал еще нашего замечательного кваску. Выпей-ка!

Илюша взял большой красивый стакан, в который Коникос налил квас из фонтана, и стал пить. Было очень вкусно.

Однако Илюша заметил, что с каждым глотком квас менял вкус. Сначала он явно был яблочный, затем напоминал лимон, а потом стал пахнуть айвой.

- Очень вкусно! - сказал Илюша. - Но только почему, когда его пьешь, то вкус все время меняется?

- Потому, - наставительно сказал Коникос, - что этот фонтан есть источник имени великого Кеплера, ученого начала семнадцатого века. Он первый после долгого и бесплодного перерыва возобновил работу над сложением бесконечно малых частиц, начатую Архимедом. И он-то и вычислил объем тела, получаемого от вращения части круга, несколько большей его половины. Это тело похоже на яблоко. Вот почему наш квас и пахнет этим кеплеровским яблоком. При вращении части круга, меньшей половины, он получил другое тело и назвал его лимоном. А из вращения большей части эллипса он получил новое тело, которое назвал айвой. Из вращения меньшей части эллипса он получил оливу. Вот какие плоды были у Кеплера! А кроме того, он нашел объемы еще многих других тел.

- А теперь это сладкое вино! - воскликнул Илюша.

- А это потому, - сказал, улыбаясь, Асимптотос, - что Кеплер ведь занимался еще вычислением объемов винных бочек. Его работа так и называется "Новая стереометрия винных бочек". Она вышла в тысяча шестьсот шестнадцатом году.

- Очень вкусно! - заключил Илюша.

Затем они распростились с добрыми хозяевами сыроварни, получили на дорогу по большому куску сыра и отправились восвояси.

- Все это очень интересно, - сказал Илюша, - по все-таки я не совсем понимаю, как это делается.

- В семнадцатом веке, - сказал Радикс, - было уже довольно много ученых, которые занимались такими вопросами.

Развивалась алгебра, и в решениях разных задач стало легче разбираться. Когда ты решаешь задачу арифметически, то числа после перемножения или сложения сливаются воедино, и ты уже не можешь следить за тем, что с ними происходит в течение решения. А в алгебре весь ход решения задачи у тебя перед глазами, и его легко исследовать. Греки занимались геометризованной алгеброй. Арабы много сделали для самой алгебры. В их среде были крупные ученые. Некоторые из них продолжали и даже развивали работы Архимеда по суммированию бесконечно малых. Но настоящая алгебра связана уже с европейской математикой, в частности с именем Виеты, теорему которого ты, конечно, помнишь.

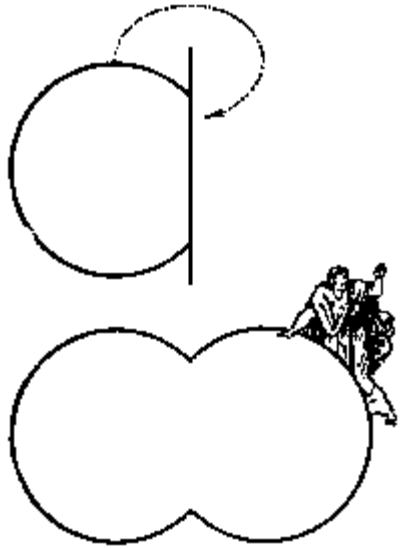
Вращая около этой оси часть круга, большую его половины, мы получаем яблокообразное тело.

Затем, как мы уже говорили, замечательный французский философ и математик Декарт открыл аналитическую геометрию и ввел в употребление метод координат, хотя попытки такого рода были сделаны еще греками, а затем Орезмом в четырнадцатом веке. Это было шагом в сторону, противоположную греческим ученым, - это было алгебраизацией геометрии.

- 327 -

Это открытие дало науке очень много новых возможностей.

- А что это были за возможности? - спросил Илюша.



Вращая около этой оси часть круга, большую его половины, мы получаем яблокообразное тело.

- Дело, видишь ли, тут вот какое. Если ты умеешь составить уравнения прямой или кривой, то, получив их, можешь действовать с этими уравнениями, как с алгебраическими выражениями, что гораздо проще, чем возиться с геометрическими построениями. Если, например, надо найти точку, где пересекаются две кривые, то, зная, как написать их уравнения (другими словами, зная, как выражается игрек через икс для одной из кривых и как выражается игрек через икс для другой), приравнивают эти алгебраические выражения друг другу и решают обычным путем получившееся таким образом уравнение относительно икса. Решение дает абсциссу искомой точки. Подставив икс в любое из уравнении, ты находишь и ординату, то есть значение игрека. Ну вот, к примеру, у нас есть две прямые:

$y_1 = 25 + 19x$;

$y_2 = 5 + 9x$.

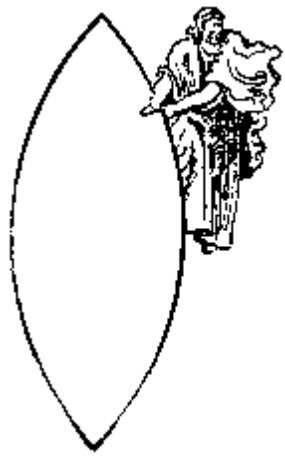
Спрашивается: где пересекаются эти прямые? Другими словами, требуется найти координаты точки пересечения этих прямых. Совершенно очевидно, что в искомой точке и y_1 и y_2 имеют одно и то же значение, а следовательно, мы найдем абсциссу точки пересечения из такого уравнения:

$25 + 19x = 5 + 9x$.

Решая это уравнение, находим, что

$x: = -2$.

Вращая около этой оси часть круга, меньшую его половины, мы получаем лимонообразное тело.



Если тело обрезать сверху и снизу, получается бочка, объемом которой интересовался Кеплер. Еще более близкое к бочке теле можно получить из эллипса подобным же образом.

Чтобы найти ординату точки пересечения, подставляем найденное значение икса в любое из уравнений прямых и получаем:

y = -13.

Итак, координаты точки пересечения найдены, они равны:

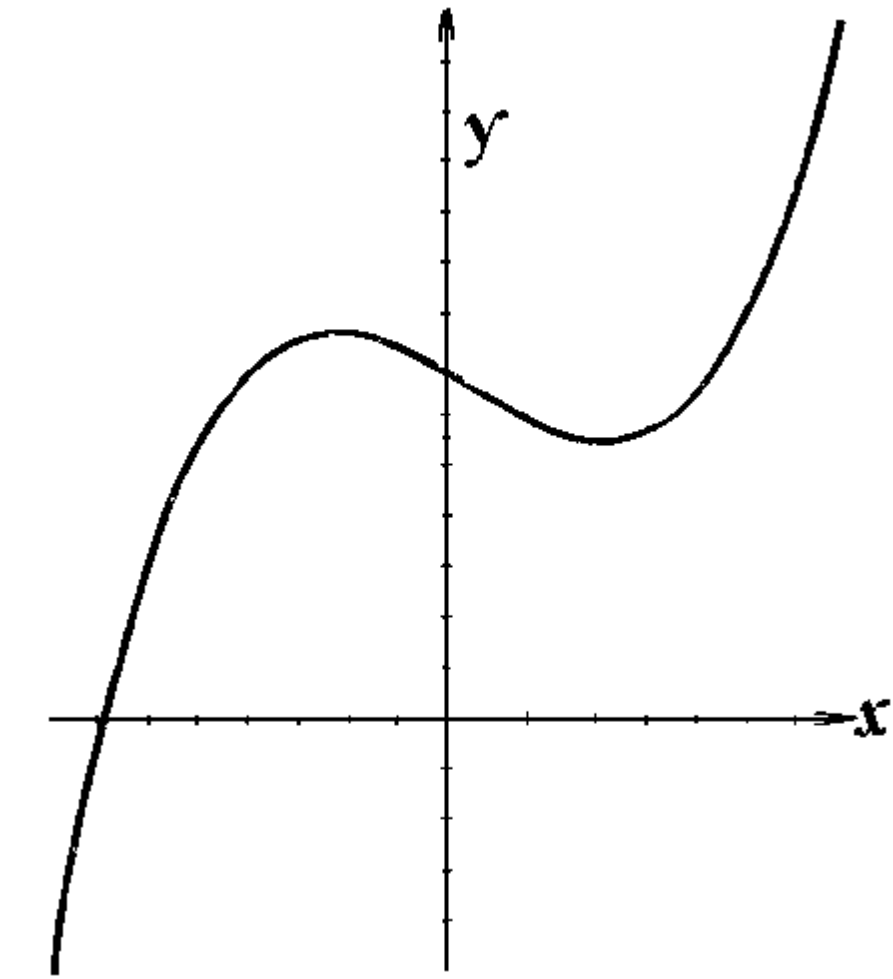
-2; -13.

Когда Декарт, говорят, привел в порядок все эти свои открытия, то он сказал: "Я решил все геометрические задачи". И это было справедливо в том смысле, что, владея его методом, можно было решить почти все задачи, известные в то время. Для примера того, как расширялись возможности наших суждений,

вспомним параболу. Сперва греки говорили, что парабола есть сечение конуса плоскостью, параллельной образующей конуса. Затем, после того как было формулировано понятие геометрического места и оценено значение этого понятия, они определили параболу так: это геометрическое место точек, равноотстоящих от прямой и точки (директрисы и фокуса). А по методу Декарта легко показать, что парабола - это график квадратного трехчлена. Чисто геометрическое построение сроднилось с чисто алгебраическим. Причем и то и другое очень выиграло в смысле наглядности и простоты. Таким образом, ум математика освободился от целого ряда мелких, но хлопотливых трудностей, и это помогло заняться более важными работами.

- 329 -

Парабола третьего порядка.



Один вещественный корень и два комплексных.

Геометрия и алгебра как бы слились в одну науку, и их сила увеличилась от этого во много раз. Алгебра позволяет преобразовывать уравнения, выражающие геометрические соотношения, а геометрия наглядно представляет смысл многих алгебраических зависимостей и преобразований. Можно теперь высказывать очень странные на первый взгляд суждения, например, что у квадратного трехчлена есть ось или фокус. И ты будешь прав: действительно у геометрического образа квадратного трехчлена, то есть у параболы, имеется и то и другое.

- 330 -

А есть ли смысл в таких "странных" замечаниях? Представь себе, что есть, и вот пример. Что это, собственно, означает, что у квадратного уравнения имеются два корня? Это значит, что парабола на графике дважды пересекает ось абсцисс, или ось иксов, как мы это выяснили в Схолии Двенадцатой. Что значит, что у квадратного уравнения нет вещественных корней? Это значит, что соответствующая на графике данному квадратному трехчлену парабола совсем не пересекает оси иксов - она вся находится либо выше этой оси, либо ниже ее. Если взять уравнение третьей степени:

$x^3 + Ax^2 + Bx + C = 0,$

то у него должно быть три корня, например:

$x_1 = a; x_2 = b; x_3 = c,$

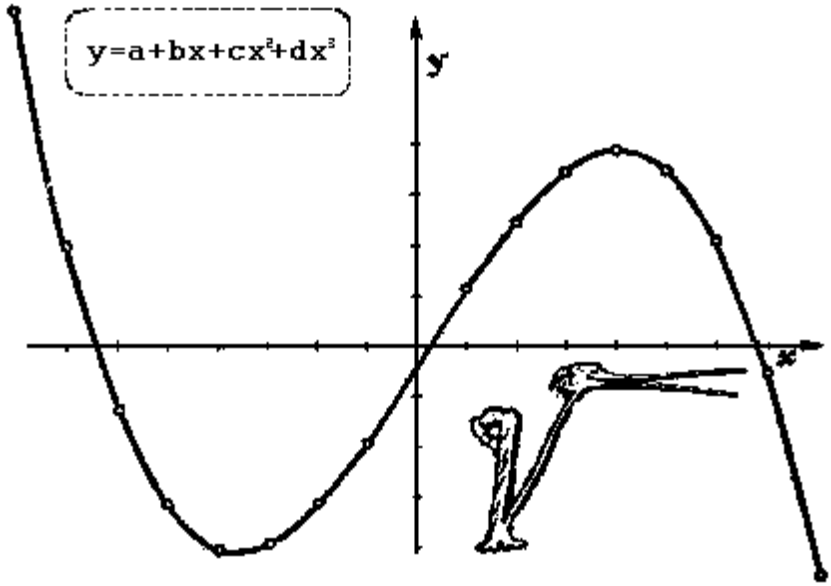
теперь можно составить такое уравнение:

$(x - a)(x - b)(x - c) = x^3 - x^2(a + b + c) +$

$+ x(ab + ac + bc) - abc = 0,$

откуда следует, что коэффициенты уравнения третьей степени связаны с корнями следующим образом:

$A = -(a + b + c); B = ab + ac + bc; C = -abc.$



Три вещественных корня.

- 331 -

Рассмотрим теперь, что обозначает геометрически утверждение о трех корнях. Если мы напишем

$y = x^3 + Ax^2 + Bx + C$,

то будем иметь дело с кривой, которая сперва поднимается вверх, доходит до некоторого максимума, потом опускается, доходит до некоторого минимума, а затем снова начинает подниматься. Разумеется, все это может идти и обратным порядком (то есть сперва будет минимум, а потом максимум), в зависимости от знака перед x^3 (все эти кривые называются кубическими параболами, параболами третьего порядка). Но если кривая имеет такую форму, то ясно, что она либо пересекает ось иксов трижды, и тогда все три корня кубического уравнения вещественны, либо пересекает ее только однажды, и тогда у него есть лишь один вещественный корень и два других - комплексные. Все рассуждения чрезвычайно упрощаются. Что же касается тех преимуществ, которые дает алгебра, то легко рассудить, что гораздо проще написать

$x^2 = ab$.

чем выполнить построением и записать такое утверждение:

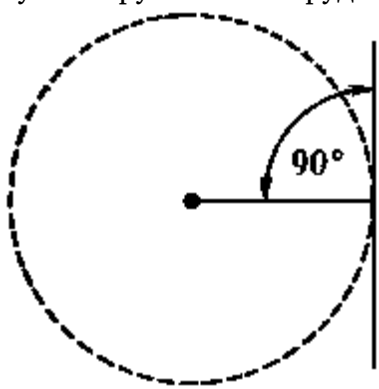
"Квадрат, построенный на отрезке, длина которого равняется x, равновелик прямоугольнику, одна сторона которого равна a, а другая равна b". Тут надо вот еще что иметь в виду. Геометрия древних, как отчасти и геометрия вообще, отличается тем, что там нет общих способов и чуть ли не каждая задача решается по-своему. Греки проявили в таких решениях просто гениальное

остроумие, но им не хватало того, что ныне мы называем общностью. Они сделали все, что было возможно при отсутствии общих методов, а далее вынуждены были остановиться. Труды Архимеда были замечательны еще тем, что он в связи с развитием в его время естественных наук (особенно астрономии) обратил внимание на измерение и вычисление, но и у него общие методы не выработаны, а только намечены. Труды средневековых алгебраистов и математиков эпохи Возрождения много сделали для объединения и систематизации математической работы. Декарту же вместе с Ферма посчастливилось, соединив воедино геометрию с алгеброй, дать математикам в руки способ (метод) для рассмотрения и решения труднейших задач, где геометрия и алгебра помогают друг другу. Именно метод координат и аналитическая геометрия помогли решить одну замысловатую задачу, над которой математики бились с давних пор.

- 332 -

- А какая это задача? - спросил Илюша.

- Это была знаменитая задача о проведении касательной. А построить касательную к окружности нетрудно.



Касательная к окружности перпендикулярна к радиусу.

- Конечно, - отвечал Илюша, - потому что эта касательная перпендикулярна к радиусу.

- Правильно. Ну, а как ты проведешь касательную к любой другой кривой? Ну, например, к той же параболе? Или к кривой обратных величин, то есть к гиперболе? У параболы, например, нет радиуса.

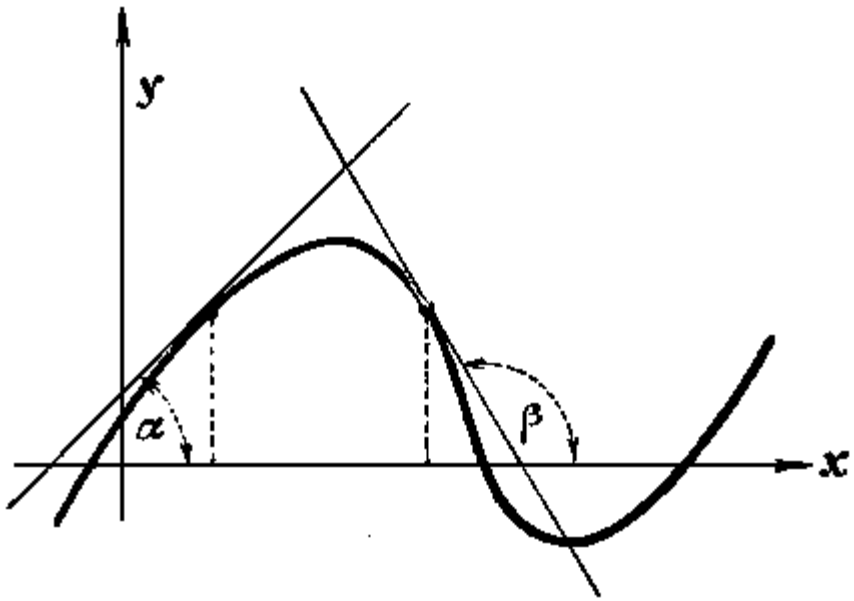
Илюша задумался.

- А что, если сделать так. Например, надо провести касательную к данной точке параболы. Я начерчу окружность, очень похожую на параболу на этом ее кусочке, вроде тех кругов, которыми Коникос мерил кривизну. А к окружности касательную провести ничего не стоит.

- Представь себе, что и мысль Декарта шла примерно таким

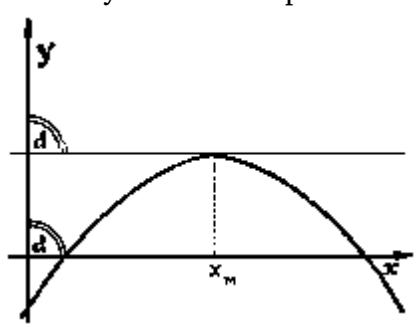
же образом. Нужно тебе сказать, что и до Декарта математики проводили касательные к различным кривым, но только у них не было общего правила для этого. Перпендикуляр к касательной, как мы уже говорили в Схолии Четырнадцатой, называется нормалью кривой в данной точке. Так вот Декарт и нашел общее правило для построения нормалей. А отсюда уже не так-то трудно перейти и к самим касательным.

Кривая сначала поднимается (ордината ее растет), и касательная образует с положительным направлением оси абсцисс острый угол α

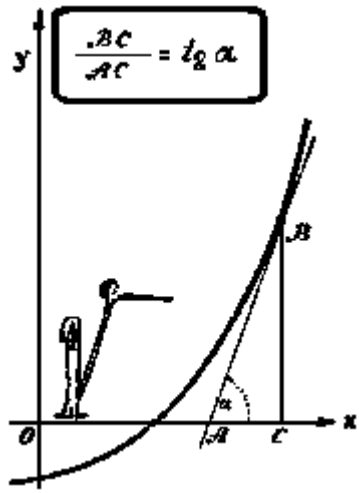


Кривая затем опускаетсся (ордината ее убывает), и касательная образует с полжительным направлением оси абсцисс тупой угол β

- Это интересно, - сказал Илюша. - Но разве это так важно - уметь провести касательную к любой кривой?



В точке, соответвтсующей x, кривая достигает максимума и касательная становится параллельной оси абсцисс.



Чем скорее растет ордината кривой, тем больше угол α и его тангенс.

- Сперва казалось, что это просто одна из трудных геометрических задач. Однако Декарт во второй книге своей "Геометрии" писал:

"Я готов даже сказать, что эта задача является самой полезной и обладает наибольшей общностью не только из тех задач, которые мне известны, но даже изо всех тех, которые мне хотелось когда бы то ни было узнать".

Кеплер в своем сочинении о стереометрии винных бочек отметил некоторые особые свойства кривых, которые тесно связаны с касательными их. Мы вот сейчас говорили о том, что у кубической параболы есть максимум и минимум. Если ты внимательно посмотришь на график этой кривой, то заметишь, что ордината этой параболы сперва растет очень скоро, а потом все медленнее и медленнее. В точке максимума ее рост прекращается, а потом начинает падать.

- Так, - сказал Илюша. - А с минимумом наоборот: падает, падает, потом останавливается в точке минимума, а потом снова начинает расти.

- Молодец! - похвалил Радикс. - Кое-как соображаешь.

Чем скорее растет ордината кривой, тем больше угол а и его тангенс.

- 334 -

- Кое-как могу, когда не очень трудно, - отвечал мальчик, - да и то потому, что ты помогаешь.

- Отчего же и не помочь человеку, если он старается разобраться в том, что ему объясняют! Ну, а теперь пораскинь-ка мозгами и ответь мне на такой вопрос: что будет делать касательная к этой кривой, если я буду строить ее для различных

точек кубической параболы и на чертеже брать эти точки одну за другой слева направо до максимума и после него?

Как будет наклонена касательная по отношению к положительному направлению оси абсцисс?

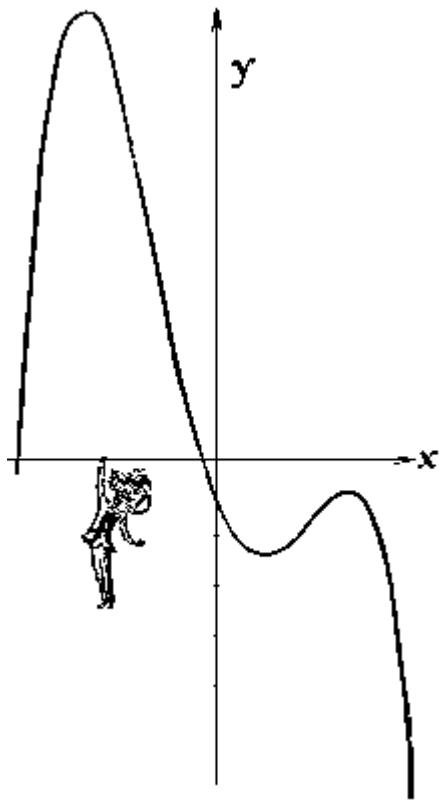
- По-моему, - сказал Илюша, - она до максимума будет наклонена в одну сторону, а после максимума - в другую.

- Это верно, - сказал Радикс, - а поточнее? Какой угол будет образовывать касательная с положительным направлением оси абсцисс, если мы продолжим касательную до пересечения с этой осью- до максимума и после него?

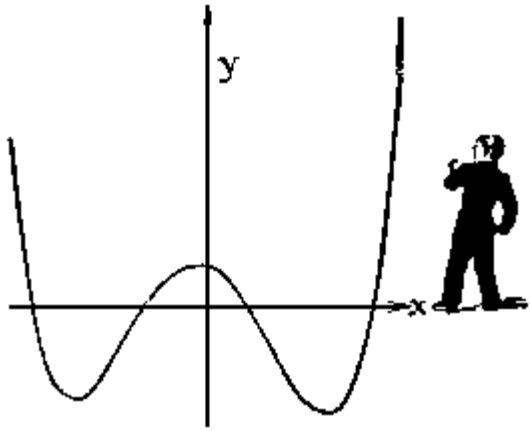
- До максимума, - ответил Илюша, - кривая поднимается, значит, верхняя часть касательной будет образовывать с положительным направлением оси абсцисс острый угол, а после максимума кривая опускается, значит, верхняя часть касательной образует с положительным направлением оси абсцисс тупой угол.

График параболы четвертого порядка.

У этой кривой два максимума и один минимум (или наоборот); она пересекает ось абсцисс дважды...



... или четырежды.



- 335 -

- Круглая пятерочка! - воскликнул Радикс. - Отвечай, юноша, что же будет с касательной в точке максимума?

- Не знаю! .. Ах да! Очень просто. Она будет параллельна оси абсцисс. Она ведь скользит по кривой и поворачивается, а в точке максимума станет совершенно горизонтально.

А потом уже повернется в другую сторону.

- А почему она поворачивается?

- Потому что ордината кривой, приближаясь к максимуму, растет все медленнее, а потом, после максимума, сейчас же начинает уменьшаться.

- Молодчага! - сказал Радикс. - Вот тебе и ясно, какая польза от касательной. Она показывает, как изменяется скорость роста ординат кривой, указывает, где находится максимум или минимум. При ее помощи можно решать задачи на нахождение максимумов, имеющих очень большое значение в технике. Как сделать из данного куска железа цилиндр наибольшей вместимости? Как сделать брус, который обладал бы наибольшей прочностью? Все эти задачи решаются при помощи метода касательных. А чтобы все было проще и ясней, мы просто будем рассматривать угол, который касательная образует с положительным направлением оси абсцисс, и характеризовать его при помощи его тангенса. Мы всегда можем построить прямоугольный треугольник, где отрезки, параллельные осям координат, будут катетами и гипотенуза будет направлена по касательной. Этот треугольник впервые был построен Архимедом при изучении спиралей, а затем после Паскаля и Барроу (ко времени Ньютона) он стал важным орудием анализа и сыграл немалую роль в развитии математики. Отношение катетов этого треугольника и будет искомым тангенсом угла наклона касательной к положительному направлению оси абсцисс.

- Вот уж не подумаешь сразу, что касательная такая полезная

линия! - сказал Илюша. - А греки знали об этом?

- И Архимед и Аполлоний Пергейский, вероятно, понимали это. Но раскрылось в подробностях все гораздо позже.

Теперь припомним, как шло дело дальше. Греческая наука замирает. После падения Рима ей не только не помогают, а с ней борются. Монахи уверяют, что надо жить не рассудком, а верой, и в силу этого добираться до тайн природы грешно. Надо смотреть на природу и удивляться ее могуществу - и все!

- 336 -

А затем начетчики Византии - люди начитанные, но плохо умеющие критиковать своп собственные знания, постепенно договорились до того, что греческие математики и философы были просто говоруны, а не ученые. Этим начетчикам трудно было пользоваться научными завоеваниями Древней Греции: они не знали, что с ними делать. Древние рукописи еще переписывались, по на этом дело, по-видимому, и кончалось. Затем у арабов все как бы начинается заново. Они изучают древних греков, а также первоначальную алгебру Индии. Арабы понемногу продвигаются вперед в том деле, которое начал Архимед.

Если Архимед сумел вычислить площадь параболы, то один из арабских ученых, математик и астроном Ибн-Альхайтам, живший в начале одиннадцатого века нашей эры, нашел площадь кубической параболы и параболы четвертого порядка, с которой ты немного знаком по биквадратным уравнениям. Кое-что из арабских математических сочинений постепенно просачивается в Европу. Некоторые предприимчивые европейцы даже ухитряются попадать в арабские университеты, как, например, А Кордову в Испании, хотя это была опасная штука и студент-христианин рисковал головой в мавританском университете. Во время крестовых походов влияние арабской науки, стоявшей значительно выше европейской, еще усиливается.

Народы Европы начали сомневаться в могуществе церкви, которая подняла все их страны на бесполезные войны. Некоторые люди открыто говорили, что если арабы сильнее европейцев, то, значит, и культура их выше. А так как культурными людьми в то время были преимущественно клирики, то есть люди из духовенства, то в Европе начали раздаваться голоса, утверждавшие, что, может быть, и религия арабов лучше христианской. Это привело церковников в ужас, и они всеми возможными средствами стали бороться с арабской культурой.

И тормозить всякую научную работу. Дошло до того, что Парижский университет однажды постановил, что тот, кто публично противопоставляет Аристотеля, переделанного

католическим духовенством на свой лад, арабским ученым и соглашается с ними, достоин смертной казни. Просто и ясно! Но все-таки люди думали и понемножку работали. А затем арабские халифаты пали под ударами новых завоевателей - монголов и турок. И вот, когда пала Византия, то беженцы-греки, как мы уже тебе говорили, привезли в Италию целый ряд драгоценных сочинений греческих математиков и философов. Сочинения эти стали переводить, изучать и печатать. А это оказалось мощным толчком для всей европейской науки. И, преодолевая чудовищные препятствия схоластических и церковных бредней, к семнадцатому веку наконец появились замечательные работы великого Галилея. Его современник Кеплер изучал по методу Архимеда площади и объемы криволинейных фигур.

Кеплер первый ввел в астрономию сперва овальную линию, о которой он узнал из работ живописца Альбрехта Дюрера, а затем конические сечения, выяснив, что Земля ходит по эллипсу вокруг Солнца, находящегося в одной замечательной точке внутри эллипса. Это показало людям науки, что геометрические законы вплотную примыкают к законам природы. Понимаешь, как это было важно! А Галилеи начал изучать законы падения тел, то есть законы движения. И затем, после долгих и очень трудных опытов с наклонной плоскостью, ему удалось показать, что брошенный камень, стрела, выпущенная из лука, пуля, которая вылетает из пищали или мушкета, и струя воды из бочки или фонтана движутся тоже по одному из конических сечений, а именно по параболе. Таким образом, конические сечения из геометрии попали в астрономию и механику с великой пользой для этих последних. Ты уже слышал, как церковь расправилась с Галилеем. Сочинения Кеплера тоже были признаны греховными и "богопротивными", и добропорядочным католикам было воспрещено их читать под угрозой "отлучения от церкви", а это наказание в то время обозначало потерю всех гражданских прав. Но как ни бились монахи, на какие чудовищные жестокости они ни решались, ничто не могло остановить движения науки вперед. Когда люди увидели, что математика помогает и в механике и в астрономии, они постепенно перестали верить монахам, и те начали неохотно и осторожно, но все-таки отступать. Теперь, я думаю, ты понимаешь, что когда после работ Кеплера и Галилея математики не только не стали отворачиваться от понятия движения, но вплотную занялись им, то первое, о чем им пришлось подумать, это был вопрос о скорости движения. А чтобы ты составил себе хотя бы некоторое представление о том, до чего все это было трудно, я расскажу тебе, как бились до

Галилея с вопросом о скорости. Аристотель, например, учил, что закон инерции есть закон сохранения покоя, неподвижности, и так именно и думали даже самые замечательные умы Возрождения, как, например, великий художник, механик и математик Леонардо да Винчи, Кардан и другие. Один из предшественников Галилея, Телезио, уже знал, что падение тела есть ускоренное движение, но он не пытался выяснить законы и обстоятельства этого, а просто пояснял это литературной аналогией, сравнивая падающее тело с уставшим путником, который, подходя к цели путешествия, ускоряет шаг. Мыслитель не только должен был найти в себе силы, чтобы оторваться от этих чисто словесных, а стало быть, беспомощных сравнений и аналогий, но должен был пойти по совершенно новому пути, непрестанно споря к тому же с таким крупнейшим авторитетом, каким был Аристотель. Самые споры но этим вопросам нередко заходили в тупик, ибо спорящие плохо понимали друг друга.

- 338 -

Галилея, например, упрекали в том, что он "не знает" или "не хочет знать" того, что говорили по вопросам физики древние поэты и философы, и Галилею приходилось с большим трудом втолковывать своим критикам, что он вовсе не "не знает" того, что говорили Вергилий, Лукреций или Сенека, а спорит с ними, утверждая, что они в данном случае ошибались и что это можно доказать на опыте. Но когда вопрос о скорости облекся наконец в математическую форму, то немедленно проблема изучения скорости движения в природе стала задачей изучения скорости изменения ординат кривых. Одним из первых ученых, кто занимался этим, был Торричелли. Вот почему вопрос о методе касательных приобрел такую исключительную важность.

Люди и раньше, конечно, знали, что пропорциональная зависимость между двумя величинами наблюдается не всегда.

И только работы Галилея впервые показали, как именно в случае падения осуществляется зависимость между временем и пройденным расстоянием, а кроме того, впервые был получен и точно сформулирован закон связи двух переменных величин, более сложный, чем тройное правило и пропорциональная зависимость.

- А что же тут такого? - спросил Илюша. - Не понимаю, почему нельзя рассуждать об изменении явлений, исходя из простой пропорциональности, если это всякому понятно?

- Дело не в том, что нам "понятно", - продолжал Радикс, - и какого мы "мнения" о явлениях, а в том, каковы законы этих явлений! А ведь они существуют сами по себе, мы можем только изучать их, по не навязывать явлениям наши "мнения". Мне

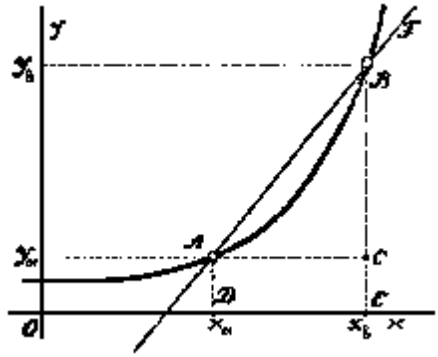
достаточно того, что я устанавливаю, что в природе имеются не только зависимости пропорционального характера. Хорошо, если ты можешь сразу ответить на вопрос "почему?". А ведь есть немало случаев, когда это не так легко сделать. Например, на лодке установлен моторчик в 1,25 лошадиной силы, и лодка идет со скоростью восемь километров в час. Можно ли утверждать, что если я поставлю на эту лодку мотор в десять сил, то лодка помчится, как скорый поезд, и будет делать шестьдесят четыре километра в час? Нет, этого утверждать нельзя. Чтобы увеличить скорость в и раз, надо мощность увеличить примерно в n^3 раз, а чтобы достичь такой скорости, придется обзавестись мотором не в десять, а в шестьсот сорок сил, тогда как десятисильный мотор даст только удвоенную скорость. Еще пример: ты без всякого труда можешь закинуть спортивный диск весом в восемьсот граммов на восемнадцать шагов.

- 339 -

Но можно ли из этого вывести, что более легкий диск, в двадцать граммов весом, ты закинешь согласно тронному правилу на семьсот двадцать шагов, то есть без малого на полкилометра? Разумеется, это сплошная ахинея, ибо такой очень легкий предмет далеко не забросишь, а уж о полкилометре смешно и говорить даже. Нередко исследователь вовсе и не задается вопросом "почему?". Очень хорошо, если он может ответить на вопрос "как?". Мы не знаем, что такое тяготение, но отлично знаем, как оно действует, и поэтому можем вычислить и траекторию артиллерийского снаряда, и толщину фундамента для большого здания, и многое другое. На этот вопрос Галилей дал совершенно точный ответ для случая падения тел. Надо еще принять во внимание то, что открытия Кеплера и Галилея связали воедино механику с геометрией, то есть как раз такие две науки, которые греки как бы противопоставляли одну другой. А вскоре выяснилось, что метод касательных имеет непосредственное отношение к бесконечно малым.

- Вот как! - сказал Илюша. - Как же это получилось?

- Дело вот в чем, - отвечал Радикс. - Давай-ка нарисуем кривую и проведем секущую. Она пересечет кривую на чертеже два раза - в точках А и Б. Дальше мы будем рассуждать так. Наша кривая связывает две величины - х и у. Их мы будем называть переменными: икс - независимой переменной, а игрек - зависимой. Ведь действительно, вспомни, как мы подставляли в уравнения различные произвольные значения икса и следили за изменением игрека. Значит, в самом деле игрек изменяется в зависимости от икса. Или, как принято говорить, игрек есть функция икса.

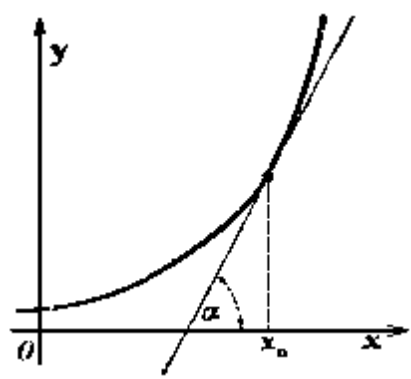


Если заставить точку B двигаться по кривой AB к точке A, то секущая ABF, поворачиваясь около точки A, будет приближаться к некоторому предельному положению, когда бесконечно малое расстояние между точками A и C обратится в нуль; в этот миг секущая превратится в касательную.

Теперь заметим, что в точке A икс равен, допустим, некоторой величине x_a, а игрек соответственно равен y_a. Теперь увеличим немного икс, то есть дадим ему некоторое приращение. Тогда икс, соответственный точке B, будет равен x_b, а игрек соответственно y_b. Приращение икса будет равно x_b-x_a; приращение игрека y_b -y_a - Проведем теперь секущую через точки A и B.

- 340 -

Если теперь поворачивать секущую около точки A по часовой стрелке, то в пределе она станет касательной. Построим треугольник ABC и рассмотрим, что с ним будет делаться, если поворачивать секущую около точки B. Очевидно, стороны треугольника убывают.



tgα называется производной "ординаты кривой по абсциссе" в точке с абсциссой x_a

Уменьшается сторона AC, а вместе с ней и сторона BC, то есть уменьшается приращение той и другой переменных и уменьшается непрерывно. В рассматриваемых здесь случаях

отношение АС и ВС стремится к некоторому пределу, а секущая занимает свое предельное положение относительно кривой, то есть становится касательной. Когда АС бесконечно уменьшается, то и ВС уменьшается таким же образом. Обе эти переменные бесконечно уменьшающиеся приращения величин суть бесконечно малые, и нам тут необходимо найти предел, к которому стремится их отношение. Очевидно, что оно будет равно тангенсу угла, который образует касательная с положительным направлением оси абсцисс. Этим вопросом занимается дифференциальное исчисление; и тангенс наклона касательной к положительному направлению оси абсцисс называется производной данной функции. Зная производную той или иной функции, узнают, с какой скоростью изменяются ординаты кривой при изменении абсцисс, и можно изучить эту скорость. А этим способом исследуют очень- многие законы физики, механики и других естественных наук. На этом фундаменте и выросла наша современная техника.

- Это замечательно! - воскликнул Илюша. - Только я не пойму: к какой кривой приводит тот или иной закон физики?

- Видишь ли, когда этим занялся Исаак Ньютон, которого современники называли "счастливейшим из смертных" за его открытие закона всемирного тяготения, то он, изучая скорость, с которой изменяются ординаты данной кривой, поставил два чрезвычайно важных и вполне естественных вопроса.

Он рассуждал так: если точка двигается с данной скоростью, это значит, что она в определенное время проходит некоторый путь. Будем называть икс временем, как это делал сам Ньютон. Тогда ординаты кривой дают нам пройденный путь.

Вот, например, если поезд идет с постоянной скоростью сорок километров в час, то за десять часов он пройдет 10-40 = 400 километров. Алгебраически это будет: скорость равна а, время равно х, пройденный путь у равен ах. Таким образом, уравнение пути будет у = ах. Это есть не что иное, как уравнение прямой линии. Если же скорость сама все время меняется пропорционально времени, то пройденный путь будет на чертеже изображаться не ординатой прямой, а ординатой параболы. Если же мы умеем построить к нашей кривой пройденного пути касательную, то тем самым можем определить скорость в каждой данной точке кривой или в любой момент времени. Таким образом, зная пройденный путь, мы находим скорость. Но можно поставить и обратную задачу; зная скорость, найти пройденный путь. Можно показать, что эта задача сводится к квадратуре кривой, то есть к определению ее площади, а это, как уже мы с

тобой говорили, есть задача интегрирования. Так вот, таким путем Ньютон и выяснил, что нахождение касательной и определение площади суть действия, обратные друг другу, как обратны, например, возведение в степень и извлечение корня.

- Так вот, оказывается, как! - воскликнул Илюша.

- Допустим, - продолжал Радикс, - что нам дано уравнение, которое показывает, какой скоростью обладает в каждый данный момент движущееся тело. Если мы сумеем сложить одну за другой все эти данные кривой моментальные скорости и получить их так называемую "начетную" кривую, то она и будет кривой пройденного пути.

Могу тебе это показать на простеньком примере. Это не будет ни дифференцирование, ни интегрирование, но нечто очень похожее на то и на другое.

Пусть некоторое тело движется с постоянным ускорением, равным двум сантиметрам в секунду, и пусть его средняя скорость в первую секунду равняется трем сантиметрам, а до этой секунды оно уже прошло один сантиметр. Требуется найти кривую пройденного пути. В таком случае нетрудно составить табличку. Кривая пройденного пути есть начетная кривая, то есть каждое число ее равно сумме всех предыдущих чисел кривой скорости, и, как легко заметить, она есть не что иное, как кривая квадратов натуральных чисел, то есть...

Секунды по порядку	Скорость	Пройденный путь
0	—	1
1	3	4
2	5	9
3	7	16
4	9	25
5	11	36
6	13	49
7	15	64
8	17	81
9	19	100
10	21	121
11	23	144

- Парабола! - ответил Илюша.

- Правильно! А наша кривая скоростей - это что, по-твоему?

- Это кривая нечетных чисел, то есть прямая.

- Верно!

- Я уже знаю, - продолжал Илюша, - что если складывать

нечетные числа одно за другим, то получатся квадраты.

- Это правило было известно еще в древнем Вавилоне.

Опираясь на него, Галилей и открыл, что падающие тела движутся по параболе.

- А если интегрировать линейную функцию, которая дает прямую, то получишь на чертеже параболу, - добавил Илюша.

- Вот и еще одно свойство параболы.

- И обратно, если искать производную от правой части уравнения, то получишь функцию, изображаемую на графике прямой линией. А что получится, если интегрировать уравнение параболы?

- Параболу третьего порядка, кубическую, и так далее.

Но мы не будем останавливаться на этом, а поговорим об открытии Ньютона. Причем принцип, о котором мы говорим, был известен еще учителю Ньютона, замечательному английскому математику Барроу, однако значение этого принципа не было еще тогда ясно. Это было одно из самых удивительных открытий в математике. Но, мало этого, в дальнейшем выяснились еще более поразительные вещи. Оказалось, что в большинстве случаев закон изменения для бесконечно малых частиц кривой вообще гораздо проще, чем для конечных изменений! Кривая скоростей, как мы только что видели, проще кривой пройденного пути. В физике мы, изучая плотность неоднородного тела, из тех же соображений можем принимать, что в некотором неограниченном уменьшающемся кубике плотность эта остается постоянной. То же самое возможно при изучении распределения тепловой или электрической энергии, количества истекшей из сосуда жидкости и так далее.

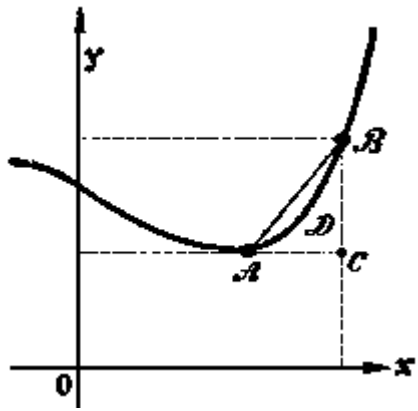
Если, например, надо вычислить длину дуги кривой, то рассматривают бесконечно малые отрезки дуги. А для бесконечно малых отрезков дуги можно считать, что на таком ничтожно малом отрезке кривая идет по прямой. А если так, то на бесконечно малом отрезке кривой строим прямоугольный треугольник, катетами которого будут бесконечно малые приращения икса и игрека, а гипотенузой - крохотный отрезок прямой, которым в бесконечно малом заменяют отрезочек дуги. Но гипотенузу прямоугольного треугольника можно получить по теореме Пифагора, а дальше надо только сложить все эти бесконечно малые гипотенузочки, и получится в пределе точная длина кривой. Опыт показывает, что это путь правильный!

Так как с первого взгляда все-таки довольно трудно понять, как это возможно, заменяя маленькую дугу отрезком прямой, прийти к правильным результатам, я приведу тебе одно очень

полезное рассуждение Ньютона, которое называют микроскопом Ньютона. Допустим, что когда мы начертим все это, то катет АС равен двадцати пяти сантиметрам.

Теперь я уменьшаю величину АС в миллион раз.

Уменьшение это касается только самого треугольничка, то есть его катетов и гипотенузы, а дуга как была, так и остается.



При вычислении длины кривой дуга ADB заменяется прямой AB, которую легко определить:

$AB = \sqrt{[(AC)^2 + (BC)^2]}$

Если уменьшать катеты треугольника ABC и считать их бесконечно малыми, то можно вычислить длину кривой, которая будет равна пределу суммы таких бесконечно малых гипотенуз.

Очевидно, что при этом точка В будет просто скользить по измеряемой дуге. Итак, я уменьшил треугольник. А теперь я опять его увеличиваю на этот раз вместе с участком дуги снова в миллион раз, и он снова равен двадцати пяти сантиметрам. Но зато сама дуга, а ведь она-то нас больше всего интересует, теперь уже гораздо больше похожа на гипотенузу. Их еле можно отличить друг от друга. И снова я уменьшаю полученный треугольник, но на этот раз в миллион миллионов раз, а затем опять увеличиваю так, чтобы катет АС был равен двадцати пяти сантиметрам. Теперь уже ясно видно, что дуга и гипотенуза слились воедино и отличить их друг от друга невозможно. Так как ясно, что этот процесс уменьшения и рассматривания в новый, еще более сильный "микроскоп" я могу повторять столько раз, сколько мне заблагорассудится, то очевидно, что мы, уменьшая размеры приращений, можем приблизиться с нашим отрезком прямой сколь угодно близко к искомой длине дуги... Теперь начинается самое значительное и самое интересное. Слушай внимательно! Если ты изучаешь некий физический закон и не можешь его из-за сложности формулировать...

В это время сзади Илюши раздалось робкое, однако настойчивое покашливание. Мальчик обернулся и увидел маленького старичка с бородой, в темных очках. Он вежливо приподнял шляпу и сказал:

- Надеюсь, что не помешал... Очень хотел бы... Меня зовут Зазубрилкин Фиолет Чернилыч. Я хотел поделиться с вами одним моим открытием. Очень упрощает прохождение курса алгебры и геометрии... Разрешите изложить?

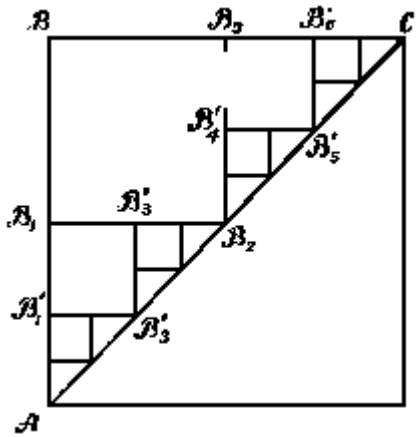
- Пожалуйста, - ответил Илюша.

- Открытие мое, конечно, пустяковое, - произнес Фиолет Чернилыч. - Мне удалось показать, что сторона квадрата совершенно рационально выражается через его диагональ, и обратно.

- Как так? - удивился Илюша.

- Я, видите ли, сам сперва удивлялся, как это выходит, по потом убедился, что так и есть. Тут дело только в том, чтобы рассудить насчет бесконечности. Конечно, это штука довольно хитрая, но. ведь все-таки длину окружности кое-как, на троечку, вычисляем, сумму уплывающей гомерической процессии тоже...

Илюша, не веря углам своим, хотел было переспросить, о какой собственно процессии идет речь. Но тут уж Фиолет Чернилыч достал из кармана мел, нарисовал квадрат, затем провел диагональ и приосанился (и в этот миг вдруг напомнил Илюше одного странного старичка, с которым он встретился в Схолии Шестой).



- Так вот-с, - начал он излагать свою теорию, - вместо того, чтобы идти от А к С по диагонали, я пойду от А к В, а от В к С. Затем от А к B_1, затем к B_2, потом к B_3, а оттуда к С. Ясно, что второй мой путь равен первому, то есть движению от А к В и затем к С. Если сторона квадрата равна единице, то этот путь равен двум. Ясно! Теперь я пойду от А к С через точки B'_1, B'_2, B'_3,

B_2, B'_4, B'_5 и B'_6.

Затем я совершу этот же путь от А к С через точки новой ступенчатой кривой, ступени которой еще вдвое меньше. Каждый раз я буду удваивать число ступенек.

- 345 -

Наконец я увеличу число ступенек до бесконечности. Очевидно, что сколько бы раз я ни увеличивал число ступеней, их сумма равна двум. А с другой стороны, эта ступенчатая кривая неограниченно близко пододвигается к диагонали. В конце концов диагональ и ступенчатая кривая сольются, когда величина каждой ступеньки станет бесконечно малой. Отсюда ясно, что длина диагонали равняется двум, а вовсе не корню из двух. Вот и все! Вот я и хотел вас спросить... как же это? ..

И вдруг Фиолет Чернилыч дернул себя за свою густейшую бородищу. К удивлению Илюши, борода медленно поползла вниз, за ней усы, багровый нос, очки и шляпа.

Перед Илюшей, гордо скрестив руки на груди, стоял не кто иной, как Уникурсал Уникурсалыч. И он снова спросил:

- Ну, что ты скажешь, о многомудрый отрок? Как насчет бесконечноватых процессов, отменяющих иррациональные числа, о синус души моей? А?

Вслед за этим Командор Ордена Семи Мостов церемонно раскланялся и расплылся в воздухе. Илюша беспомощно посмотрел на Радикса.

- Как же это так? - спросил он у своего друга жалобным голосом. - Ведь если вычислять, как он шел, например, во второй раз, то есть через точки А, В\, Вг, Вг и С, то будет два треугольника. Стороны их каждая равна половине, а диагональ будет равна:

$$\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}=\sqrt{\frac{1}{2}}$$

Если я обе эти диагонали сложу, то получу:

$$2\cdot\sqrt{\frac{1}{2}}=\sqrt{4\cdot\frac{1}{2}}=\sqrt{\frac{4}{2}}=\sqrt{2}$$

то есть все будет как надо. И, по-моему, сколько ни удваивай число ступенек, все равно так и останется. Но, с другой стороны, ведь действительно, если стороны треугольничков станут бесконечно малыми, то тогда их нельзя будет отличить от их гипотенуз и выйдет, что Уникурсал Уникурсалыч прав.

В чем же здесь дело? Мне кажется, что на сколько бы частей я ни делил величину, равную корню из двух, она от этого увеличиться не может. А выходит неведомо что!

- Н-да, - сказал Радикс усмехаясь. - А не поможет ли тебе в

беде этот самый "микроскоп Ньютона"? Ну-ка, попробуй!..

И действительно, как только Илюша вспомнил о микроскопе Ньютона, он тут же сообразил, что как ни уменьшай и как ни увеличивай чертеж Фиолета Чернилыча, ничего ни в нем, ни в открытии Пифагора измениться не может.

Илюше даже пришло в голову, что если приложить принцип Фиолета Чернилыча к измерению дуги (о чем они только что толковали с Радиксом), то придется брать не гипотенузу прямоугольного треугольника, а просто сумму катетов, что вряд ли приведет к какому бы то ни было разумному результату...

Когда он все это изложил Радиксу, тот с ним согласился, и на том обсуждение новой выдумки Доктора Четных и Нечетных и было благополучно закончено.

- Итак, вернемся! -сказал Радикс. - Допусти, как я уже тебе говорил, что ты изучаешь некоторый важный физический процесс или закон и из-за его сложности не можешь формулировать его математически. Так вот, представь себе, что нередко в таком случае ты имеешь полную возможность формулировать, как этот процесс протекает в бесконечно малом.

- В бесконечно малом? Это я что-то не понимаю!

- Возьмем пример, - отвечал Радикс. - Ньютон искал закон остывания нагретого тела. Закон этот очень важен для многих отделов науки. В частности, очень важно и для металлургов знать, с какой скоростью остывает расплавленный металл. Ньютон наблюдал это явление, делал опыты, даже сконструировал для этого первый в мире термометр - он был масляный. Ньютон видел, что температура нагретого тела падает непропорционально времени, что если нарисовать на чертеже кривую температуры остывающего тела, то получается довольно сложная кривая, уравнения которой он не знал. Тогда он решил исследовать, что происходит при небольших изменениях температуры. Другими словами, он рассматривал в свой "микроскоп" малые участки кривой, почти не отличимые от касательной. А тангенс угла наклона касательной как раз и выражает, как ты помнишь, скорость изменения ординаты в данной точке. Таким образом, Ньютон стал исследовать, с какой скоростью происходят изменения температуры в различные моменты времени. Если нанести эти значения скорости в качестве ординат на график, то получится кривая проще кривой изменения температуры. Это обстоятельство и позволило Ньютону высказать по поводу кривой скорости остывания разумную гипотезу. Ты, наверно, и сам замечал, что стакан чаю недолго бывает таким горячим, что пить нельзя, но зато теплым остается долго.

- Это верно! - сказал Илюша.

- Так вот, Ньютон, заметив все это, высказал гипотезу, что скорость остывания нагретого тела пропорциональна разности между его собственной температурой и температурой окружающей среды. Другими словами, пока тело нагрето значительно выше окружающей среды, оно стынет быстро, а когда разница между его температурой и температурой окружающей среды невелика, то и скорость остывания становится малой.

- 347 -

Когда он пришел к такому заключению, то записал эту гипотезу математически. И тогда у него получилось уравнение, в которое входила скорость изменения пока еще не известной ему кривой. Теперь следовало перейти от бесконечно малых изменений ординаты кривой к конечным изменениям. Это можно сделать с помощью того же метода интегрирования, о котором мы говорили. В результате получаем искомую кривую, то есть находим и формулируем еще один закон природы. Эти удивительные уравнения, которые сделали человека почти всемогущим, называются дифференциальными уравнениями. Вот теперь ты знаешь кое-что о том, какие поразительные чудеса может делать Величайший Змий, чье имя Интеграл. Он строит мосты и крепости, он делает самолеты и пушки, он учит, как строить динамо-машину, турбину и плотину, как построить паровоз и пароход, как сделать рентгеновский прибор, рассказывает, как построены кости нашего тела, как устроена Вселенная и что такое электрон, и так далее, и так далее! Вот во что превратились теперь труды Ньютона. А знаешь ли ты, кстати, кто вычислил, с какой быстротой должно пустить ракету, чтобы она вылетела за пределы земного притяжения? Так вот, имей в виду, что сделал это не кто иной, как Ньютон, так что Циолковский и мы с тобой его прямые наследники!

- Мне кажется, - сказал, немного помолчав, Илюша, - что я чуть-чуть разобрался в том, что ты мне рассказывал об интегрировании. Но не можешь ли ты дать какой-нибудь пример того, как это все делается на практике?

- Отчего же! - сказал Радикс. - Это не так трудно, если только у тебя хватит терпения сперва прослушать маленький рассказ насчет очень полезного предмета, который, к сожалению, слишком редко вспоминают при математических объяснениях, то есть насчет шахматной доски, или, как говорили в старину, шашечницы.

- С удовольствием, - сказал Илюша. - Я люблю играть в шахматы. Мы очень часто играем с папой, и когда он мне дает ладью вперед, так я даже и выигрываю.

- Видишь ли, - начал Радикс, - при помощи шашечницы очень удобно производить некоторые суммирования. Но только мы не будем обязательно устанавливать, сколько у нас полей на шашечнице, ибо для наших целей необязательно, чтобы их было шестьдесят четыре. Будем считать, что доска имеет и вертикальных и горизонтальных полос, а следовательно, n^2 меток. Установим сперва два способа сложения чисел, которые мы будем писать в клетках доски.

Первый способ будем называть сложением "по прямым". При этом способе мы будем складывать сперва все числа данной полосы (ну, например, если бы сложили все восемь чисел, написанных на седьмой полосе, если считать снизу), а затем сложим и все их суммы. Второй способ мы будем называть сложением "по гномонам". В этом случае мы будем поступать так: первым слагаемым будет одно число из верхней левой клетки (шахматисты называют эту клетку "a8"), вторым - сумма чисел в клетках вертикальной полосы "b" и горизонтальной полосы седьмой вплоть до их пересечения (клетка b7) и включая оное (то есть клетки b8, b7 и a7). Всего во втором слагаемом будет, значит, три клетки. Третье слагаемое состоит из пяти чисел, находящихся в клетках вертикальной полосы "c" и в клетках горизонтальной полосы шестой до их пересечения (клетка c6) и опять-таки включая оное (то есть клетки c8, c7, c6, b6 и a6).

Все остальные слагаемые составляются по тому же принципу (затем, очевидно, пойдет гномон с клеткой пересечения "d5", затем "e4" итак далее). Теперь приступим к самому счету. Начну с того, что напишу в каждой клетке по единице. Если их считать "по прямым", то в каждой полосе будет n. А полос во всей доске тоже n. Ясно, что на всей доске получится n^2. Но теперь попробуем считать "по гномонам". Получим:

1;2+ 1;3 + 2;...;n + (n-1).

Сумма всех этих чисел будет, очевидно,

$1+3 + 5 + ... +2n- 1.$

Приравнивая сумму "по прямым" сумме "по гномонам", получаю:

$1+3 + 5 + ... + 2n-1 = n^2,$

то есть сумма и нечетных чисел равна n^2. Как будто недавно мы с тобой уже встречались с этим вавилонским равенством?

- Встречались, - отвечал Илюша.

- Прелестно! -обрадовался Радикс. -Хорошо, что ты не забыл об этом. А теперь далее. Я напишу в каждой горизонтальной полосе числа от единицы до n, то есть

1, 2, 3, 4, 5, ... ,n,

и ясно, что сумма их будет равна в каждой полосе

$(n + 1)n / 2$

- 349 -

по правилу суммы арифметической прогрессии. Раз это так, то ясно, что сумма всех полос доски будет равна

$(n + 1)n^2 / 2$

Теперь рассмотрим, каковы будут суммы "по гномонам". Ясно, что сумма чисел энного гномопа будет

$n^2 + (1 + 2 + 3 + ... + n-1)$.

Эту сумму можно записать еще иначе, то есть:

$n^2 + n(n + 1) / 2$

и окончательно:

$2/3n^2 - (1/2)n$

Теперь я буду давать в этой формуле числу и значения 1, 2,3... и до n включительно. Суммы тогда будут равны по окончательному написанию:

$3/2 \cdot 1^2 - 1/2 \cdot 1$

$3/2 \cdot 2^2 - 1/2 \cdot 2$

$3/2 \cdot 3^2 - 1/2 \cdot 3$

.....

.....

$3/2 \cdot n^2 - 1/2 \cdot n$

Сложив все это столбиком, получаю для всех полос:

$3/2 \cdot S_2 - 1/2 \cdot S$

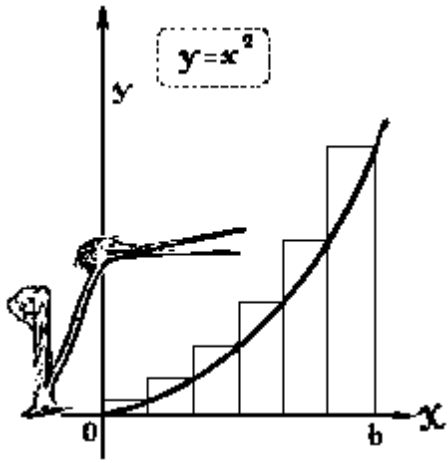
где S_2 есть сумма квадратов первых и натуральных чисел, а S - сумма их первых степеней. Приравнивая, как и ранее, сумму "по прямым" сумме "по гномонам", получаю:

$3/2 \cdot S_2 - 1/2 \cdot S = n^2(n + 1) / 2$

- 350 -

а отсюда определяю, чему равняется S2 и после ряда несложных переделок, которые, конечно, ты и сам не откажешься выполнить, получаю сумму квадратов первых и натуральных чисел, которая будет:

$S_2 = (2n + 1)(n + 1)n / 6$.



Советую тебе еще написать в клетках шашечницы пифагорову таблицу умножения и по ней найти, чему равна сумма кубов первых n чисел. Если же ты напишешь в клетках квадраты чисел пифагоровой таблицы, то сможешь найти и сумму пятых степеней. Однако нам пока это все, кроме суммы квадратов, не понадобится. Приступим теперь к вопросу об интегрировании. Допустим, что нам дана парабола, уравнение которой будет:

$y = x^2$,

и нам нужно эту функцию проинтегрировать, или найти площадь, ограниченную параболой от начала координат до точки с абсциссой b, то есть площадь, ограниченную отрезком самой параболы, отрезком оси абсцисс и ординатой в точке $x = b$.

Для этого мы сначала делим интервал (то есть отрезок абсциссы) от нуля до b на n равных частей. Длина каждой такой части будет

$h = b / n$

Вся площадь теперь разбита на трапецоиды, ширина каждого из которых равна, как уже указано, b/n, а вышину мы определяем, согласно уравнению кривой, для последовательных точек параболы, как

h^2, $h2^2h^2$, 3^2h^2, ... , n^2h^2,

ибо ясно, что если x равен h, то y будет равен h^2 и так далее.

Но если это так, то площади последовательных прямоугольников, которыми мы заменяем наши трапецоиды, будут равны

hh^2, $h2^2h^2$, $h3^2h^2$, ... hn^2h^2.

Видно, что сумма прямоугольников больше, нежели сумма трапецоидов, но при безграничном увеличении числа и искомая площадь будет пределом суммы прямоугольничков, то есть пределом следующего выражения:

$h(h^2 + 2^2h^2 + 3^2h^2 + ... + n^2h^2) = h^3(1^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2) = b^3/n^3(1^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2)$

А так как шахматная доска уже объяснила нам, что сумма первых и квадратов натурального ряда равна

$(2n + 1)(n + 1)n / 6$

то мы, подставляя это выражение в предыдущую формулу, после некоторых несложных переделок получим:

$b^3/6 (1 + 1/n)(2 + 1/n)$

Спрашивается: что будет с этим выражением, если число и будет неограниченно возрастать? Ясно, что дробь 1/n будет неограниченно приближаться к нулю и ею мы можем пренебречь.

В таком случае предыдущее выражение в пределе обратится в

$b^3/3$

что и является результатом нашего интегрирования. Знай, что это один из первых интегралов, полученных человеком, что человека этого звали Архимед и что он рассуждал примерно так, как и мы.

И тут Величайший Змии вырос снова перед ними. Он взглянул на Илюшу, и мальчику показалось, что это могущественное чудовище даже улыбнулось!

Схолия Семнадцатая,

в которой Илюша припоминает разные разности из предыдущих схолий, оставшиеся не совсем ясными, а Радикс рассказывает ему об истории надгробного камня Архимеда, погибшего от меча римского грабителя, о спирали Архимеда.

Затем следует масса любопытнейших подробностей о веретенах, о шотландском сыре, о фокусах, которые придумали древнегреческие геометры, о том, как в старину индусы решали кубические уравнения, как в шестнадцатом веке бедный мальчик-заика учился на кладбище грамоте, а также почему у квадрата такая большая площадь и что по этому поводу думает касательная; о битве за высоту над городом Клермоном. А затем Илюша присутствует при волшебном опыте, который поясняет, что такое прямая линия и какие чудеса с ней случаются при ее путешествиях в мировом пространстве. Вслед за этим Илюша и Радикс видят нечто чрезвычайно странное... Но пока это еще страшный секрет, который, может быть, раскроется в будущем...

- Ну, теперь ты доволен? - спросил Радикс.

- Да, - сказал Илюша, - я узнал массу интересных вещей. Теперь я, кажется, понимаю, почему так уважают Архимеда и как велико могущество Змия. Но только у меня есть еще вопросы.

- Ну что ж! Давай твои вопросы. Может быть, как-нибудь вдвоем разберемся.

- Помнишь, ты где-то, кажется в Схолии Одиннадцатой, перечислял мне титулы Величайшего Змия? Так вот, я хотел тебя спросить о них. О площадях я теперь понял: путем интегрирования можно получить площадь любой криволинейной фигуры. С объемами я тоже как будто сообразил. Это, вероятно, делается путем суммирования бесконечно тонких слоев тела, как Демокрит считал объем конуса?

- Правильно. А сейчас мы можем закончить вывод формулы для объема конуса, о которой мы толковали в Схолии Пятнадцатой. Если рассечь конус плоскостью, проходящей через его ось, то получится треугольник. Из рассмотрения этого треугольника ты убедишься в том, что радиус основания цилиндрика, отстоящего на расстояние h от вершины, определится при помощи пропорции:

$r/R = h/H$

где R - радиус основания, а H - высота конуса. Отсюда

$r = (R/H)h$

и площадь основания цилиндрика будет

$\pi r^2 = \pi(R^2/H^2) \cdot h^2$

Теперь предположим, что мы делим высоту конуса на n частей.

Тогда высота каждого цилиндрика будет H/n, а последовательные расстояния оснований цилиндриков от вершины конуса, то есть радиусы этих оснований, будут

h, 2h, 3h,... nh.

Поэтому сумма объемов этих цилиндриков равна

$\pi(R^2/H^2) \cdot H/h\ (h^2 + 2^2h^2 + ... + n^2h^2) = \pi R^2/H\ (1^2 + 2^2 + ... + n^2) / n^3$

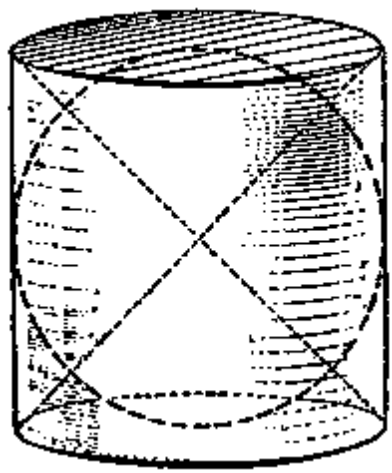
Как и в предыдущей схолии, ты убедишься, что предел последнего множителя при неограниченном возрастании n будет равен 1/3, и для объема конуса получается выражение:

$1/3\ \pi R^2 H$

Множитель 1/3 ты можешь рассматривать как лежащую на этой формуле печать Великого Змия.

- Как интересно! - сказал Илюша. - А с объемом шара можно справиться таким способом?

- Я приведу тебе только чертеж, который, по преданию, Архимед завещал вырезать на своем надгробном памятнике.



Здесь ты видишь цилиндр, вписанный в него шар радиуса R и конус. Разбей все три тела на тонкие "цилиндрические" слои и легко установишь, что на расстоянии h от центра шара площадь поперечного сечения самого шара равна:

$\pi\ (R^2 - h^2) = \pi R^2 - \pi h^2$

то есть разности площадей поперечных сечений цилиндра и конуса. Суммируя объемы всех тонких цилиндрических пластинок и переходя к пределу, как мы это делали для конуса, находим, что и объем шара тоже будет равен разности объемов

цилиндра и конуса. Этот закон и был открыт Архимедом.

Таким путем можно найти не только объем всего шара, но и объем любого шарового слоя. В формулы войдет опять множитель 1/3, печать Великого Змия, свидетельствующая о том, что здесь приходилось интегрировать функцию, содержащую квадрат переменной (в данном случае - квадрат высоты h).

- Очень хорошо! - отвечал мальчик. - А теперь вот еще что. Ты назвал Великого Змия развертывателем спиралей. Что это значит?

- Это значит, что путем интегрирования можно получить длину дуги любой кривой, например параболы, окружности и так далее. В частности, и длину спирали. Мы ведь уже говорили, как находится длина дуги.

- Но я должен сознаться, - вздохнув, сказал Илюша, - что до сих пор не пойму, как при помощи этой спирали получается длина окружности, то есть почти квадратура круга?

- Конечно, история эта необычная, - отвечал Радикс. - Из-за нее в средние века долго ломали голову над вопросом квадратуры круга и ни к какому разумному заключению не пришли. Совсем запутались. Начали даже поговаривать, что геометрия - наука, может быть, не слишком точная... Вес это довольно сложно.

- 355 -

Могу рассказать лишь о самом принципе этой работы Архимеда. Дело было так. До Византии еще дошла биография Архимеда, написанная его учеником Гераклидом. Затем она была утрачена. Но ее еще читал и изучал византийский математик Евтокий, оставивший очень ценные комментарии к сочинениям Архимеда. По словам Евтокия,

Архимед дал два решения о квадратуре, причем одно из них было приближенным...

- Двадцать две седьмых! - воскликнул Илья.

- Правильно! - отвечал Радикс. - А другое решение Архимеда было точным!

- А разве это возможно?

- Слушай меня как только можешь внимательно! Я расскажу тебе, в чем заключается принцип этой работы Архимеда. А уж потом мы постараемся рассудить, что возможно и что невозможно. Здесь вся сила в том, что Архимед, построив свою спираль, ввел в античную математику еще одну, как говорили греки, "механическую" замечательную кривую, то есть такую, свойства которой не могут быть изложены средствами, близкими к элементарной геометрии (в отличие, например, от многих, хотя и не всех свойств конических сечений). Такова и квадратриса, о

которой мы уже говорили (эти кривые называются "трансцендентными" кривыми). В силу этого сочинение Архимеда о спиралях и критиковалось в древности! И даже очень жестоко! Только уж в семнадцатом веке в Европе эта дивная работа Архимеда наконец была оценена по своему превосходному достоинству. Нужны были новые основания, новый подход к пониманию для такой кривой, и гений Архимеда нашел их. Эти новые основания и были дифференциальным подходом к изучению кривой, то есть тонким изучением скорости изменения некоторых связанных с ней отрезков. И делается это опять-таки через ту же касательную.

Этот метод восходит к методу исчерпания Евдокса, но еще сильнее его. Он просто берет, как говорится, быка за рога.

Слушай далее, и ты поймешь, в чем тут дело. Итак, самым главным в работе Архимеда была задача провести касательную к этой новой своеобразной кривой, которую он назвал спиралью. Она, как и квадратриса, построена с помощью двух движений. Первое - это вращение радиуса-вектора (именно так называется тот отрезок прямой, о котором мы уже вспоминали в Схолии Пятнадцатой; его конец чертит нашу спираль), второе - рост этого радиуса-вектора пропорционально углу, на который повернулся вектор. Длина радиуса-вектора и угол его поворота называются полярными координатами точки, являющейся концом радиуса-вектора. Догадываешься, почему эти величины можно называть координатами?

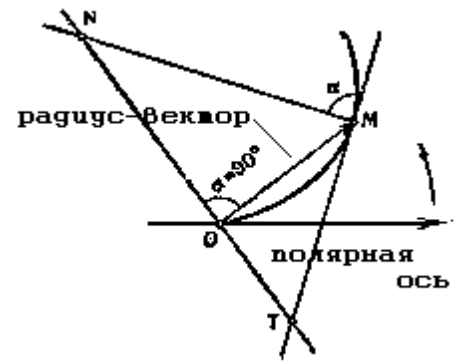
- Кажется, догадываюсь... Я думаю, что с помощью радиуса-вектора, зная его начало, то есть полюс всего этого построения, и зная угол, под которым радиус-вектор находится по отношению к полярной оси, и его длину, можно определить любую точку на плоскости. Вот и выходит, что это координаты!

- Правильно, - подтвердил Радикс, - теперь слушай дальше. Построим с тобой касательную к спирали в заданной точке, причем будем учитывать направление движения спирали, то есть либо от полярной осп против часовой стрелки, либо обратно. Первое из этих направлений мы будем считать положительным...

- Постой! - прервал его Илюша. - Например, граммофонная пластинка вращается по часовой стрелке, то есть в отрицательном направлении, а если бы мы поместили наш радиус-вектор в самую середину пластинки да еще заставили бы его обегать пластинку, начиная не с края, как обычно делается, а с серединки (где полагается находиться полюсу полярных координат), то он бы вращался в положительном направлении... Только всю музыку он сыграл бы сзади наперед! Но ведь нам сейчас это неважно. Так я

говорю?

- Ты говоришь верно. Итак, если мы построим эту касательную, а через полюс системы координат - перпендикуляр к радиусу-вектору, а другой перпендикуляр к касательной через точку касания (а этот перпендикуляр, как ты знаешь, называется "нормалью") и заметим точки m и N, в которых пересекаются с первым перпендикуляром касательная и нормаль, то отрезок OT будет полярной подкасательной, а отрезок ON - полярной поднормалью. Многие кривые могут быть полностью охарактеризованы отношениями их важнейших характеристик, то есть: касательной, нормали, подкасательной и поднормали. Закон изменения этих характеристик заключает в себе нечто постоянное, что и является смыслом и существом рассматриваемой кривой.



Так, для параболы этот закон особенно прост: если изобразить параболу в обычных декартовых координатах, но положить ее "набок", так, чтобы ось абсцисс была ее осью (см. чертеж на стр. 246 в Схолии Тринадцатой), то в таком случае поднормаль параболы (длина поднормали) есть величина постоянная. Когда надо найти поднормаль у параболы, мы проводим к ней касательную в данной точке и строим нормаль в той же точке (перпендикуляр к касательной); затем из нашей точки опускаем перпендикуляр на ось параболы (а поскольку парабола у нас лежит "на боку", то ее ось совпадает с осью абсцисс; что же до вершины параболы, то мы - можем ее поместить в самое начало координат). Теперь отрезок оси абсцисс, лежащий между концом этого перпендикуляра и пересечением нормали с осью абсцисс - и есть искомая поднормаль. Для параболы поднормаль есть величина постоянная (ты на досуге сделай чертежик и посмотри!). Подкасательная есть тоже отрезок на оси абсцисс от того же конца перпендикуляра до пересечения касательной с осью абсцисс. Отсюда ясно, как много

значат при изучении кривых касательная и все с ней связанное, ибо через нее мы получаем для кривых очень важные, точно определяющие их характеристики. Архимед, анализируя свою спираль, нашел и доказал, что и для этой кривой полярная поднормаль постоянна. Вот это было одно из замечательных открытий Архимеда. Ясно?

- Что-то я плохо понимаю, как это "постоянная"? Всегда одна и та же?

- Именно так: она всегда одна и та же и равна постоянной величине, входящей в полярное уравнение кривой. Зная уравнение кривой, мы уже знаем, чему равна длина поднормали. Слушай дальше и ты поймешь, в чем тут дело. Это особое свойство данной связи между радиусом-вектором r и полярным углом φ: если мы будем искать методами высшего анализа кривую, у которой поднормаль в полярных координатах постоянна, мы неминуемо придем к Архимедовой спирали. Это се важное свойство подобно свойствам, определяющим "геометрическое место".

- И так будет в любой точке спирали?

- Разумеется! В этом-то и вся сила, что в любой. Это основной закон Архимедовой спирали. Напишем уравнение спирали в полярных координатах так, как мы писали в Схолии Двенадцатой уравнение кривых в декартовых координатах. Мы уже знаем, что длина радиуса-вектора в данном случае прямо пропорциональна углу, на который повернулся этот вектор.

Разумеется, когда вектор пройдет целый круг, то следующий круг мы начнем считать от 360°, это будет 361° (или в радианах 2π, а затем 2π + π/180 и так далее). Назовем радиус-вектор буквой r, а угол буквой φ и напишем уравнение:

$r = \alpha\varphi$.

Это и будет самое простое уравнение спирали в полярных координатах. Чем больше угол, тем длиннее и радиус-вектор.

Пропорциональность может быть различной, поэтому в уравнении имеется коэффициент (или параметр) α.

- А что такое параметр?

- Параметр представляет собой определяющий коэффициент, характеризующий кривую. Так, например, угловой коэффициент прямой есть ее важнейший параметр.

В данном случае для нашей спирали а и есть постоянная поднормаль (или субнормаль) Архимедовой спирали. Чем он больше, тем шире и разворот спирали. Чем он меньше, тем ближе один к другому ложатся витки спирали. Он либо раздвигает, либо сдвигает спираль. Например, когда ты заводишь часы с пружиной,

то она сжимается. Полагая, что пружина в плане близка к Архимедовой спирали, ты, заводя часы, уменьшаешь ее параметр a.

- Как будто что-то я начинаю соображать, - сказал Илюша. - Это немного похоже на то, если изменять угол конуса при вершине. Конус, конечно, станет другой.

- В этом роде. А теперь мы уже подходим к концу нашего рассказа. После того как Архимед установил это замечательное свойство спирали, он нашел еще и выражение ее полярной подкасательной (субтангенса). Если уравнение спирали таково, как мы написали, то в современных обозначениях полярная подкасательная спирали будет равна $r\varphi$. Теперь если у нас некоторый угол φ_1 будет равен 2π...

- То есть если радиус-вектор обойдет целый круг?

- Именно! Тогда соответствующий этому углу радиус-вектор по нашему уравнению будет равен: $r_1 = 2\pi\alpha$, а его подкасательная по ее уравнению, которое мы только что записали, будет:

$4\pi^2 a = 2\pi r_1$,

то есть равна длине окружности, радиусом которой является радиус-вектор в конце первого витка спирали. Вот и получается при помощи геометрического построения совершенно точное определение длины окружности. Об этом и говорил византиец Евтокий Аскалонский.

Средневековые математики не разобрались в том удивительном построении, которое мы сейчас вкратце рассмотрели. То, что писал тонкий комментатор Архимеда - Евтокий об этом решении, вовсе их сбило с толку: начали даже поговаривать, что "по-видимому" сама геометрия - наука "неточная"! Их путало еще и то, что им уже было известно о существовании целого ряда приближений для определения числа π: в библии дается число 3,0; у Витрувия, римского архитектора, - 3,125 (вавилонское приближение); у самого Архимеда - 3,14... Которое из решений правильно? А спирали Архимеда вовсе не давали численного решения, что еще больше их смущало.

- Как интересно! - воскликнул Илюша. - Это напоминает случай с диагональю квадрата: построить - одна минута, а вычислить невозможно. Только со спиралью гораздо сложнее...

- Это верно. Но надо еще принять во внимание, что это не простое геометрическое построение, а такое, в которое входит "механическая кривая", для которой движение есть очень важный элемент. Многие древнегреческие математики были из-за этого не совсем довольны построением Архимеда, хотя это самый

настоящий шедевр математической изобретательности и остроумия. Однако разобрать весь ход рассуждений Архимеда, понять все его доказательства - дело не такое простое, как мой коротенький рассказ. Уникурсал Уникурсалыч тебе объяснил, как ты должен поступить. Ты понял?

- Почти... Я буду стараться...[26]

- Стоит постараться, уверяю тебя. Это замечательное сочинение Архимеда оказало огромную помощь европейским ученым, когда они начали строить высший математический анализ.

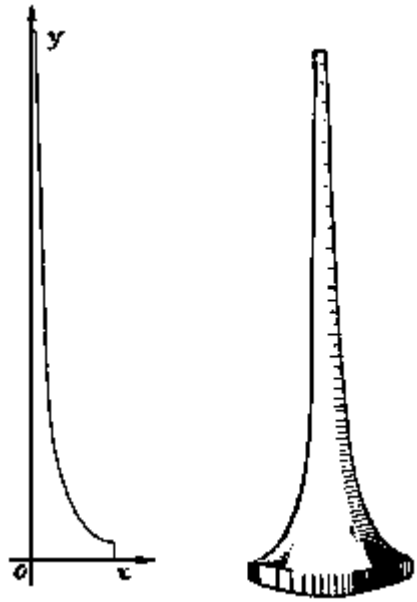
- А почему ты вспоминал про веретена и про центры тяжести?

- Центры тяжести различных тел тоже вычисляются путем интегрирования. Что же касается веретена, то это веретено Торичелли...

- Это тот самый, чья "торичеллиева пустота"?

- Тот самый. И его веретено - тело вращения, которое получается вращением кривой обратных величин вокруг оси игреков. Это было очень интересным и неожиданным открытием. Оно было сделано в одно и то же время Торичелли и замечательным математиком Бонавентурои Кавальери, чье имя тебе тоже должно быть известно. Дело в том, что вершина этого тела уходит невероятно тонкой иглой в бесконечность.

И все-таки оказалось, что объем этого бесконечно длинного тела вычислить можно, так как игла, уходя вверх, безгранично утончается, причем это утончение происходит таким образом, что уменьшение ее толщины компенсирует ее удлинение.



Если эту кривую вращать около оси игреков, то получится тело варщения, которое и будет веретеном Торичелли; игла его, безгранично утончаясь, уходит в бесконечность.

Другими словами, если бы столб воды, подымаясь, наполнял все большую и большую часть этого веретена при неограниченном увеличении его высоты, объем всего столба все-таки стремился бы к конечному пределу. Когда это вычисление было сделано, математики еще немного подвинулись вперед в вопросе о том, как быть с задачами, в которых участвует бесконечность.

- А значит, раньше они не знали, как это надо делать?

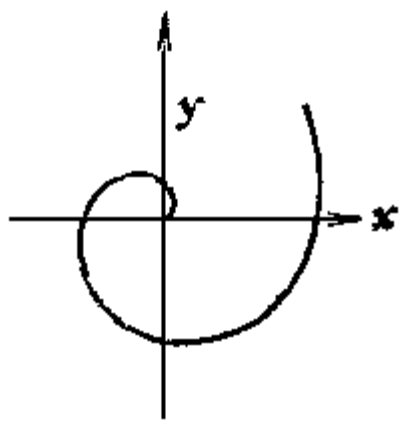
- Многие утверждали, что бесконечность вообще нечто такое, что выше человеческого понимания. Ученые всегда боролись с этим суеверным отношением к понятиям, которые ведь изобрел сам человек. Смысл этой борьбы, во-первых, в утверждении наукой, что нет такой тайны природы, которой нельзя одолеть, а во-вторых, в стремлении добиться того, чтоб самые хитрые и трудные мысли человека были не просто чудесами, а работали на пользу людей.

- Ну, а про магнитные и электрические поля я как-то слышал, что целый ряд задач из физики решается тоже таким путем?

А	Г	А	Г
1	2	11	2 048
2	4	12	4 096
3	8	13	8 192
4	16	14	16 384
5	32	15	32 768
6	64	16	65 536
7	128	17	131 072
8	256	18	262 144
9	512	19	524 288
10	1 024	20	1 048 576

- Конечно. Без того, что называется в математике анализом, то есть без дифференциалов и интегралов, вообще никакой электротехнической культуры не было бы, а тем более таких чудес, как радио, телевидение и прочее.

- Так, - сказал Ильюша, - хорошо. А теперь ты расскажи мне немножко про логарифмы. Правда, мы скоро их будем проходить, но все-таки ты расскажи. И потом, какое же они имеют отношение к гиперболе?



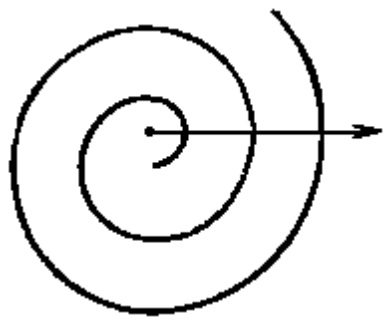
Спираль Архимеда, которая умеет делить угол на любое число

- Если взять две прогрессии и написать одну около другой - арифметическую и геометрическую, - то мы получим табличку, которая напечатана на странице 361.

Второй столбец (под буквой "Г") - это ряд степеней числа "два". А первый (под буквой "А") дает самые степени. Не правда ли?

- Конечно, - отвечал мальчик. - Два в четвертой степени будет шестнадцать, а в пятой - тридцать два. Понятно!

- Так вот, допустим, что надо умножить четыре на шестнадцать. По правилу сложения степеней, так как четыре - это два в квадрате, а шестнадцать - это два в четвертой степени, просто можно сложить эти показатели. Складывая два и четыре получаем шесть, а два в шестой степени есть шестьдесят четыре. Так как есть таблица, то нет необходимости вычислять, чему равно два в шестой степени, а просто надо найти то число, которое стоит во втором столбце рядом с цифрой "шесть" из первого столбца. Следовательно, теперь можно вместо умножения складывать. Ты находишь во втором столбце свои множители. Потом выписываешь соответственные им числа из первого столбца, складываешь их, а получив сумму, смотришь, какое число во втором столбце соответствует этой сумме. Ну-ка, попробуй сам!



Декартова равноугольная спираль. Она может заменять умножение сложением.

- 362 -

- Сейчас, - сказал Илюша. - Я буду множить 2048 на шестнадцать. Двум тысячам сорока восьми соответствует и первом столбце одиннадцать, шестнадцати соответствует в первом столбце четыре. Надо, следовательно, сложить одиннадцать и четыре. Получаю пятнадцать. Ищу пятнадцать в первом столбце, а рядом нахожу во втором столбце ответ - 32768.

Проверяю умножением... Совершенно верно!

- Ну вот это и есть принцип логарифмов. Сложение заменяет умножение, вычитание заменяет деление...

- А! Как со степенями! - воскликнул Илюша. - Значит, чтобы возвести в степень, надо умножить, а чтобы извлечь корень - разделить. Я попробую! Во-первых, деление. Например, нужно разделить 524288 на 4096. Значит, я должен вычесть из девятнадцати двенадцать. Получается семь, то есть выходит в результате деления сто двадцать восемь. Ну-ка, попробуем на бумажке. Так и есть! Теперь, во-вторых, я хочу возвести шестьдесят четыре в квадрат. Значит, надо шесть умножить на два. Получаю двенадцать, окончательный результат по таблице -

4096. Проверим!.. Точно! Теперь, в-третьих, из 65 536 я извлекаю квадратный корень. Значит, придется шестнадцать разделить на два. Получаю восемь. Выходит двести пятьдесят шесть. Ну-ка, я проверю!

Повозившись немного, Илюша извлек корень и сказал:

- Да, вот уж с корнем-то ясно, какая получается значительная экономия времени! А тут разделил на два - и все.

А если надо кубический корень извлечь? С кубическим совсем заплачешь... Впрочем, постой-ка! Ведь с этой табличкой можно, наверно, и кубический корень попробовать извлечь. Если я возьму, например, число 262144 и извлеку из него кубический корень? .. Значит, нужно восемнадцать разделить на три.

Получаю шесть. А шести соответствует число шестьдесят четыре. Проверим! Шестьдесят четыре в квадрате, как я уже выяснил, равняется 4096. Ну, а если я умножу это число еще раз на шестьдесят четыре?.. Совершенно верно. Ведь так можно, пожалуй, и четвертой степени корень извлечь? Правильно?

Извлекаю корень четвертой степени из числа 1 048 576... и получаю тридцать два. А ну-ка, проверим! Тридцать два в квадрате будет 1024, а 1 024 в квадрате - 1048576. Да это замечательный способ! А что такое основание логарифмов?

- В нашей табличке основанием будет два. Это то число, степень которого ты видишь во втором столбце. Общий принцип сопоставления двух прогрессий, арифметической и геометрической, был известен еще Архимеду. Это, конечно, не значит, что Архимед представлял себе смысл логарифмов, но для математиков нового времени его замечания могли иметь известное значение.

- Теперь я понимаю, что значит эта фраза: "Логарифм какого-нибудь числа есть показатель степени, в которую надо возвести основание, чтобы получить это число". В нашей табличке основание есть двойка, первый столбец - это логарифмы, а второй - числа. Ну, а чем же отличаются настоящие таблицы логарифмов от этой?

- Только тем, что у них основание не два, а десять.

- Так это очень просто! - вскричал Илюша.

- Несложно, если не считать того, что во втором столбце стоят не только точные степени десяти, но и все промежуточные числа, - отвечал Радикс. - А записываем мы это так:

$\log_2 32 = 5$,

то есть: "Логарифм тридцати двух при основании два равен пяти". А при основании десять тот же самый логарифм будет равен:

1,50514997831990597607,

с точностью до девятнадцатой цифры после запятой.

- А можно перейти от одного основания к другому? - спросил Илюша.

- Это нетрудно, - отвечал Радикс. - Если ты разделишь двоичный логарифм на десятичный логарифм, то получишь так называемый модуль перехода, с помощью умножения на который из любого десятичного логарифма получишь двоичный. В данном случае этот модуль будет примерно равен 3,3219. Вывести общее правило для получения модуля перехода тоже дело нехитрое. Раз ты умеешь из старого основания a получать любое число, то задача, очевидно, сводится к тому, чтобы из нового основания b получить старое основание a.

Но для этого новое основание b надо возвысить в степень с показателем...

- Логарифм a при основании b, - отвечал Илюша.

- Правильно. Значит, если возвести новое основание в степень $\log_b a$, то будет a. Ну, а если нужно получить какое-нибудь число N, в какую степень ты должен возвысить полученное число a?

- В степень, показатель которой есть логарифм этого числа N при основании a, то есть $\log_a N$.

- Так. Значит, чтобы из b получить N, нужно сначала возвысить b в степень $\log_b a$, а потом результат возвысить в степень $\log_a N$. Но при возвышении степени в степень показатели перемножаются, следовательно, можно сказать, что для получения числа N надо возвысить основание b в степень с показателем

$\log_b a \cdot \log_a N$.

Это и есть, стало быть, логарифм числа N при основании b, и ты можешь написать

$\log_b N = \log_b a \cdot \log_a N$

Значит, $\log_b a$ и есть модуль для перевода логарифмов при основании a в логарифмы при основании b. Он есть не что иное, как логарифм "старого" основания a по "новому" основанию b. Ну, а теперь попробуй сообразить, какая бы вышла таблица, если бы вместо основания "два" мы взяли основание "восемь" (см. таблицу).

- Основание увеличивается... значит, против единицы в первом столбце будет стоять теперь уж не два, а восемь... Ну, так, значит, логарифмы уменьшатся. Вот какая будет тогда табличка. И действительно, так и выходит: здесь множитель 1/3 есть логарифм "старого" основания "два" по "новому", то есть по основанию "восемь". А если бы от этой новой таблички надо было

перейти к логарифмам с основанием "два", то пришлось бы множить на три, а три и есть логарифм восьми по основанию "два".

- Правильно, юноша! Ну вот, как видишь, штука не такая хитрая. А польза от логарифмов очень большая. Представь себе, что надо извлечь из семи корень шестьдесят седьмой степени. Как ты это сделаешь? А с логарифмами это несложное дело. Взял таблицы, нашел логарифм семи, разделил его на шестьдесят семь, потом нашел опять в таблицах число, соответствующее частному от деления, - вот и готово!

- Интересно! - сказал Илюша, - А сколько будет корень шестьдесят седьмой степени из семи?

А	Г
$\frac{1}{3}$	2
$\frac{2}{3}$	4
1	8
$1\frac{1}{3}$	16
$1\frac{2}{3}$	32
2	64

- Немножко больше единицы.

- Ну да, - отвечал Илюша, - конечно, меньше единицы быть не может, потому что дробь от возведения в степень будет только уменьшаться.

Ясно! Ну, а при чем здесь гипербола?

- История довольно интересная, но немножко длинная.

Если, впрочем, тебе охота послушать, можно рассказать. Начнем с того, что возьмем гиперболу, уравнение которой будет:

$y = 1/x$

Я думаю, что ты уж встречался с ней, и не однажды. Если ее начертить, то получится хорошо известный тебе график обратной пропорциональности. Ясно, что если рассматривать гиперболу как коническое сечение, то мы получим только одну ее ветвь. Подставляя в уравнение данные, начиная с единицы, мы получим табличку. А теперь возьмем часть площади под гиперболой, которая у нас заштрихована на чертеже, - часть гиперболы, ограниченную двумя ординатами, соответствующими абсциссам "один" и "два", и осью абсцисс. Вот с этим-то небольшим кусочком гиперболы мы начнем колдовать. Как ты полагаешь, удастся ли

нам сдвинуть этот гиперболический трапецоид направо, вдоль по абсциссе так, чтобы ордината, соответствующая точке абсциссы "один", попала как раз на то место, где сейчас находится ордината, соответствующая точке абсциссы "три"?

x	y
1	$\frac{1}{1}$
2	$\frac{1}{2}$
3	$\frac{1}{3}$
4	$\frac{1}{4}$
5	$\frac{1}{5}$
6	$\frac{1}{6}$

- Хм... пока не знаю... - протянул Илюша. - Ну, посмотрим!

- Посмотрим! - посмеиваясь, согласился Радикс. - Мы ведь можем изобрести специальный прибор для рассмотрения этой проблемы. Вот он, смотри!

Перед Илюшей немедленно появился большой, немного наклонный стол, вроде витрин в музейных залах. На нем под зеркальным стеклом шли оси координат. Однако на этот раз Радикс почему-то повернул эту систему на девяносто градусов против часовой стрелки, так что теперь ось игреков пошла горизонтально налево, а ось иксов стала вверх вертикально.

Между осями проходила ветвь гиперболы, близко подходя наверху к оси иксов.

Когда мальчик пригляделся, он заметил, что это не одно стекло, а два, между которыми имеется зазор шириной в два миллиметра, для которого гипербола и ось абсцисс образуют сплошные продольные стенки. Промежуток между этими двумя стенками был сверху и снизу открыт. Радикс взял тоненькую резиновую перегородочку и вставил ее снизу в зазор против точки на оси абсцисс, отвечающей значению $x = 1$, и перегородочка стала вплотную в промежуток между осью абсцисс и гиперболой. Затем Радикс взял банку с ртутью и осторожно сверху налил ртути в зазор между гиперболой и осью абсцисс, так что ртуть заполнила промежуток между ними над перегородкой до уровня, отмеченного $x = 2$ на оси иксов.

- Вот кусочек гиперболической площади, - сказал он. - Так?

Затем Радикс осторожно передвинул резиновую перегородочку от абсциссы "1" до абсциссы "3".

Илюша внимательно посмотрел и увидел, что теперь поверхность ртути оказалась сверху против точки с абсциссой x = 6.

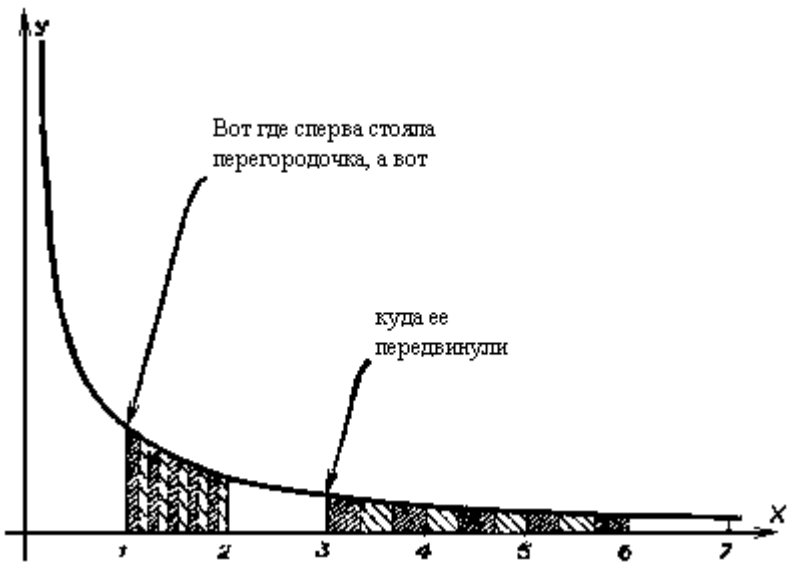
- Понятно? - спросил Радикс.

- Из одного трапецоида вышло три, - задумчиво констатировал мальчик. - Было от одного до двух, а теперь стало от трех до шести. А как это получилось, не знаю,...

Радикс махнул ручонкой, и вся ртуть немедленно исчезла.

Поглядев машинально на банку, Илюша заметил, что количество ртути в банке снова увеличилось, а сбоку прыгает одна капелька, никак не может попасть обратно в банку.

Вот как Радикс сначала поставил этот чертеж



А потом повернули обратно

- Возьмем, - сказал Радикс, - очень тонкую полоску, толщиной в долю микрона. Если взять еще тоньше, так, пожалуй, и не увидишь. Так ведь и делали математики в старое время, когда свойства бесконечно малых не были еще достаточно хорошо исследованы и обсуждены. В этом роде действовали, например, Архимед, Кеплер и Кавальери.

Это было начало возникновения анализа бесконечно малых, и при разрешении некоторых, сравнительно простых вопросов в руках крупных ученых этот несовершенный способ давал серьезные, а для тех времен даже и решающие результаты. Во всяком случае, без этих первых, робких и грубых попыток интегрировать и дифференцировать с помощью таких, как выражался Кавальерн,"неделимых" полосок вряд ли наука сумела бы создать то, чем стала математика в наше время. Итак, мы

берем такую тончайшую полоску как раз против абсциссы с пометкой "один". Впрочем, сказать по совести, мне надоело возиться с перегородкой, и я привык, чтобы ось иксов шла горизонтально. Поэтому я попрошу ртуть теперь уж без подпорок занимать полагающееся ей пространство между двумя вертикальными ординатами гиперболы.

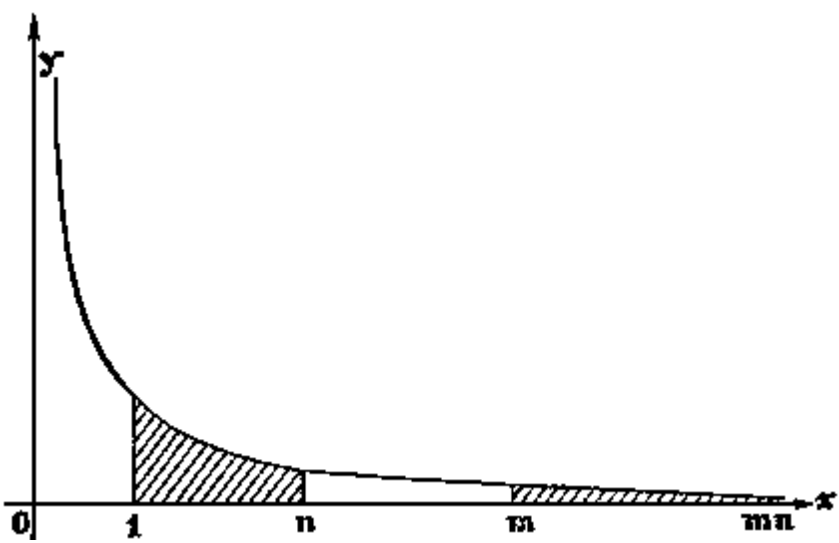
Оси послушно повернулись, а Радикс сердито глянул на банку со ртутью. Бедная капелька, которая никак не могла попасть обратно в банку, опрометью кинулась обратно к стеклянной гиперболе и немедленно растянулась против абсциссы "1" тоненькой-претоненькой блистающей серебряной ниточкой.

- Хороша "неделимая" полоска? - спросил Радикс.

- Да, - отвечал Илюша, - уж поистине "неделимая".

- Допустим! - усмехнулся Радикс. - Пусть на этот раз будет по-твоему. Это, конечно, не совсем по Кавальери... Ну, все равно, не будем уж на этот раз придираться!.. Но представь себе, что я хочу ее переместить к абсциссе с пометкой "три". Поскольку эта полоска имеет некоторую конечную толщину, хоть и очень небольшую, она, чтобы уместиться под гиперболой, должна стать короче, а самое главное - толще.

Так вот: во сколько раз она станет толще?



- Поскольку уравнение гиперболы дает для игрека величины, обратные иксу, то ясно, что для абсциссы "один" мы и ординату получаем "один", а для абсциссы "три" мы получаем "одну третью". Опираясь на уравнение гиперболы, я утверждаю, что наша полоска должна, если ее перенести от абсциссы "один" к абсциссе "три", стать толще в три раза, ибо одна треть в три раза меньше единицы. По-моему, иначе быть не может.

Немедленно тончайшая ртутная ниточка сложилась втрое и быстро двинулась направо.

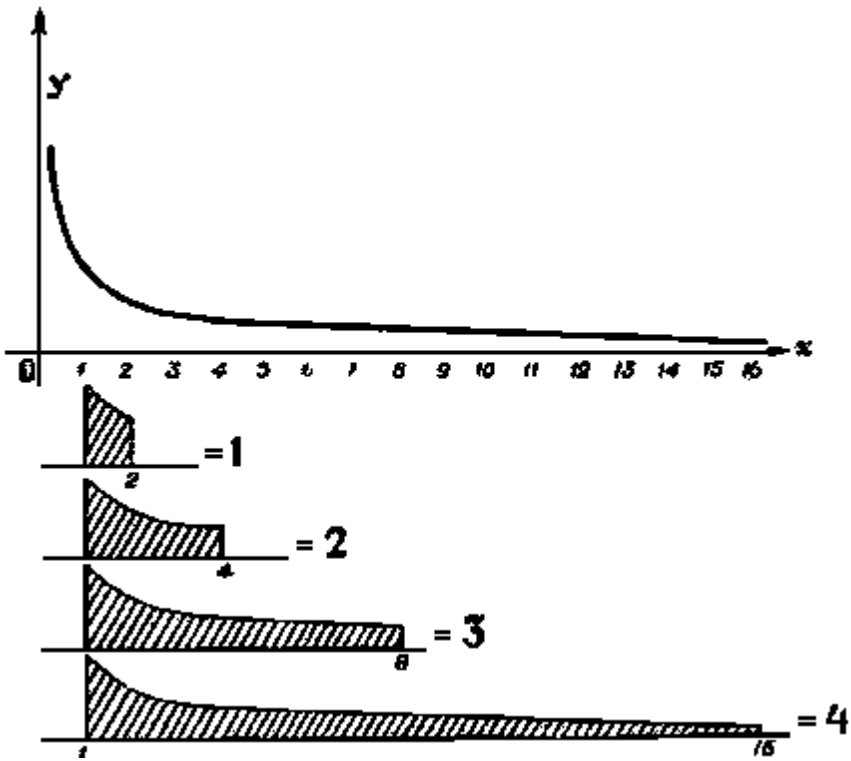
Действительно, когда она добралась до абсциссы "три", она стала той длины, какой в этом месте была ордината гиперболы.

- 368 -

- Ясно, - сказал Илюша.

- А далее, - спросил Радикс, - если взять еще одну тончайшую полоску, которая будет стоять рядом с первой, то с ней что будет?

- Я не могу сообразить сразу, как это будет, - отвечал мальчик, - но мне кажется, что если бы мы взяли целый полк тончайших полосок и стали их так перемещать...



Площадь.

- А ведь когда я перемещал целый трапецоид, я именно это и делал! - заметил Радикс.

- Ах да! - спохватился Илюша. - Разумеется. Но я уж буду пока по-своему рассуждать Итак, ты перемещаешь, скажем, две полоски, они стоят рядом... а стало быть, если первая, сложившись втрое, попадет в абсциссу "три", то ведь и вторая полоска очутится на расстоянии втрое более дальнем, а следовательно, и ей придется сложиться опять-таки втрое. А если это так, то очевидно, что и любая (то есть третья, четвертая, пятая и так далее) полоска тоже должна будет потолстеть при таком

перемещении ровно втрое. А тогда и все они вместе, то есть вся площадь трапецоида, тоже должны будут стать втрое толще. И теперь понятно, почему ртуть заняла площадь от "трех" до "шести" по абсциссе.

- Превосходно! - ответствовал Радикс- Ну, а скажи мне, что будет, если я возьму площадку от икса, равного единице, до икса, равного некоторому n, и перенесу ее опять направо, так, чтобы ее начало совпадало с иксом, равным какому-то m?

- 369 -

- Придется растянуть всю эту площадку в m раз. И она тогда займет расстояние по абсциссе от m до mn.

- Итак, - продолжал Радикс, - допустим теперь, что я возьму одну площадочку от "один" по абсциссе до "два".

И теперь я хочу к ней пристроить сбоку, справа, еще одну точно такую же, то есть удвоить мою площадку. Затем, когда я пристрою вторую, я захочу пристроить третью, снова той же самой величины, то есть утроить первоначальную площадку.

Затем пристрою четвертую, пятую и так далее. И все они должны быть равновеликими. Ну, что из этого получится?

Илюша задумался на минутку, а потом сказал так:

- А может, мне снова поможет наше рассуждение со ртутью? Если трапецоид перенести от абсциссы "один" к абсциссе "два", то ясно, что он растянется вдвое. Следовательно, и вторая пристраиваемая площадочка будет длинней по абсциссе, то есть продолжится от абсциссы "два" до абсциссы "четыре". Третья пристраиваемая площадка будет вдвое длиннее второй и займет место до абсциссы "восемь", а четвертая - вдвое длинней третьей, пятая - вдвое против четвертой и так далее. Значит, если начинать всегда от абсциссы "один" и брать первоначальную площадку, кончающуюся у абсциссы "два", то площадка, вдвое большая по площади, кончится у абсциссы "четыре", вчетверо большая по площади - у абсциссы "шестнадцать", впятеро большая - у абсциссы "тридцать два", и так далее, и так далее. Да ведь это выходит геометрическая прогрессия, раз каждая площадка вдвое длинней по абсциссе. Вот в чем дело! Площади в арифметической прогрессии, конечные абсциссы - в геометрической.

- Тебе ясно, какая у гиперболы связь с логарифмами?

- Да, - ответил Илюша.

- Если последовательно рассматривать абсциссы "два", "четыре", "восемь", "шестнадцать", "тридцать два"... идущие в геометрической прогрессии, и вычислять площади соответствующих гиперболических трапеций, начинающихся от абсциссы $x = 1$, причем единицей для измерения площадей будет площадь первой гиперболической трапеции от $x = 1$ до $x = 2$, то

эти площади будут идти в арифметической прогрессии, то есть как показатели степеней числа "два", в которые надо возвести это основание, чтобы получить конечные абсциссы "два", "четыре", "восемь", "шестнадцать" и так далее. Поэтому можно сказать, что площадь каждой трапеции, измеренная указанным образом, будет равна логарифму конечной абсциссы при основании "два". Только мне не совсем понятно, почему мы взяли за единицу для измерения площадей именно эту первую гиперболическую площадку?

Ведь за единицу для площадей принимают обыкновенно площадь квадрата со стороной, равной единице длины. Не проще ли и тут взять то же самое?

- Тогда как раз и получишь логарифмы, называемые натуральными, неперовыми, или гиперболическими. Ты можешь повторить все наше рассуждение, но только за начальную площадку придется выбрать гиперболическую .трапецию, простирающуюся от абсциссы $x = 1$ на такое расстояние направо, насколько это нужно, чтобы под гиперболой получилась площадка, равновеликая квадрату со стороной "один". Ты заметишь по чертежу внизу, что такая начальная площадка должна доходить не до абсциссы x - 2, а немного дальше, приблизительно до 2,7. Эта конечная абсцисса обозначается буквой e и называется неперовым числом. Оно не менее знаменито, чем известное тебе число π.

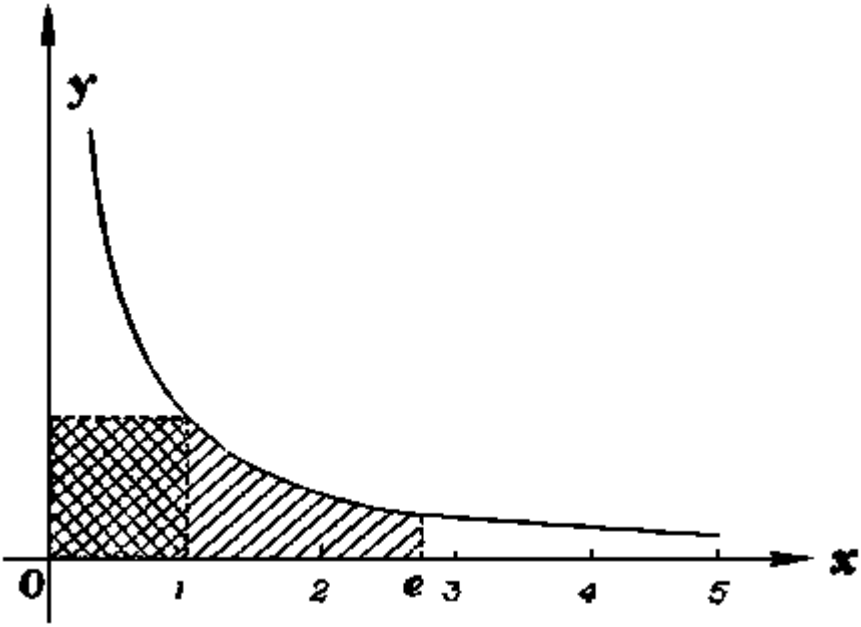
Если провести вычисление с большей точностью, то можно обнаружить, что

e = 2,71828 18284 59045 23536 0287471135 26624 99757 54692 80835 55155 05841 72...

Теперь скажи мне: что нужно сделать, если ты захочешь получить вдвое большую площадь, то есть равную двум квадратным единицам?

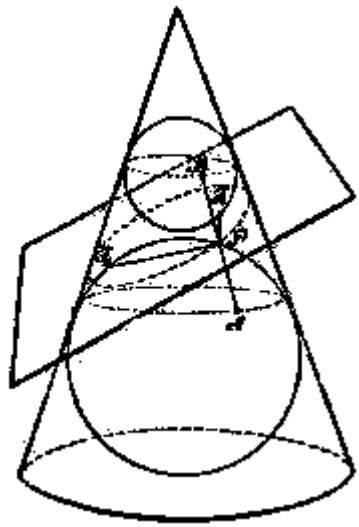
- Здесь опять все пойдет в геометрической прогрессии, - отвечал Илюша. - Если нужно перенести единичную площадь направо, откладывая ее не от $x=1$, а от $x=e$, то надо все площадочки-неделимые втиснуть в промежуток в e раз более тесный и, следовательно, расширять во столько же раз их основания.

Значит, я дойду до абсциссы $e \cdot e = e^2$. Дальше будет то же самое. Когда я дойду от $x = e$ до абсциссы $x = e^n$, наберется площадь, равная n.



- Значит, - сказал Радикс, - числа, измеряющие величины гиперболических трапеций в обычной единице меры, будут...

Логарифмами конечных абсцисс при основании e, - отвечал Илюша. - Так это ведь и есть натуральные логарифмы?



Точки A и B лежат на кругах, по которым вписанные шары соприкасаются с конусом. Ясно, что BA есть величина постоянная? А ну-ка, докажи это равенство!

$$F_1P + F_2P = BP + PA = BA$$

Кто сам докажет, того переводим без экзаменов в следующую схолию. F_1 и F_2- фокусы.

- 371 -

- Вот именно. И заметь, что это рассуждение дает нам в руки способ вычисления этих логарифмов для любых положительных чисел, что далеко не так просто сделать, если искать нужный показатель степени. Потому что вычислять с дробными степенями, как ты сам, вероятно, не раз замечал, не так уж весело. Здесь же можно просто отложить абсциссу, равную числу N, логарифм которого тебе нужен, и измерить площадь гиперболической трапеции от x = 1 до x = N.

- Но это уже будет геометрический способ. А потом как же быть с большими числами?

- На миллиметровой бумаге можно добиться довольно большой точности, а для больших чисел придется уже вычислять. Вспомни, как мы вычисляли площадь, ограниченную дугой параболы. Ты ведь и здесь можешь разбить интересующий тебя участок на большое число частей и вычислить (а не измерять непосредственно) сумму площадей соответствующих тоненьких прямоугольников. Это уже можно сделать с любой степенью точности, то есть той, какая понадобится.

Но есть и более удобные способы вычисления логарифмов.

- А какие же логарифмы применяются на самом деле, - спросил Илюша, - натуральные или какие-нибудь другие?

- Натуральные обладают целым рядом преимуществ перед остальными, и в математическом анализе применяются почти исключительно они. Но в практических вычислениях удобнее иметь дело с десятичными, для которых и составлены таблицы.

А если надо перейти от десятичных к натуральным или наоборот, то пользуются модулем перехода, о котором мы уже говорили. Чтобы получить десятичный логарифм, надо натуральный умножить на

M = 0,43429 44809 032518 276511 289189 1660508 2294397 005803 7675761 1445378 ...

- 372 -

Это число называется модулем десятичных логарифмов.

- А нельзя ли десятичные логарифмы получить тоже как площади гиперболических трапеций?

- Конечно, можно. Перемена основания соответствует, как мы уже видели, просто перемене способа измерения площадей. Если ты в качестве единицы для измерения площадей выберешь основную гиперболическую трапецию, простирающуюся от x = 1 до x = 10, то как раз и получишь десятичные логарифмы. Так как единица измерения увеличилась, то площади будут выражаться меньшими числами, то есть десятичные логарифмы будут меньше натуральных, почему и модуль их меньше единицы.

- А почему обычные логарифмы - десятичные, а не какие-нибудь другие?

- Просто потому, что мы пользуемся десятеричной системой счисления.

Древний халдей, вероятно, выбрал бы для основания не десять, а свое любимое число шестьдесят, если бы он додумался до логарифмов. А в десятеричной системе счисления сразу известны логарифмы чисел 10, 100, 1 000, 10 000 и т. д. Они равны 1, 2, 3, 4... Поэтому, умножая какое-нибудь число на десять, сто и так далее, сразу можно сказать, что десятичный логарифм этого числа увеличится на единицу, на два и прочее, а при делении будет наоборот. Это очень облегчает пользование таблицами.

Илюша помолчал минутку.

- А это что такое? - спросил доктор У. У. Уникурсальян.

- Вот что, - произнес он наконец, - мне кажется, что теперь я могу разобраться, почему при помощи логарифмов умножение заменяется сложением. Если взять гиперболическую площадку от x = 1 до x = n, то это будет логарифм числа n. Если к нему рядом приладить еще одну площадку величиной от x = 1 до x = m, то есть логарифм числа га, то, как мы уже делали раньше, придется вторую площадку растянуть от n до nm, удлинив абсциссу в m раз. Значит, тут конечные абсциссы (то есть числа) перемножаются, в то время как площади складываются.

Вот теперь мне, кажется, все ясно. Значит, одно из конических сечений имеет самое тесное отношение к

прогрессиям. Как все это связано!

- Вот эта связь различных разделов математики друг с другом и есть величайшая драгоценность нашей науки[27].

- Как интересно! - воскликнул Илюша. - А скажи, пожалуйста, когда были открыты логарифмы?

- В начале семнадцатого века Джоном Непером, шотландцем.

- А-а! - сказал Илюша. - Вот в чем дело-то! Вот при чем тут шотландский сыр!

- Конечно! Про этого Непера говорили, что он увеличил вдвое продолжительность жизни астронома, потому что с логарифмами можно насчитать вдвое больше, чем без них. Разумеется, нетрудно догадаться, что все, что мы проделали с неделимыми, можно отлично перевести и на современный язык теории пределов, стоит только вместо суммы "неделимых полосок" рассматривать предел суммы бесконечно утончающихся вписанных или описанных прямоугольничков, как мы делали уже в Схолии Пятнадцатой.

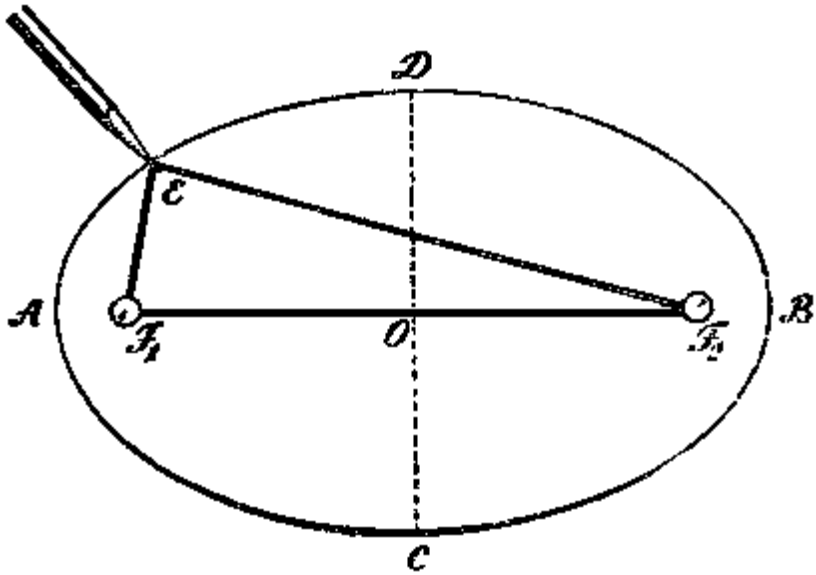
- А теперь расскажи еще про гиперболу. Греки определили параболу как геометрическое место. А гиперболу нельзя так определить?

- Можно. И гиперболу и эллипс. В эллипсе есть две весьма замечательные точки. Чтобы показать их тебе, я впишу в конус два соприкасающихся шара: один поближе к вершине конуса, другой подальше. Второй шар будет побольше, первый поменьше. Теперь я просуну между ними секущую плоскость (которая, разумеется, не имеет толщины). Оба шара будут ее касаться в одной точке, если плоскость будет лежать параллельно основанию конуса. И эта точка касания будет центром тон окружности, которая будет сечением конуса этой самой плоскостью. Теперь я начну секущую плоскость наклонять.

Так как шары ее крепко держат, то мы попросим первый шар, который поменьше, потесниться и сделаться немного меньше.

Вот как чертится эллипс.

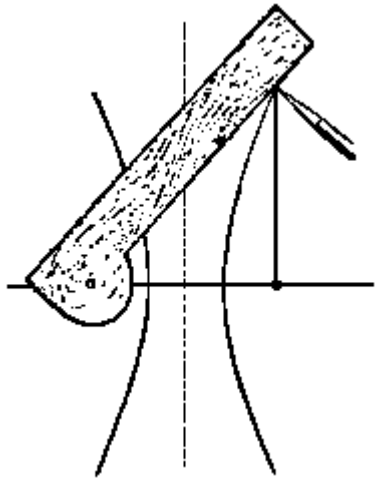
Кто скажет, в каком отношении друг к другу находятся отрезки F1E и F2E - с одной стороны, и большая ось эллипса AB -с другой? Карандаш уверяет, что стоит ему дойти до точки...



Когда таким образом нам удастся повернуть секущую плоскость под некоторым углом к основанию конуса, то сечение конуса станет уже не кругом, а эллипсом, а два шара будут касаться секущей плоскости (а тем самым и плоскости эллипса) в двух точках, а не в одной.

- 374 -

Эти две точки называются фокусами эллипса. Так вот, эллипс можно определить как геометрическое место точек, сумма расстояний которых от двух фокусов есть величина постоянная. По нашей фигуре эта постоянная равна длине общей касательной к двум шарам. Кстати сказать, не так трудно представить себе, что прямые, соединяющие фокусы с любой точкой эллипса (его радиусы-векторы), каждый раз образуют между собой некоторый угол. Так вот биссектриса этого угла как раз будет нормалью эллипса к данной точке, а следовательно, найти и касательную к эллипсу не очень сложно. В таком случае гипербола есть геометрическое место точек, разность расстояний которых от двух фокусов есть величина постоянная. Вот попробуй нарисуй чертеж с конусом и двумя шарами, при помощи которого это было бы легко доказать. Из этого нового определения эллипса получается простой способ черчения эллипса. В двух точках - фокусах - ты накалываешь на бумагу две кнопки. Потом борешь нитку и связываешь ее колечком так, чтобы вся длина этого кольца была равна расстоянию между фокусами плюс та самая постоянная сумма расстояний от точек эллипса до двух фокусов. Надеваешь эту связанную нитку на кнопки, а потом поддеваешь ее кончиком карандаша, натягиваешь и чертишь.



Вот как надо чертить гиперболу.

- 375 -

Карандаш тебе как раз вычертит эллипс. Чем ближе поставить при одной и той же нитке фокусы-кнопки, тем больше эллипс будет походить на круг.

Чем дальше их расставить, тем более продолговатым будет эллипс. Если поставить кнопки совсем рядом, а нитку взять подлинней, то эллипс трудно будет отличить от круга, то есть когда фокусы сходятся в одной точке, эллипс превращается в круг. А если ты так далеко расставишь кнопки, что нитка совсем натянется, эллипс превратится в отрезок прямой.

- Так, - отвечал Илюша. - Обязательно попробую. Эллипс ведь очень красивая фигура! Ну, а если взять не сумму расстояний до двух точек и не разность, а, например, произведение?

- Тогда получится овал или восьмерка. Эта фигура называется лемнискатой. Ее построил математик Яков Бернулли. Уравнение этой кривой будет не второго порядка, как все конические сечения, а четвертого.

- Ишь какая важная!

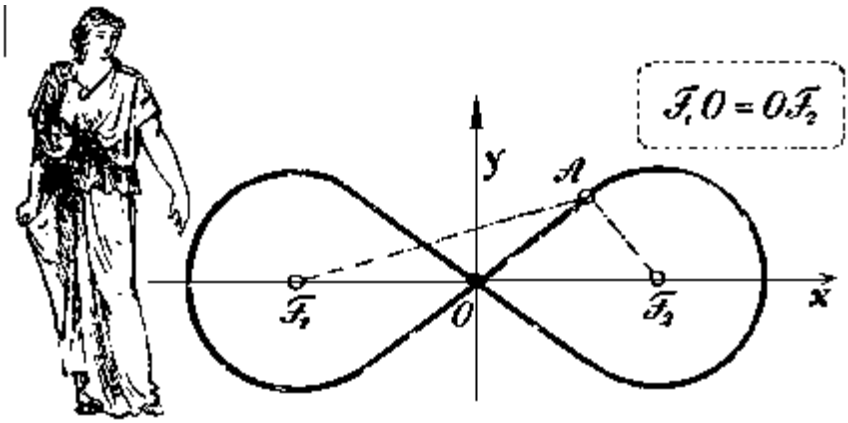
- Это еще невелика важность, - ответил, усмехнувшись, Радикс.

- А начертить параболу и гиперболу труднее, чем эллипс?

- Нет, - отвечал Радикс, - не так уж трудно. Гиперболу, можно начертить так. Возьмем линейку и закрепим ее в одном из фокусов одним концом так, чтобы она могла вращаться вокруг фокуса, как на шарнире. Гипербола определяется, как мы говорили, постоянной разностью между расстояниями от каждой ее точки до двух фокусов. Назовем эту разность 2a и расстояние между фокусами 2c, причем c всегда больше a. У эллипса, кстати сказать, будет как раз наоборот, если называть там 2a суммой

соответствующих расстояний.

Так вот, берем линейку, которая должна быть длиннее расстояния 2c, и нитку, длина которой равна длине линейки минус 2a. Один конец нитки закрепляем кнопкой в свободном фокусе (то есть не в том, в котором мы закрепили линейку), а другой ее конец прикрепляем к свободному концу линейки. Теперь, если натягивать кончиком карандаша нитку по линейке и в то же время поворачивать линейку около фокуса, карандаш начертит гиперболу.



Прошу любить да жаловать! Это сама Лемниската Яковлевна Бернулли. Основное ее свойство в том, что произведение [{F_1A) (AF_2)] есть величина постоянная, то есть площадь квадрата со стороной F_1O равна площади прямоугольника со сторонами F_1A и AF_2.

- Это я тоже вычерчу! - отвечал Илюша. - А параболу?

- А параболу чертят при помощи линейки и угольника. Ты ставишь линейку по директрисе параболы и прикладываешь к ней вплотную угольник малым катетом. Потом берешь нитку, равную по длине большому катету, и закрепляешь ее с одной стороны в фокусе параболы кнопкой, а с другой - в конце большого катета, у острого угла. Натягиваешь нить карандашом, а в то же время заставляешь малый катет угольника скользить по линейке.

- Ну хорошо, - сказал Илюша. - А как же решается уравнение третьей степени, то есть кубическое? Мы чертили график этого уравнения и находили максимум и минимум ординаты. А как найти корни?

Можно увидеть Ледшискату, если удастся достать арагонитавую либо селитрянуго пластинку и рассматривать ее в поляризованном свете.

- 377 -

- В частных случаях иногда кубическое уравнение решается довольно просто. Вот задача индусского математика Бхаскара Ачариа, жившего в двенадцатом веке нашей эры:

$x^3-6x^2+ 12x; = 35.$

Достаточно в левой части прибавить и вычесть восемь, чтобы получить точный куб:

$\{x^3 - 6x^2 + 12x -8) +8 = 35,$

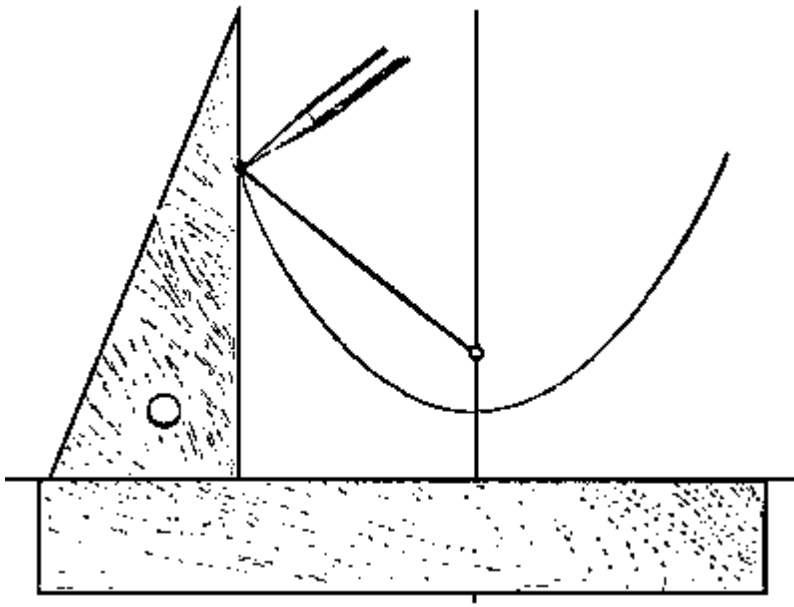
$x^3 - 6x^2 + 12x - 8 = 27;$

$(x - 2)^3 = 27;$

$x - 2 = 3; x = 5.$

Индусский математик нашел только один корень. Другие два будут комплексные, и их легко найти, выделив один из множителей нашего четырехчлена, то есть:

Вот как чертят параболу.



- 378 -

$x^3 - 6x^2 + 12x - 35 = 0;$

$x^3 - 5x^2 - x^2 + 5x + 7x - 35 = 0;$

$x^2(x - 5) - x(x - 5) + 7(x - 5) = 0;$

$(x - 5)(x^2 - x + 7) = 0.$

Затем ты приравниваешь нулю трехчлен во второй скобке и решаешь квадратное уравнение. Так мы найдем два комплексных корня. А для общего случая есть специальная формула, открытая в шестнадцатом веке итальянским математиком Тарталья, хотя ее чаще называют формулой Кардана, по имени другого математика, современника Тартальи, который ее впервые опубликовал. История этого Тартальи весьма поучительна. В начале шестнадцатого века его родной город Брешиа взяли приступом неприятельские войска. Тарталья, шестилетний мальчик, был найден с разрубленным лицом около бездыханного тела своего отца. Из-за этой раны он так и остался заикой на всю жизнь, а "тарталья" как раз и значит "заика" - это не имя его, а прозвище. Мать его после кончины отца осталась в такой нищете, что взяла своего сынишку из школы, как только он выучил азбуку до буквы "к". Но мальчик горячо любил науку и сам выучился грамоте, потом древним языкам, без которых в то время нельзя было учиться дальше, а затем овладел математикой. А ведь он был до того беден, что даже не мог купить себе бумаги для вычислений и проделывал их на плитах старого кладбища! Тем не менее он стал ученым и сделал немало для алгебры[28]. Вот какая замечательная настойчивость!

- Как наш Ломоносов!

- Правильно! - отвечал Радикс. - Великий был человек Ломоносов. И не зря он выразил уверенность, "что может собственных Платонов и быстрых разумом Невтонов Российская земля рождать".

- А почему он вспоминает Платона?

- Потому что Платон тоже занимался математикой и очень ценил ее. Из его сочинений извлечено теперь много данных о древней науке[29]. Полагают, например, что он дал определение понятию геометрического места. Добавлю, кстати, что кубическая парабола - немаловажная в технике кривая. Например, когда строители железных дорог рассчитывают поворот пути так, чтобы поезд на большой скорости плавно повернул по рельсам, то это закругление нужно рассчитывать именно по кубической параболе.

- 379 -

- Мне еще хочется узнать про максимумы, - попросил Илюша. - Это очень трудно - их определить?

- Да нет, - отвечал Радикс, - не так уж трудно. Давай возьмем пример. Допустим, имеется прямоугольник. Какие Надо взять стороны у прямоугольника, чтобы его площадь была наибольшей, если сумма этих двух сторон равна восемнадцати?

- Плохо я что-то понимаю эту задачу! - заметил Илюша.

- Ты слушай, - отвечал Радикс, - и постепенно уразумеешь. Начнем вот с чего. Пусть наши стороны-множители будут a и b, а их сумма будет c, то есть

$a + b = c$.

Теперь возьмем квадраты их суммы и разности и вычтем один из другого:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$-$$
$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$
$$----------$$
$$(a + b)^2 - (a - b)^2 = 4ab$$

Так как (a+b) равно c, то мы можем написать:

$c^2 - (a - b)^2 = 4ab$,

или так еще:

$ab - c^2/4 - (a - b)^2 / 4$

Отсюда ясно, что поскольку с есть величина постоянная, то произведение ab изменяется только в зависимости от изменения разности (a-b), но так как квадрат этой разности с минусом, то

ясно, что это произведение тем больше, чем меньше абсолютная величина разности (a-b). Следовательно, произведение двух чисел тогда достигает максимума, когда абсолютная величина их разности достигнет минимума. Тебе это ясно?

- Как будто ясно.

- Ну, поехали дальше! Давай назовем игреком искомое произведение. А части его - одна будет икс, а другая...

- А другая будет восемнадцать минус икс, - подсказал Илюша.

- Верно. Следовательно, игрек будет записан так:

$y = x(18 - x)$

Теперь возьмем разность наших множителей. Назовем ее игрек со штрихом, то есть игрек-штрих:

$y' = x - (18 - x)$

Так как мы хотим, чтобы этот игрек-штрих стал минимальным, то поищем, чему должен равняться икс, если игрек-штрих станет нулем. И напишем:

$x - (18 - x) = 0;$

$x - 18 + x = 0;$

$2x = 18; x = 9.$

Произведение достигает максимума, когда одна его часть равна девяти, а следовательно, и другая тоже равна девяти. Другими словами, максимальную площадь из всех прямоугольников с одинаковым периметром имеет квадрат. Составим табличку. В третьей графе ее стоит не самая разность, а ее абсолютная величина. Дальше девяти табличку продолжать не стоит: все будет симметрично повторяться в обратном порядке.

x	18 – x	|x – (18 --x)|	x (18 – x)
1	17	16	17
2	16	14	32
3	15	12	45
4	14	10	56
5	13	8	65
6	12	6	72
7	11	4	77
8	10	2	80
9	9	0	81

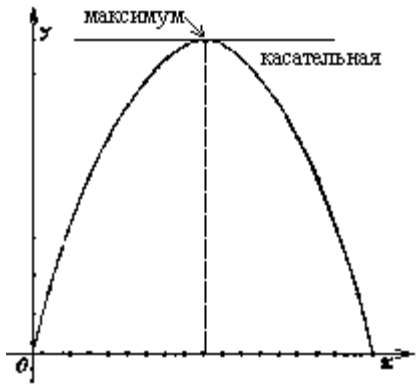
Из двух последних столбцов видно, что когда множители равны, то их разность, как и полагается, равна нулю, а произведение их становится наибольшим, то есть достигает максимума.

- Так, - сказал Илюша. - Действительно, если продолжить табличку и иксу дать значение "десять", то другой множитель будет равен восьми и произведение пойдет на убыль в обратном порядке. Действительно, максимум!

- А теперь давай начертим график нашего уравнения:

$y = 18x - x^2$

Ты видишь, что эта кривая (а это парабола!) как раз проходит через наивысшую точку, когда икс равен девяти. Что означает с геометрической точки зрения то обстоятельство, что для икса, равного девяти, игрек-штрих равен нулю? Дело в том, что игрек-штрих показывает, как меняется угловой коэффициент касательной к параболе. А ты, наверно, помнишь, что этот коэффициент равен тангенсу угла наклона касательной по отношению к положительному направлению оси абсцисс? Ты, наверное, помнишь и то, что когда кривая достигает максимума, то касательная, естественно, располагается...



- Параллельно оси иксов, то есть горизонтально! - подхватил Илюша.

- Верно! Ну, а теперь скажи мне, какой она в таком случае образует угол с осью абсцисс?

- Никакого угла она не образует!

- Никакого? .. - переспросил Радикс. - Таким образом, если тебя кто-нибудь попросит сказать, тепло ли сегодня на улице, то ты посмотришь на градусник за окном, увидишь, нуль градусов, и скажешь, что сегодня никакой температуры не наблюдается. Так я тебя понял?

- Нет, - сказал Илюша, смутившись, - конечно, так сказать нельзя. Тут я должен сказать, что угол этот заключает в себе нуль градусов.

- Как раз! - отвечал Радикс. - А теперь ответь мне, чему равен тангенс нуля градусов?

- Нулю, конечно!

- Ну, так вот игрек-штрих и дает этот самый нуль. Вот как производится изыскание максимумов или минимумов! Это одна из самых важных задач в дифференциальном исчислении. Этим делом очень много и плодотворно занимались Ферма и Паскаль.

Впрочем, задача, которую мы сейчас разбирали, была решена еще греческим математиком Никомахом во втором веке нашей эры.

- А на самом деле, когда математики ищут максимум, они тоже так поступают, как ты мне сейчас показывал, или ты это только для меня придумал?

- Так делали в старое время, во времена Ферма, например.

А сейчас это делают немножко не так. Смысл действий, впрочем, один и тот же.

- А как это теперь делается?

- Ну что ж, давай попробуем одолеть и эту премудрость.

Если мы возьмем ту же самую функцию да еще припомним то, как мы рассуждали по вопросу о превращении секущей в касательную в предыдущей схолии, то справиться с этим будет не так уж трудно. Для этого нам необходимо, как ты, вероятно, помнишь, исследовать параболу с точки зрения изменения. .. Ну-ка, скажи мне: изменения чего?

- Я думаю, - довольно бойко отвечал Илюша, - что речь пойдет об изменении скорости, с которой растет функция.

- Правильно. Итак, приступим к изучению изменения скорости изменения функции. Для этого дадим независимой переменной, то есть иксу, некое приращение, которое мы обозначим через Δx. Здесь Δ - не множитель, а заменяющая слово "приращение" прописная греческая буква "дельта", которая читается, как наше "Д". А читается формула просто: "дельта икс".

Приращение это не очень большое, не очень и маленькое, но, в общем, конечное. Теперь поскольку икс, независимая переменная, получил некое приращение (ну, допустим, что икс у нас равнялся двум, а теперь будет два и нуль-нуль-три после запятой), то, так как игрек есть переменная...

- Зависимая! - подсказал проворно Илья. - ... а следовательно, и она должна тоже... Что тоже?

- Тоже получит приращение.

- Ответ достойный. И мы назовем это приращение Ау, то есть "дельта игрек". Когда мы найдем приращения, то возьмем их отношение. Если все это изобразить на чертеже, то легко заметить, что получается тот же самый замечательный характеристический Паскалев прямоугольный треугольник, который ты видел на странице... (не спутай только этот Паскалев треугольник с другим, биномиальным Паскалевым треугольником, о котором шла речь в Схолии Седьмой!

Не забудь, что это характеристический дифференциальный треугольник, введенный впервые Архимедом!). Катетами его будут Δx и Δу, а гипотенузой будет прямая, которая рассечет

нашу кривую и которую за это самое люди добрые зовут...

- Секущей, - отвечал мальчик.

- А теперь скажи, каков смысл этого отношения?

- По-моему, это будет тангенс угла ос, - сказал Илюша.

- Несомненно. Только я тебя спрашиваю не про то, что это будет, а что это означает.

- 383 -

- Мне кажется, что этот тангенс как-то, может быть, и грубо, но все же измеряет ту же самую скорость. Я заключаю это из того, что если все построение сдвинуть по абсциссе вправо или влево, не изменяя размеров приращения икса, то наклон секущей по отношению к положительному направлению оси абсцисс, - а следовательно, и тангенс соответствующего угла, - изменится. И изменится в соответствии с изменением скорости роста нашей функции.

- Превосходно, молодой человек! Но это все же еще не совсем точно. Давай-ка вычислим, чему же равно это отношение. Пусть до приращения икс достиг значения, которое мы обозначим просто x, а соответственный игрек - аналогично тоже просто буквой y, и пусть переменные, получив и та и другая свои приращения, получат значения x1 и y1. В таком случае можно написать, что

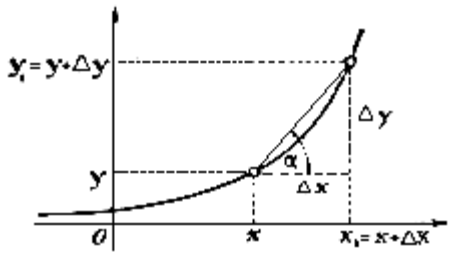
$\Delta x = x1 - x;$

$\Delta y = y1 - y = (18x1 - x1^2) - (18x - x^2),$

а следовательно, отношение их будет

$\Delta x / \Delta y = (18x1 - x1^2 - 18x + x^2) / (x1 - x)$

Вот что представляет собой тангенс наклона секущей. Ты был прав, говоря, что он измеряет скорость изменения функции. Но вот на что следует обратить внимание: а хорошо ли он ее измеряет? Ясно, что не очень хорошо, ибо его показания зависят от размера приращения независимой переменной. Это раз. Вовторых, ясно, что секущая может дать указания на скорость лишь в среднем, на измеряемом промежутке, то есть только в общем, а отнюдь не в тех важнейших подробностях, которые могут понадобиться в исследовании. И вот в силу этих двух особенностей это показание недостаточно. Что же следует сделать и как с ним поступить, дабы его коренным образом улучшить? Для этого мы начнем сближать x1 и x, тогда y1 и y также начнут сближаться. И если мы будем все уменьшать и уменьшать расстояние между x1 и x, то при безграничном уменьшении секущая... Что сделает наша секущая?



- А как ты будешь уменьшать? - спросил в свою очередь Илья, глянув на чертеж.

- Я буду придвигать x1 к x справа налево.

- 384 -

- В таком случае секущая станет поворачиваться около точки A. И в конце концов она станет не секущей, а касательной.

- Я бы только сказал не "в конце концов", а в пределе. Так! Ну, а теперь посмотрим, что получится с этим уменьшением приращений не на чертеже, а в нашей формуле отношения приращений:

$\Delta x / \Delta y = (18x1 - x1^2 - 18x + x^2) / (x1 - x)$

Дальнейшие преобразования уже несложны:

$\Delta x / \Delta y = (18x1 - x1^2 - 18x + x^2) / (x1 - x) = [18(x1 - x) - (x1^2 - x^2)] / (x1 - x) =$

$= [18(x1 - x) - (x1 - x)(x1 + x)] / (x1 - x) = 18 - (x1 + x)$

Теперь, если x1 безгранично приближается к x, а y1 тем же порядком приближается к y, то, очевидно, мы уже получаем полное право в пределе не делать отличия между x1 и x, а просто положить их равными друг другу. Тогда правая часть последней формулы превратится в

18 - 2x.

Это и будет искомая производная. А чтобы найти максимум, мы должны приравнять ее нулю, решить получившееся уравнение относительно икса - и все. Отмечу еще, что предел отношения обозначается теперь уже не через отношение дельт, а через отношение латинских d; пишется

$dy/dx = 18 - 2x$

а читается "дэ игрек по дэ икс". Но, конечно, для более сложных функций все это сделать труднее. Дифференциальное исчисление и занимается установлением формул и правил, с помощью которых можно, зная выражение y через x, найти закон "изменения скорости изменения" y, то есть найти выражение для производной dy/dx. Интегральное исчисление, как мы выяснили, занимается обратной задачей.

- Очень хорошо! - воскликнул Илюша. - Теперь еще только один вопрос. Ты обещал рассказать про гору Пюи-де-Дом и

Паскаля.

- 385 -

- Хорошо! Это происходило в то самое время, когда европейские мыслители нового времени начали деятельно и успешно бороться со схоластическим (только не путан с нашими схолиями!) мировоззрением. Схоласты старались все доказывать не опытным путем, а при помощи ссылок на авторитеты. Дело доходило до очень смешных, с нашей точки зрения, разговоров. Одни из очень видных схоластических мудрецов, например, утверждал, что чудеса, о которых рассказывают монахи, вещь вполне возможная, и ссылался при этом всерьез на поэмы римского стихотворца Овидия, который просто писал очень красивые и замысловатые сказки в стихах о волшебных превращениях[30]. А наш мудрец все это принял за чистую монету. Если так рассуждали в то время ученые-философы, то можешь себе представить, что делали люди менее образованные! Так вот, в то время единственным авторитетом в области физики признавался Аристотель. И мнения этого "великого стагирита", то есть уроженца города Стагиры, нельзя было оспаривать. Аристотель объяснял явление всасывания, которое наблюдается в насосе, тем, что "природа боится пустоты". Эта странная черта характера природы никого не удивляла, никто и не подумал найти ее причину, и дальше этого объяснения не шли. Но в семнадцатом веке, когда техника уже значительно ушла вперед и, в частности, в связи с развитием горного дела развилась техника водоотливных средств, Торичелли под влиянием Галилея произвел замечательные опыты и неожиданно для всех мудрецов нашел свою знаменитую "торичеллиеву пустоту". Паскаль повторил опыты Торичелли, но с очень важным усложнением; он делал их на разной высоте над уровнем моря, дабы обнаружить различия в давлении атмосферы на разных высотах, вполне объясняющие боязнь пустоты. Это ему удалось в полной мере. По просьбе Паскаля его шурин проделал опыты на горе Пюи-де-Дом, на сравнительно большой высоте. Паскаль так ценил эти опыты на горе Пюи-де-Дом, что придумал себе даже особенный псевдоним "Луи де Монтальт", что обозначает "Луи с Высокой Горы". Это был великий бой ученых с невежеством, и высота Пюи-де-Дом, этот Монтальт Паскаля, осталась в этой битве за нами!

- 386 -

- Ура! - закричал Илюша. - Наша взяла! А отбить они ее уже больше не могли?

- Нет! Шалишь! - отвечал Радикс. - Противник предпринимал неоднократные контратаки, но был отбит с тяжелыми потерями.

- Так им и надо! А теперь расскажи мне подробней о Галилее.

- Видишь ли, - не сразу ответил Радикс, - дело не столько в самой математике у Галилея, сколько в его прогрессивных научных стремлениях и в распространении его убеждений.

Вместо схоластических разглагольствований и бесконечных ссылок на древних, он пытался находить законы природы, определить их и математически сформулировать. Он сам говорил: "Геометрия учит нас изобретательности", то есть геометрия учит ставить физический опыт так, чтобы его результат можно было бы изложить просто, кратко и ясно при помощи математической формулы. Галилей исследовал законы падения тел. И помогли ему в этом Архимед, Аполлоний, а также и древние вавилоняне.

- Хорошо! Но ты все-таки расскажи мне пояснее об этой математической формулировке...

- Видишь ли, существует понятие о "математическом естествознании", которое в общем сводится к разысканию тех математических законов, которые и есть законы природы. Их изучение началось очень давно. Нет сомнения, что вавилонские астрономы были зачинателями этого. Правда, у них сюда еще запутывается лженаука астрология, гадание по звездам, но мы на это можем не обращать внимания. Вернемся к тому дельному и трезвому, что у них было. Это были, например, попытки с помощью некоторых математических правил выразить движение небесных тел Солнечной системы. Так как календарь для человеческого общества вещь немаловажная, то эта тема никогда от внимания ученых не ускользала. Важные попытки были сделаны и в Древней Греции. В начале нашей эры (в эллинистическую эпоху) была уже создана вполне пригодная для практики и по-своему превосходная Птолемеева система. Древнегреческая геометрия развивалась бурно, успехи у нее были необыкновенные, но приложений ее на практике было чрезвычайно мало. Ал-Хорезми, ученый-араб, даже относился к ней надменно, ибо не видел от нее практической пользы. И только ко времени эпохи Возрождения, на почве совершенно нового мира, вплотную ознакомившись с наукой древности, такие ученые, как Галилей и Коперник, смогли заново начать математическое естествознание, применив высшие завоевания древней науки к астрономии и механике. Это и определило расцвет нашей цивилизации.

Надо понимать, что математика формировалась за долгие тысячелетия из многовековых наблюдений законов природы (раньше всего астрономии), из успешных и многообразных опытов человеческой трудовой жизни (навигация, строительство,

различные ремесла, определение границ земельных участков, художества и многое другое в том же роде). Наблюдаемые или, так сказать, угаданные закономерности затем стараются привести в систему, причем довольно скоро обнаруживается, что для построения научной системы, опирающейся на одно дело (например, на землемерие), требуется одна математическая и логическая система (или дисциплина), а для другого дела (скажем, для живописи и декораций) совершенно иная, хотя обе они как бы намертво скреплены незыблемой логикой, трезвым суждением, а кроме того, постоянно, почти ежеминутно проверяются на практике. Далее стараются все, так сказать, здание некоторой логико-математической системы превратить в безукоризненно-стройное построение, опирающееся на небольшой ряд неоспоримых (нередко и недоказуемых) положений, причем зачастую различные системы (или дисциплины) понемногу врастают одна в другую и роднятся друг с другом. Затем постепенно возникают очень широкие обобщения, которые позволяют довольно сложным способом объединять эти разные дисциплины, но, разумеется, это уж такие хитрые отвлеченности, что нам с тобой пока можно о них только повздыхать!.. Так вот как оно происходит и развивается, мой юный друг. Все это совсем не так просто, но все же это дело человеческого рассудка, и постепенно со всеми этими роскошными чудесами нашей мысли можно понемногу ознакомиться и освоиться.

- А что ты скажешь о противниках Галилея?

- Ученые средних веков очень любили в своих длинных рассуждениях пускаться в разного рода сравнения (аналогии).

Им казалось, что если они сумеют удачно сравнить одно малоизвестное людям явление с другим хорошо известным, то суть первого явления станет тем самым совершенно ясной. И если они знали по какому-нибудь поводу несколько таких сравнений, особенно из высказанных древними авторами, им казалось, что они уже одолели этот вопрос целиком. Но когда надо было выяснить, как летит пуля, выпущенная из ружья, то ведь эти побасенки ничем помочь не могли. Был в Италии в старые времена такой замечательный скульптор и золотых дел мастер Бенвенуто Челлини[31]. Он участвовал в одной из тогдашних войн. В своих воспоминаниях он касается своих военных подвигов и рассказывает, как однажды успешно обстрелял из пищали неприятельских солдат навесным огнем, добавляя при этом, что достиг успеха, исключительно будучи прекрасным практиком, потому что, уверяет он, "по науке" обстрелять противника на таком расстоянии было нельзя. Почему нельзя?

- 388 -

Потому что тогда твердо верили, что, во-первых, пуля летит горизонтально, а во-вторых, что сила снаряда убывает по мере удаления от дула орудия. Поэтому, когда великий самоучка Тарталья, переводчик Евклида и Архимеда, составитель первой таблицы удельных весов, стал объяснять артиллеристам, какова траектория нули (он ее определял только приблизительно), то удивлению их не было границ. Простые и очевидные вещи проходили мимо внимания "книжников" и практиков, а всякие затейливые фантазии влекли их к себе. Тебе это понятно?

- Какие фантазии?

- Взять, например, хоть так называемые дружественные числа. Такими были, скажем, числа 220 и 284, так как каждое из них равняется сумме делителей другого. Действительно:

284 = 1 + 2 + 4 + 5 + 10 + 11 + 20 + 22 + 44 + 55 + 110;

220 = 1 + 2 + 4 + 71 + 142

Чтобы поболтать о том, что такое очень крепкая дружба и какие именно люди могут подружиться, эти числа просто незаменимы. Вот, например, какую я слышал на эту тему притчу.

Некий мудрец спрошен был, что есть дружба, и отвечал на это так: "Если бы взял я два целых числа, 284 и 220, то мне сказали бы, что они мало чем друг на друга похожи. А я бы на то ответствовал: так кажется тому, кто не хочет проникнуть вглубь своей мыслью. А мудрец через тайны счета познает, что если найти все делители, на которые делится одно из чисел без остатка, и тем путем узнать, на какие его части разъять можно, то, стожив затем все делители, я получу второе из названных чисел. А если тем же порядком разъять на части второе, то, сложив, получу первое. Вот что есть дружба! Она тогда крепка бывает, если качества одного друга в сердце другого по-иному соединяются". А вот и другая легенда о тех же числах. Жили-были два друга, и крепко они друг друга любили.

Вот одного из них и спросили: "Ценишь ли ты своего друга?"

- 389 -

Тот отвечал на это: "Ценю, ибо знаю ему цену". - "Во что же ты его ценишь?" И на это спрошенный ответил так: "Если бы я собрал воедино все, на что я готов поделиться для друга моего, то это как раз и была бы цена другу моему, и тем более она справедлива, что и он меня в ту же цену ценит". Имя первого друга есть число, которое мы можем изобразить так:

23 • 19 • 41,

а имя второго - это другое число:

25 • 199.

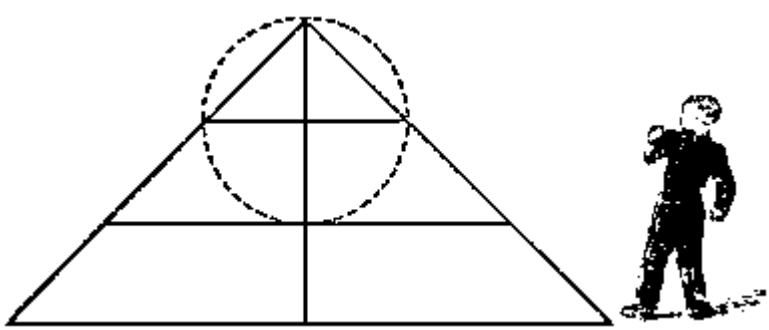
Вот какова вторая легенда. Получаются такие занимательные арифметические басенки о дружбе, но математическое содержание их ничтожно, а именно такими-то вещами и любили заниматься схоласты. Вот тебе еще две пары дружественных чисел:

I) 2620 и 2924;

II) 5020 и 5564.

- Это смешно, - ответил Илюша, - но разве такие сравнения или аналогии совсем уже никуда не годятся?

- Почему же! - отвечал Радикс. - Иные аналогии очень даже полезны, когда они что-нибудь объясняют нам. Один физик утверждал, например, что мир (то есть Вселенная) безграничен, но конечен. Чтобы не путаться, мы не станем обсуждать, прав он или нет, а разберем только одно остроумное сравнение, благодаря которому ему удалось сделать свою мысль понятной. Он начал с такого образа. Возьмем прозрачную сферу, положим ее на плоскость, которая простирается повсюду безгранично. Пусть сфера касается этой плоскости в точке S. Тогда в противоположной точке N я помещу светящуюся точку, источник света. Теперь, если я возьму маленький непрозрачный кружок и помещу его на поверхность сферы, то он будет отбрасывать, разумеется, тень на плоскость. Чем ближе я буду подвигать кружок к точке S, тем меньше будет становиться его тень. Чем ближе, наоборот, он будет подвигаться к точке N, тем быстрее и быстрее будет расти его тень на плоскости и при этом быстро удаляться от сферы, так что, когда кружок будет у самой точки N, тень уйдет в бесконечность и станет бесконечно большой. Далее: поверхность сферы ограничена, и на ней можно расположить только конечное число кружков. А если теперь изучать геометрию этих теней на плоскости, то нужно заключить, что по отношению к теням кружков эта бесконечная плоскость конечна, ибо этих теней на ней помещается ограниченное число, а именно ровно столько, сколько может поместиться кружков на сфере.



Если мне возразят, что все это неверно, ибо тени по мере

удаления от точки все растут и растут, тогда я предложу измерять тени при помощи тени какого-нибудь масштаба, который я буду передвигать опять-таки по сфере, а не по плоскости. В таком случае моему собеседнику придется согласиться со мной, что тени (этот род проекции известен был еще Клавдию Птолемею) ведут себя точь-в-точь как твердые кружки на поверхности шара. Мало этого, мы можем на основании этой модели утверждать, что легко представить себе мир, при этом трехмерный мир, построенный в этом роде, который будет безграничен, но конечен.

- Как же это так?

- Ну уж в эти подробности мы пускаться не будем, а то это нас далеко заведет. Попробуй поверить мне на слово.

- Что ж! - отвечал мальчик. - Я готов поверить...

- Вот и хорошо. Придет время, будешь учиться дальше, все постепенно одолеешь и узнаешь. Торопиться некуда. Но из приведенного примера - этот род проекции называется стереографическим - ты легко можешь понять, что если аналогия строится осторожно и обдуманно, она многое может пояснить и навести на очень дельные мысли. Но если аналогия сводится просто к сравнению, как это нередко с большим успехом делается в произведениях художественной литературы (вспомни у Лермонтова: "Терек прыгает, как львица"), то для научного познания это не только не годится, но даже в некоторой мере и опасно, потому что это может завести наше размышление в тупик, если не в заблуждение.

Научная аналогия должна быть построена очень обдуманно, и все выводы из нее должны быть рассмотрены подробно.

- Более или менее я это себе представляю, - сказал Илюша, - но иногда в науке встречаются такие странные выражения, которым, по-моему, даже никакое сравнение не поможет. В одной книжке у папы я нашел выражение "кривизна пространства" и не мог понять, что оно означает.

- Тут речь идет о геометрии мирового пространства...

- Вот как! - Илюша даже немного испугался. - Это вроде рассуждений Лобачевского о мировой геометрии?

- Да, примерно. Раз уж ты просишь меня это рассказывать, то слушай внимательно. Существует одна очень сложная теория о строении Вселенной. Эта теория утверждает, что самый свет есть нечто материальное, обладающее массой. Чтобы нам не забираться далеко, поверь мне в этом на слово.

Иначе говоря, приходится допустить, что для света существует мировое притяжение, или - гравитация. Мы обычно

представляем себе луч света как наилучший физический образ прямой линии. Натянутая нитка, сколь она ни будет тонка, в середине провисает (вспомни цепную линию из Схолии Четырнадцатой). Так вот, с точки зрения этой новой теории мы имеем основание утверждать, что если свет есть действительно нечто материальное, то он не может быть совершенно независим от гравитации. Попробуем проверить это.

Опыт ставится так: фотографируется определенный участок неба, а затем тот же самый участок фотографируют еще раз во время солнечного затмения. Участок выбирается такой, чтобы во время затмения Солнце примерно оказалось в его середине. Что же должно произойти? В силу нашей гипотезы о свете мы полагаем, что луч одной из звезд, который попадает на оба снимка, должен сместиться в том случае, когда он проходит в непосредственной близости от огромного небесного тела - Солнца. То есть Солнце окажет на него гравитационное влияние, и луч искривится. Отсюда делается вывод - наше пространство имеет обычную евклидову геометрию, которая нарушается (искривляется) в окрестностях небесных тел. Вот это явление и называется кривизной пространства[32]. Ясно или нет?

- Так, значит, это получилось развитие мыслей Лобачевского? Но ведь искривляется луч, а не пространство...

- 392 -

- Но ведь он искривляется не сам по себе, а в силу особенностей пространства. Не так ли?

- Так... Но понять все-таки трудно, - признался Илюша.

- С помощью волшебства уж как-нибудь, - пробормотал Радикс.

И немедленно перед Илюшей возникла горизонтальная, совершенно прозрачная тонкая плоскость. Она нигде не провисала. А около Радикса на полу выросла целая куча шаров разных размеров. Радикс взял один шар и положил его на плоскость, которая прогнулась под весом шара.

- Всем шарам, которые я буду класть на эту поверхность, - сказал Радикс, - я повелеваю лежать смирно на том месте, на которое я их положил.

Затем Радикс положил на поверхность еще несколько шаров поменьше, и у каждого получилась своя ямка, но ни один из них не скатывался в ямку соседа. Потом Радикс взял маленький пистолетик, зарядил его крохотной дробинкой, положил дуло пистолетика на поверхность и выпалил. Дробинка покатилась по поверхности совершенно прямо, добежала до одной из ямок, нырнула в нее, вылетела обратно... И тут Илюша заметил, что, когда дробинка вылетела из ямки, направление ее изменилось, а

путь искривился.

- Ну вот тебе в миниатюре это явление, - сказал Радикс. - Наша поверхность совершенно плоская, но там, где лежат шары, она искривляется, и прямолинейный путь по ней становится криволинейным[33].

- Теперь я как будто понимаю, - обрадовался Илюша, - и, кажется, все спросил! Даже не знаю, как мне благодарить тебя за все...

- 393 -

Тут Илюша невольно запнулся, взглянув на Радикса, и поглядел туда, куда так внимательно смотрел Радикс. На стене сиял какой-то странный чертеж, причем линии его мягко переливались разными оттенками всех цветов.

Радикс вытаращил свой глаз, поднял палец и прошептал:

- Молчи! Ты... ты удостоен...

Илюша был в полном недоумении и весь как бы превратился в вопросительный знак.

- Ты удостоен ли-це-зре-ния! - раздельно, шепотом произнес Радикс.

- 394 -

Схолия Восемнадцатая,

в которой Илюша снова встречается с Мнимием Радиксовичем, занятым работой по сооружению некоторого очень красивого и всем приятного геометрического образа. Тут Илюша узнает, что такое комплексная акробатика и какое она имеет отношение к синусам, кругам, многоугольникам, единице, корням из оной и прочее. А сверх того, Илюша в этой блестящей схолии неожиданно знакомится с удивительным Охотником (в сапогах до самых ушей!), который показывает ему самый верный и безопасный (математический!) способ охоты на львов.

Странный чертеж сиял, поднятый палец Радикса был совершенно неподвижен, а Илюша молчал, не зная, что будет дальше. Вдруг опять появится К.Т.Н. да и начнет отчитывать за то, что суешь свой нос, куда тебя не спрашивают?..

Послышались звуки какой-то знакомой нежной мелодии, и тут Илюша заметил, что это была "Колыбельная" Моцарта.

- Пошли! - тихо сказал Радикс.

Илюша очнулся.

- А что это такое? - вполголоса спросил он.

- Увидишь! - отвечал Радикс, по-видимому не склонный в эту минуту к долгим разглагольствованиям.

- 395 -

Они пошли стемневшей рощицей. Деревья тяжело и мрачно толпились кругом, но вдруг посветлело, и неожиданно они вышли к громадному зданию, чьи сумрачные башни с тяжелыми зубцами торжественно уходили ввысь, в молчаливую темноту. Высокие ворота были украшены странными узорами из чеканных шляпок громадных гвоздей, которыми были сколочены тяжелые створки. Илюша взглянул и заметил, что эти узоры ужасно похожи на разные максимумы, корни и прочие замысловатые вещи, соответственные тому чудесному миру, в котором он находился. Радикс остановился у ворот, подождал минутку, потом произнес медленно и внятно:

Пришельцы ждут ответа
У самого порога!
Откройте ж нам дорогу,
Ворота вещих теней,
Высоким повеленьем
ВОЛШЕБНОГО ДВУРОГА!

И как только он произнес это заклинание, створки ворот медленно и беззвучно раскрылись. Илюша и Радикс вошли на широкий двор, обнесенный громадными, тяжелыми стенами.

Бесконечное множество причудливо одетых гномов и карликов заполняло его. Эти маленькие существа стояли там тесными стройными рядами. Наши друзья поднялись по широким ступеням в замок. И как только они вошли в дубовые двери, к ним подлетел их старый знакомый Мнимий Радиксович.

- Очень, очень рад вас видеть, дорогие друзья! - воскликнул человечек, пожимая руки путешественникам. - А я-то думаю, куда же это вы запропастились?

- Только что усмотрели Великий Знак, - отвечал Радикс, - и сейчас же двинулись в путь.

- Ах, вот как! - сказал Мнимий. - Ну, тогда другое дело.

А мы вот только доделаем Златоиссеченную Звезду - и все готово к празднику.

- А что это за Звезда? - спросил Илюша.

- Неужели вы ее не знаете, юноша? - воскликнул, смеясь, Мнимий. - Да нет, я уверен, что вы ее много раз видели и смотрели на нее с великим удовольствием, но только вы не знали о ее золотой сущности и золотом происхождении. Эта звезда иначе называется Повергающая Неправду. Ну? Теперь догадались? Прекрасная звезда! Красавица! И грозная для врагов живой мысли и человеческого сердца! Ясно?

- Н-не совсем, - нерешительно произнес Илюша.

- Ну, если не совсем, - отвечал Мним, - тогда идемте!

Вы сейчас увидите, как она делается, и тут вы ее узнаете в единый миг. Прошу!

Они свернули в какую-то маленькую дверцу и прошли коридорчиком, пол которого был устлан красивыми ковриками, а стены расписаны самыми удивительными узорами. Точная правильность их указывала, что это не просто фантастические узоры, но и тонко геометрические. Затем они вошли в большую комнату с низкими кругловатыми сводами, где стояло нечто вроде громадного мольберта, на каких живописцы пишут свои картины, а на нем большая доска.

- Вот, - сказал Мнимий, - сейчас мы с товарищами будем здесь делать Златоиссеченную Звезду, которая повергает неправду. Дело в том, что мы великие друзья с синусами и косинусами...

- Да, вы мне об этом уже говорили, - сказал Илюша.

- А сейчас вы увидите, молодой человек, какой смысл имеет эта великая дружба. Мы сейчас попросим кого-нибудь из наших друзей нам это продемонстрировать.

Немедленно откуда-то появился человечек, ужасно похожий на Мнимия Радиксовича. Он весело раскланялся, взял мел, начертил на доске оси координат и снова очень любезно улыбнулся.

Мнимий сказал:

- Хорошо известные вам оси прямоугольных координат.

Ясно?

- 397 -

- Ясно, - отвечал Илюша.

- С маленькой разницей. То есть горизонтальную ось, ту, которая была у вас осью иксов, мы теперь будем называть действительной осью. А вертикальную, то есть ось игреков, - мнимой осью. Вы, кажется, уже встречались с одной мнимой осью? Вот вам и другая.

Новый знакомец Илюши, маленький комплексный человечек, подошел к осям, ухватился обеими руками за ту точку, где оси пересекались (то есть за так называемое начало координат), и ловко вытянулся. Носки его туфелек выгнулись, а сам он тут же превратился в стрелку. Немедленно от конца этой стрелки, то есть от его сапожков, поползли перпендикулярно к осям какие-то, как показалось Илюше, маленькие мушки. Но когда он пригляделся, то увидел, что это просто точки, из которых образовались две пунктирные линии, перпендикулярные к осям. Тогда на отрезках осей от их пересечения, то есть от нуля, до пересечения осей с этими пунктирными перпендикулярами тоже образовались две стрелочки: одна глядела направо, а другая вверх.

- Это я! - сказал комплексный человечек Наклонная Стрелка.

- А это я! - ответила Горизонтальная Стрелка.

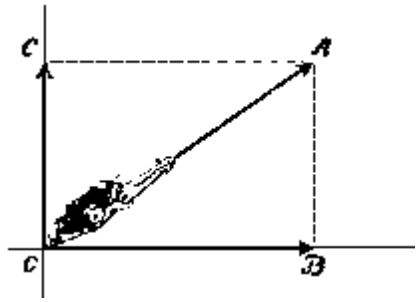
- И я! - отозвалась Вертикальная Стрелка.

- Понятно? - спросил Мнимий Радиксович.

Илюша поглядел на стрелки и не совсем уверенно сказал:

- Маленькие стрелки на осях - ведь это его проекции?

Мнимая ось.



Действительная ось.

Стрелка OA есть геометрическая сумма стрелок OB и OC, которая получается по правилу сложения сил в механике. Стрелка OA есть (a + bi); стрелка OB есть a; стрелка OC есть bi.

- Точно! - ответил Радикс.

- А кроме того, это похоже на параллелограмм сил. Выходит, что Наклонная Стрелка есть сумма тех стрелок, которые на осях?

- Или?. - важно спросил Мнимий.

Илюша молчал.

- Если, - сказал Мнимий, - Наклонная Стрелка является геометрической суммой осевых стрелок, то, следовательно, эти стрелки по отношению к Наклонной Стрелке суть...

- 398 -

- ...ее слагаемые, - отвечал Илюша. - Пожалуй, лучше сказать: ее составляющие.

- Вот это да! - отвечал Мнимий. - Так и запишем. Итак, каждый комплексный человечек может быть рассматриваем как сумма вещественной составляющей и мнимой, что нам давно известно из формулы:

a + bi

А теперь вы видите, как это можно изобразить геометрически.

Далее мы попросим нашего друга комплексного Вектора уменьшиться так, чтобы он был ростом в одну единицу.

Вектор-Наклонная-Стрелка немедленно сделался покороче.

- Как раз! - сказал Мнимий. - Ровно единица!

Осевые стрелки тоже сделались соответственно короче.

- Ну-с, - сказал Мнимий Илюше, - вы ничего не замечаете?

- Не знаю, - отвечал Илюша.

Тогда Вектор-Наклонная-Стрелка быстро повернулся против часовой стрелки, и кончик его туфелек начертил круг.

- А теперь? - спросил Мнимий.

Картина перед Илюшей несколько изменилась. Линии осей, уходившие за черту круга, исчезли. Все линии стали очень тоненькими, исключая проекцию Вектора-Наклонной-Стрелки на действительную ось и того перпендикуляра, который опускался от конца Вектора на конец этой проекции. Эти линии, наоборот,

стали очень толстыми и черными.

- Не узнаете? - спросил Мнимий.

- Узнаю как будто, - сказал Илюша. - Это синус и косинус.

- Ага! - вскричал Мнимий. - Они самые. Ну-ка, прикиньте, что бы это могло значить алгебраически? Как выходит, что проекции единичного вектора суть синус и косинус?

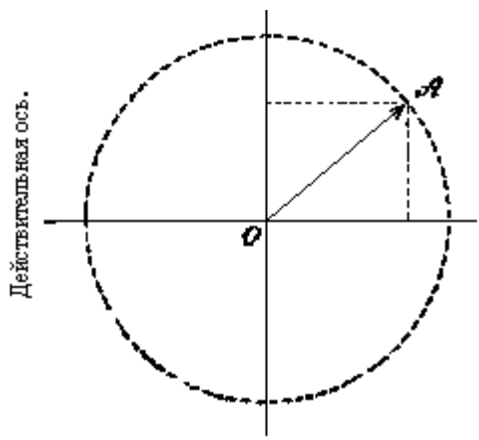
- Потому, вероятно, - отвечал Илюша, - что синус в квадрате и косинус в квадрате, как катеты прямоугольного треугольника, равны гипотенузе в квадрате, а она у нас равна единице. Радиус ведь и есть единица. Вектор в данном случае и есть радиус.

- Ну что ж, - отвечал Мнимий, - вы правы. Но давайте разберемся в этом. Если нам дан на комплексной плоскости, которую вы видите сейчас перед собой, некий комплексный вектор, то ответьте, чем он, по-вашему, отличается от обыкновенных чисел?

- Он как сила в механике, - ответил Илюша, =- имеет направление.

- 399 -

Мнимая ось



- Мне очень нравится ваш ответ, - вежливо отвечал Мнимий, - но давайте посмотрим еще на наш чертеж и разберем все подробней. Итак, значит, длину вектора мы...

- ... определяем по теореме Пифагора, - подхватил Илюша.

- Любого вектора?

- Любого.

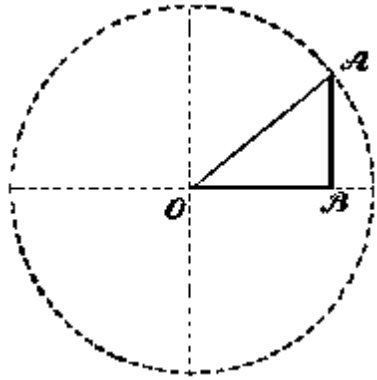
- Напишите! - сказал Мнимий.

Илюша написал:

$r = \sqrt{(a^2 + b^2)}$.

Что это за линии OB и BA?

Кто скажет?



- Отменно! - произнес Мним. - Далее, если вектор наклонен по отношению к положительному направлению вещественной оси под углом φ, то как бы вы определили проекции вектора на оси, исходя из длины его и данного угла?

- По-моему, надо вот как написать:

$a = r \cos \varphi$;

$b = r \sin \varphi$.

- Справедливо! А что если нам теперь взять наш вектор в обычной форме:

$a + bi$

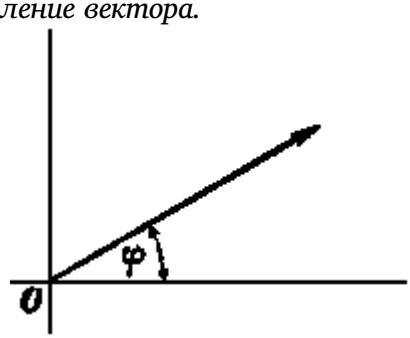
и подставить в его выражение новые значения для a и b?

$a + bi = r \cos \varphi + (r \sin \varphi)\, i = r (\cos \varphi + i \sin \varphi)$.

- Теперь, - заявил Мнимий, - получилась так называемая тригонометрическая форма комплексного числа.

Ясно, что множитель перед скобкой есть длина вектора, или его модуль. А что же стоит в скобках?

Угол с положительным направлением вещественной оси определяет направление вектора.



- Мне кажется, что это тоже вектор.

- Справедливо. А длина его?

- Равна единице.

- Точно. Потому он и называется единичным вектором.

А величина, определяющая направление вектора, именуется

его аргументом. Очевидно, О любой вектор можно изобразить, выбрав соответствующий аргумент и приличный случаю модуль.

- Ясно, - отвечал Илюша. - Умножил на сколько надо и получил из единичного вектора такой, какой требуется.

- Точно, правильно, прекрасно! - произнес Радикс.

- В таком случае давайте рассмотрим, что будет с единичным вектором, если его умножить на самого себя:

$(\cos\varphi + i \sin \varphi)\ (\cos\varphi + i \sin\varphi) = (\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) + 2i \sin\varphi \cdot \cos \varphi$.

- Ну, Илюша, - сказал Радикс, - глянь-ка повнимательней: тебе эта формула ничего не говорит?

Илюша пожал плечами.

- Тогда вот что, - сказал Мнимий Радиксович. - Может быть, в дальнейшем вы заглянете в учебник тригонометрии и узнаете, что разность квадратов косинуса и синуса есть косинус двойного угла φ, то есть угла, равного двум φ. А удвоенное произведение косинуса φ на синус φ есть аналогично синус угла двух φ. Если записать, то выйдет:

Минуя некоторые длинные выкладки, сделаем такое общее заключение: возвести единичный вектор в степень n значит увеличить его угол в n раз. Вот что означает геометрически возведение единичного вектора в степень.

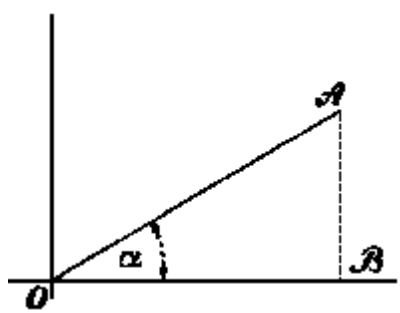
- Как будто, - сказал очень нерешительно Илюша, - я это где-то даже видел.

- Весьма вероятно! - подхватил Мнимий. - И увидите, наверно, еще не раз. Это ведь не так трудно проверить. Допустим, что наш единичный вектор наклонен к положительному направлению действительной оси под углом в сорок пять градусов. Тогда его косинус, то есть его проекция на действительную ось, равен...

- ... половине корня из двух. Такой же и синус будет.

- Давайте умножим такой вектор на самого себя.

Илюша взял мел и перемножил



OA = 1; AB = sinα; OB = cosα

- Получилось одно i, - сказал Илюша в некотором недоумении. - Что это за вектор, у которого только одно i осталось?

Затем Илюша внимательно посмотрел на чертеж.

- А-а! - сказал он. - Понял! Это единичный вектор, направленный прямо по мнимой оси. Единичный он потому, что около i стоит множителем единица. А так как мнимая ось перпендикулярна к действительной, то, значит, этот вектор образует с ней угол в девяносто градусов. И выходит, что действительно угол удвоился.

- А вектор?

- А вектор повернулся против часовой стрелки на сорок пять градусов. А если еще раз умножить? Можно, я попробую?

- Сделайте ваше одолжение! - отвечал Мнимий.

Илюша умножил еще раз. Вышло:

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\cdot i=-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot i$$

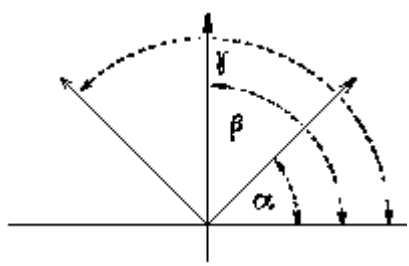
- Что-то я не пойму, - сказал Илюша.

Но на чертеже он увидел, что вектор повернулся теперь на 135° по отношению к положительному направлению действительной оси, н, следовательно, к 90° прибавилось еще 45°.

- А ведь верно! - сказал Илюша.

- Ну вот. Половина дела сделана, - сказал, улыбаясь, Мнимий. - Теперь вы поняли, почему мы можем так поворачиваться вокруг начала координат. А теперь решим обратную задачу. Что значит извлечь корень из комплексного числа? Поскольку возведение в степень и извлечение корня суть обратные действия, мы можем считать, что и в области комплексных чисел остается в силе определение корня как обратного действия. А если это так, то как теперь извлечь корень из единичного комплексного вектора?

- Мне кажется, что раз при возведении в степень углы умножаются, то, - продолжал Илюша, - это похоже на действия со степенями. А значит, при извлечении корня углы векторов делятся. Так?



- Молодчина! - отвечал Мнимий.

- Но только как же тогда я, извлекая из одного единственного i корень, получу такое выражение:

$$\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$$

хотя как раз так и должно быть, потому что, когда я возводил это выражение в квадрат, то получил i?

- Очень просто, - сказал Мнимий, - стоит только эго "одно-единственное i" написать в виде комплексного числа:

$0 + i \cdot 1$.

А это можно изобразить и так:

$\cos\varphi + i \sin\varphi$,

то ясно, что φ равен девяноста градусам. Поделите φ пополам, и все будет в порядке. Заметьте кстати, дружок, что если вы еще раз возведете в квадрат, то как раз и получите:

$i^2 = \cos 180^\circ + i \cdot \sin 180^\circ$.

Наше чудесное равенство $i^2 = -1$, таким образом, означает, что, повернув вектор дважды на прямой угол, вы повернете его в итоге на сто восемьдесят градусов, то есть переведете его в вектор противоположного направления. Но тут есть еще одно весьма важное обстоятельство.

Ведь вы, наверно, помните, что извлечение квадратного корня для вещественных чисел есть операция двузначная, то есть дает два ответа: один с плюсом, а другой с минусом. Как же это отразится в нашей комплексной области? Ясно, что если вектор повернется на целый круг, то он снова попадет на старое место...

Вектор немедленно плавно проплыл целый круг, двигаясь вперед против часовой стрелки, и застыл опять на старом месте. Постояв так минутку, он снова проплыл целый круг в том же направлении и снова остановился на старом месте. А затем повернулся так же еще в третий раз.

- Ясно? - спросил Мнимий.

- Как будто ясно, - сказал Илюша. - К чему он это показывает?

- А вот к чему. Очевидно, что комплексное число не изменит своего значения, если угол вектора, или, как мы говорим, его аргумент, увеличить на 2π, то есть на триста шестьдесят градусов, или на величину, кратную последней. Другими словами, число

$(\cos\varphi + i \sin\varphi)$

и число

$[\cos(\varphi + 2\pi) + i \sin(\varphi + 2\pi)]$

отличаются только начертанием, а геометрически это одно и то же.

- Конечно, - отвечал Илюша.

- Так вот, если теперь мы извлекаем из единичного комплексного числа корень, скажем, второй степени, то возьмем это комплексное число в двух написаниях, то есть:

I) $\cos\varphi + i \sin\varphi$,

II) $\cos(\varphi + 2\pi) + i \sin(\varphi + 2\pi)$,

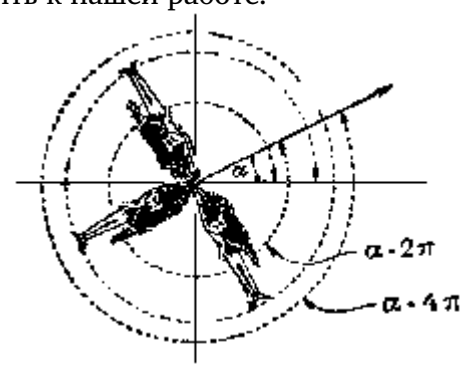
и из каждого извлечем квадратный корень путем деления его аргумента на два. Если мы это проделаем с тем же самым комплексным числом, то будем иметь:

I) $\cos 90^\circ + i \sin 90^\circ$,

II) $\cos 450^\circ + i \sin 450^\circ$.

Прибавлять еще по 2π здесь, как вы увидите, уже нет смысла, так как новых результатов не получится. Рассмотрим, что выйдет при делении угла пополам. Во-первых, мы получили тот же единичный вектор с углом в сорок пять градусов, который уже видели, а кроме того, еще получился другой вектор с аргументом в двести двадцать пять градусов.

Это и есть второе значение корня. Заметьте, что эти два вектора делят окружность пополам. Ну вот, теперь все ясно, и мы можем приступить к нашей работе.



Этот круг единичного радиуса для изготовления нашей Златоиссеченной Звезды надлежит разделить на пять частей. Это все равно, что решить уравнение

$x^5 - 1 = 0$

или найти все пять корней пятой степени из единицы. Мы уже решали при прошлой нашей встрече в Схолии Седьмой нечто в этом роде, разлагая на множители разность кубов $x^3 - 1$. Приступая к извлечению всех корней пятой степени из единицы, мы попросим нашего друга Вектора нам их найти.

Ну-ка! Против часовой стрелки кругом марш!

Вектор стал сперва на нуль, затем повернулся и стал примерно на половине второго квадранта круга. Потом начал поворачиваться далее и остановился в начале четвертого квадранта. Затем двинулся снова вперед и остановился в первом

квадранте. Двинулся еще раз и остановился в третьем квадранте.

- Трудно понять! - сказал со вздохом Илюша.

- Не так уж трудно, - отвечал Мнимий Радиксовнч. - Стоит для этого только рассмотреть, как меняется наш аргумент. Он будет:

$\varphi = 0; 2\pi; 4\pi; 6\pi; 8\pi,$

то есть мы прибавляем к нулю четыре раза по 2π, или по триста шестьдесят градусов. А теперь какие векторы получатся после деления аргумента? А вот они:

I) $\cos 0^\circ + i \sin 0^\circ$ ($\varphi = 0^\circ$)

II) $\cos 2/5\pi + i \sin 2/5\pi$ ($\varphi = 144^\circ$)

III) $\cos 4/5\pi + i \sin 4/5\pi$ ($\varphi = 288^\circ$)

IV) $\cos 6/5\pi + i \sin 6/5\pi$ ($\varphi = 432^\circ$)

V) $\cos 8/5\pi + i \sin 8/5\pi$ ($\varphi = 576^\circ$)

- 405 -

Очевидно, что углы их будут: 0°, 72°, 144°, 216° и 288°. Мы попросим теперь Вектора повторить его путешествие по кругу и останавливаться каждый раз у всякого деления.

Вектор исполнил все, что ему велели. При этом вместо одного вектора их оказалось пять. Окружность была разделена ровно на пять частей.

- Теперь проведем прямые! - сказал Мнимий.

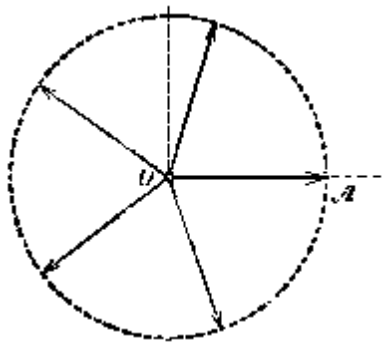
Он соединил точки прямыми, и получился правильный пятиугольник, вписанный в круг. Тут Илюша вспомнил, как ему говорили, что если разложить разность кубов на три множителя, то тем самым выяснится, как вписать треугольник в круг. Вот, оказывается, в чем дело!

- Кстати, - добавил с мягкой улыбкой Мнимий, - заметьте, что именно великий Гаусс указал и нашел, что такое деление круга связано с построением правильных многоугольников!

- Вон как! Это, значит, важное дело?

- А как вы думаете! - рассмеялся Мнимий. - Однако, - произнес он, осмотрев еще раз свой чертеж. - Пожалуй, придется немного увеличить, да надо еще наш пятиугольник повернуть, чтобы и он стал симметрично. Ну-ка, ребятки-векторы, увеличьтесь разика в два с половиной да, кстати, повернитесь на восемнадцать градусов!

Немедленно все пять векторов вытянулись и стали длиннее в два с половиной раза. Вместе с ними, конечно, увеличился пятиугольник и повернулся на 18°. В то же мгновение "Круг № 1" стал "кругом № 2".



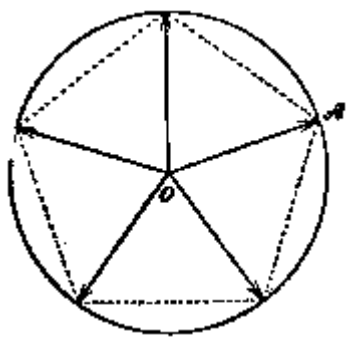
Круг № 1

- Это, - пояснил Радикс, - тоже умножение, притом на комплексное число, модуль которого 2,5, а аргумент - восемнадцать градусов. Комплексные числа могут, таким образом, делать еще и преобразования подобия.

- Совершенно справедливо! - отвечал Мнимий. - Преобразования подобия - это, можно сказать, наша специальность. Помните ли вы сказку Шарля Перро про Кота в сапогах? Так вот, дело там кончается тем, что Людоед Чародей обращается во льва, а потом в мышь, а Кот в сапогах бросается на мышь, и тут-то ей и конец. Помните?

- Ну да, помню, - отвечал Илюша. - А что?

- Неужели вы не догадались, что это мы действовали в этом случае и провели Перро?



Круг № 2

- Как так?

- 406 -

- Очень просто! Никакой там мыши не было. Подумайте, какая канитель-превращать, то есть преобразовывать, льва в мышь! Мы поступили гораздо проще: просто подобно уменьшили льва до размеров мыши, и вот этого-то подобно преобразованного льва и загрыз Кот в сапогах. А так как все произошло очень быстро, то и возникла эта легенда о мыши.

- Вот как?.. - задумчиво произнес сбитый с толку Илюша. - А

если наоборот, из мыши сделать льва?

- Вон чего захотели! - засмеялся Мнимий. - Это будет немного потруднее. Сам Галилей это признал. Дело в том, что если мышь подобно преобразить в такого большого зверя, как лев, то она... сломается! Ее тонкие косточки не выдержат тяжелого веса. Механическое подобие - вещь совсем не простая. .. Ну, а теперь приступим к сооружению Златоиссеченной Звезды. Соединим прямыми противолежащие точки.

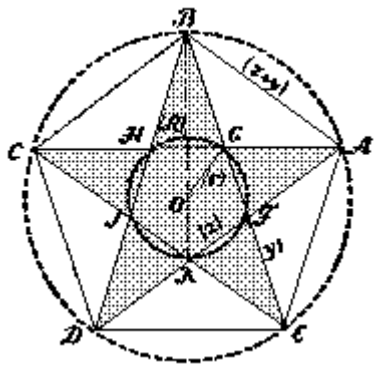
Когда Мнимий начертил это, то в круге получился звездчатый пятиугольник. И все векторы исчезли.

- Позвольте, - воскликнул Илюша, - да ведь это наша Красная Звезда!

- Она же и Золотая, - улыбаясь, ответил Мнимий.

- Ну да, и Золотая! Но вы-то почему ее называете Златоиссеченной?

- Для этого, - ответил Мнимий, - у нас имеются серьезные причины. Если мы рассмотрим нашу звезду повнимательнее, то найдем в ней немало вещей, в высшей степени глубоких и поучительных.



Мнимий расставил буквы у углов и получил чертеж, который нарисован на этой странице.

- Если мы возьмем одну из прямых, - начал Мнимий, - составляющих наш звездчатый пятиугольник, например прямую BGFE, то ясно из чертежа, что отрезки BG и FE равны между собой, ибо треугольники BGA и AFE равны. Теперь мы назовем каждый из этих отрезков буквой y, а отрезок KF буквой z. Очевидно, что и остальные схожие отрезки таковы же, то есть GA, FA,FE, KE, ID, 1C, ... , и все они равны y. Совершенно так же FG, KI, III... равны z.

Ясно, что треугольник GAF равнобедренный. Угол при вершине A ранен одной пятой ста восьмидесяти градусов, так как он вписанный и опирается на дугу, равную одной пятой

окружности. Ясно?

- Ясно, - отвечал Илюша.

- Следовательно, в этом углу ровно тридцать шесть градусов. Другие два угла треугольника равны друг другу и, следовательно, будут по семьдесят два градуса, то есть вдвое больше угла при вершине A. Стало быть, величины y и z суть боковая сторона и основание равнобедренного треугольника, у которого угол при основании вдвое больше угла при вершине. Теперь мы займемся треугольником BFA. Угол при вершине F нам известен: он равен семидесяти двум градусам.

Угол при вершине B по тем же основаниям, что и угол /1 в треугольнике GAF, равен тридцати шести градусам. Угол треугольника BFA при вершине A равен семидесяти двум градусам, ибо это вписанный угол и опирается на дугу в дне пятых окружности. Ясно, что и этот треугольник тоже равнобедренный, а в силу равенства углов подобен предыдущему.

Сторона BF равна (z + y), а следовательно, сторона AB тоже равна (z + y), а это ведь сторона выпуклого пятиугольника.

Теперь возьмем третий треугольник - ABD. Угол при вершине D равен снова тридцати шести градусам. Треугольник этот тоже равнобедренный и подобен двум предыдущим. Его боковая сторона равна (2y + z), основание равно (y + z). Из этих величин и подобия треугольников мы получаем теперь следующие пропорции:

(y + z) / (2y + z) = y / (y + z) = z / y

Пусть каждое из этих отношений равно x. Все ясно?

- Да, - ответил Илюша. - Треугольники подобны, а как получаются пропорции, я понял. Везде взято отношение основания к боковой стороне. Так как треугольники подобны, то отношение это во всех случаях одно и то же.

- Если мы теперь посмотрим на прямую BF, которая равна (y + z), то заметим, что точка G делит этот отрезок так, что весь отрезок относится к большей своей части, как относится большая часть к меньшей. Это деление и называется со времен глубокой древности золотым сечением.

- Ах, так вот почему вы ее называете Златоиссечснной! - вскричал Илюша.

- Именно поэтому! Но если у вас хватит терпения, то я могу вам еще рассказать насчет этой звезды немало интересного. Ибо это еще не все.

- Рассказывайте, - попросил Илюша. - Ведь сколько раз я ее видел, и даже в голову не пришло, что наша Красная Звезда такая знаменитая в геометрическом мире.

- Так вот, слушайте дальше. Если мы впишем в круг правильный выпуклый десятиугольник, то его сторона будет равна нашей величине x, помноженной на радиус большого круга, потому что если мы соединим концы одной из сторон десятиугольника с центром круга, то получим равнобедренный треугольник, угол при вершине которого, очевидно, равен тридцати шести градусам, то есть десятой части всей окружности. Боковые стороны равны радиусу описанного круга, а основание - стороне десятиугольника.

Следовательно, углы при основании будут иметь по семьдесят два градуса, и этот треугольник будет подобен только что рассмотренным. А если это так, то, следовательно, отношение стороны десятиугольника к радиусу снова равно тому же x. Ну, а теперь я посоветую вам, юноша, проделать еще кое-что своими собственными силами для того, чтобы ознакомиться поближе с Златоиссеченной Звездой. Согласны ли вы на это?

- Ну еще бы! - воскликнул Илюша. - Вполне согласен.

- Тогда вот что. Опишите круг около маленького пятиугольничка FGHIK (чертеж на странице 407) и найдите, как относится его радиус OG = r к радиусу большого круга OB = R.

Далее проведите прямые BK и OG и из двух новых треугольников BKI и BGO попробуйте получить вот такое равенство:

$R^2 + R^2x^2 = (y + z)^2$

Что означает это равенство? Ясно, что R есть, во-первых, радиус описанного вокруг пятиугольника круга, а во-вторых, сторона вписанного шестиугольника. Поскольку мы ранее выяснили, что сторона правильного десятиугольника так относится к радиусу, как z к y, то, следовательно, эта сторона есть Fix.

Наконец, величина (y + z) есть не что иное, как сторона выпуклого пятиугольника. Следовательно, это наше равенство означает, что сумма квадратов длин сторон вписанных шестиугольника и десятиугольника равна квадрату длины стороны вписанного пятиугольника. И, сопоставляя это с известной вам теоремой Пифагора, мы можем утверждать, что стороны шестиугольника и десятиугольника могут быть сторонами прямоугольного треугольника, у которого гипотенузой будет сторона пятиугольника. Вы можете очень легко это проверить, вспомнив, что стороны этих вписанных многоугольников, будучи определены через радиус, равны:

$$a_6 = R;\ \ a_5 = \frac{1}{2}R\sqrt{10 - 2\sqrt{5}};\ \ a_{10} = \frac{1}{2}R(\sqrt{5} - 1)$$

Вот какие интересные выводы можно сделать из рассмотрения нашей Звезды. Что касается самого отношения золотого сечения, то оно примерно равно 0,618. Немало исследователей утверждало, что это самое приятное для глаза соотношение и что очень многое в природе, живописи, скульптуре и архитектуре строится именно по этому отношению.

- Конечно, эту Звезду очень приятно видеть, - сказал Илюша.

- Вполне с вами согласен, - отвечал Мнимий, - ибо это мудрый символ чистого и справедливого отношения.

- 410 -

Тут на чертеже, который был против Илюши, исчезли линии круга и выпуклого многоугольника, и осталась одна Звезда. Ее линии начали светиться золотистым светом.

Илюша стоял и любовался. Потом спросил у Мнимия:

- А как быть, если нужно разделить какой-нибудь отрезок в отношении золотого сечения? Можно получить это построением без многоугольников? И как вывести величину 0,618?

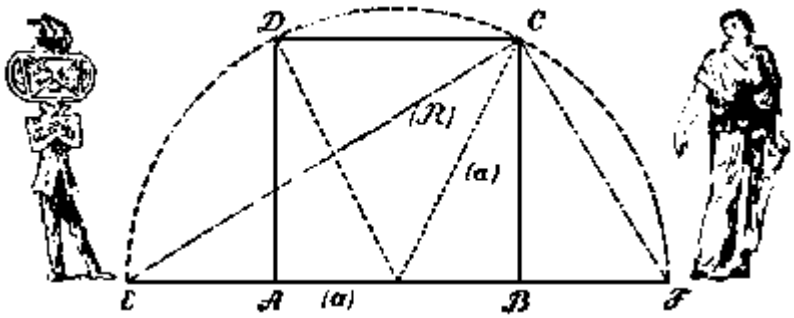
- О, это очень просто! - отвечал его собеседник. - Возьмем некоторый отрезок, который вы хотите разделить по золотому сечению. Пусть его длина будет a, и пусть большая часть его будет y. Построим квадрат на этом отрезке. Разделим его основание пополам и из средней точки основания проведем прямую в одну из вершин квадрата. Далее опишем из средней точки основания дугу радиусом, равным этой прямой.

Тогда диаметр получившегося круга разделится на три неравные части: EA = y, AB = a, BF = y. Ясно, что отрезок AD = AB есть не что иное по отношению к отрезкам EA и AF, как их средняя геометрическая, а вы уж ее строили в Схолии Пятнадцатой. При этом отметим: 1) отрезок CF есть сторона правильного выпуклого пятиугольника, вписанного в круг радиуса a; 2) отрезок BF есть сторона правильного десятиугольника; 3) отрезок CE есть сторона правильного звездчатого пятиугольника. А что это действительно так, вы можете убедиться, разобрав этот чертеж. Что же касается численной величины отношения золотого сечения, то она находится без труда из таких же соображений. Допустим, что мы хотим разделить величину a в отношении золотого сечения. Тогда одна часть будет y, а другая (a - y). Запишем:

$y/a = (a - y)/y$

$y^2 = a (a - y)$,

$y^2 = a^2 - ay$.



Перенесем ay в левую часть и возьмем y за скобку. Получим:

$y(y + a) = a^2$.

Теперь поделим обе части на a^2. Получаем:

$y/a(1 + y/a) = 1$.

А теперь вспомним, что

$y/a = x$

и подставим:

$x(1 + x) = 1$; $x^2 + x - 1 = 0$.

Открывая скобки, получаем квадратное уравнение. Положительный корень его и даст нам нужную величину. Просто и ясно!

- Хорошо, - сказал мальчик, - но, быть может, кстати, вы мне расскажете, как это получается, что вы можете делать такие преобразования поворота? Я как-то в толк не возьму, как это у вас выходит...

- Можно попробовать, - отвечал спокойно Мнимий. - Представьте себе, что перед вами висит диск, укрепленный в центре... ну хотя бы гвоздиком! И вы хотите его повернуть, скажем, против часовой стрелки на некоторый угол. Разберемтека, что для этого мы должны сделать. Наметим на краю диска некоторую точку (любую!). Она определяется некоторым комплексным вектором, не так ли? Но раз наш вектор есть комплексное число, которое после поворота должно измениться, значит, первый вектор заменится новым. Каким же? Ясно, что для этого надо первый вектор умножить на некоторый единичный вектор (мы ведь наш диск только поворачиваем, не более того!), аргумент которого равен углу φ. Давайте теперь множить. Из вектора $(x+iy)$ мы должны получить новый вектор $(x' + iy')$, то есть умножить:

$(x + iy)(\cos\varphi + i \sin\varphi) = x' + iy'$,

откуда мы получаем такие равенства:

$x' = x \cos\varphi - y \sin\varphi$

$y' = x \sin\varphi + y \cos\varphi$.

Отсюда легко видеть, что координаты нового вектора суть не

что иное, как преобразованные координаты первого вектора.

- 412 -

При этом они преобразованы так, что мы получаем очень простые (линейные) соотношения, куда не входят никакие иные степени, кроме первой. Все это можно коротко записать в виде так называемой матрицы преобразования:

|cosφ -sinφ|
|sinφ cosφ |

Первая строка матрицы указывает, на что надо умножить x и y первого вектора, чтобы при помощи сложения получить x второго; вторая строка дает то же самое для того, чтобы получить y второго. Таким образом (с некоторым усложнением, разумеется) можно делать и гораздо более сложные преобразования, например, превратить круг в эллипс, растянувши его в направлении одной из осей. В дальнейшем из этого вырастает целая "арифметика матриц", в некоторых случаях очень близкая к арифметике комплексных чисел. Все это в современной математике имеет серьезное значение. Так что наш знаменитый Кот в сапогах (имейте это в виду, мой дорогой юноша!) - это довольно-таки важная персона, особенно в наше время.

Вот что я вам доложу!

- 413 -

Схолия Девятнадцатая

особенно примечательна тем, что в ней наш доблестный путешественник знакомится с историей мнимых человечков, узнает, что произошло в городе Болонья в XVI веке, как павиан умеет бросать камни, и что об этом думали математики. Илюша в этой схолии не раз попадает в затруднительное положение, и только - его закадычные друзья спасают его от снежной бури, а затем Илюша снова встречает своего старого знакомого Дразнилку, который и помогает нашему герою решить трудную задачу.

Голубоватое поблескивание откуда-то сбоку неожиданно оказалось снова симпатичной фигуркой Мнимия Радиксовича.

Он очень любезно улыбнулся и заметил:

- Чудесные звезды, не правда ли?

- Мне очень хотелось бы, - сказал Илюша, - чтобы вы еще как-нибудь показали мне подробно, как вы, мнимые человечки, возникаете из квадратного уравнения?

- Вы ведь знаете, - начал свой рассказ Мнимий, - что, когда квадратное уравнение "не решается", мы получаем два комплексных корня, причем они таковы, что действительные части их равны, а мнимые отличаются по знаку:

a + bi; a - bi.

Такие комплексные числа называются сопряженными.

Сопряженные комплексные числа обладают одним замечательным свойством: их сумма так же, как и их произведение, является действительными числами. Это нетрудно проверить!

- Знаю! - откликнулся Илья. - Я уж пробовал. Мне кажется, как будто, что при перемножении мнимых чисел разные знаки дают плюс, а одинаковые минус...

- Ученые, - продолжал Мнимий, - сперва, в семнадцатом веке, догадались, а через два века и доказали, что если принимать в расчет все корни уравнения, и действительные и комплексные, то вместе их будет всегда столько же, сколько единиц в показателе степени старшего члена уравнения. Это положение, чрезвычайно важное для алгебры, обычно называется основной теоремой алгебры[34]. Попутно выяснилось, что комплексных корней всегда бывает четное число, и у каждого такого корня имеется сопряженный комплексный корень.

А то, что вы хотите узнать, можно показать на геометрическом примере. Сначала мы возьмем обычную

декартову плоскость, затем еще одну, которая будет комплексной, и она же будет полупрозрачной... А вы, юноша, дайте мне квадратное уравнение поудобней!

- Пожалуйста! - не задумываясь, ответил наш герой, -

$x^2 - 8x + 15 = 0$.

Три и пять. Лучше не придумаешь.

- Сойдет, - ответил Мнимий. - Дальше так: пусть перед нами встанет первая плоскость, на ней оси деления и парабола. А комплексная плоскость пусть станет перед первой вплотную. Она полупрозрачная, и через нее мы отлично увидим первую.

Так все и случилось. Сперва возникла обычная плоскость, причем ось абсцисс была голубая, а ось ординат розовая, потом возникла и темно-синяя парабола. А на делениях (+ 3) и (+5), там, где были корни квадратного уравнения, где парабола пересекла ось абсцисс, ярко горели две блестящие оранжевые точки.

- Вот и корни! - сказал Илюша.

- А теперь мы сотворим и комплексную.

И действительно, тут же, поправей, возникла еще одна плоскость, не очень заметная, матовая. На ней были тоже две взаимно перпендикулярные оса, действительная и мнимая, только они были совсем тоненькие. В начале координат сияла зеленая точка.

- Подвиньтесь! - вежливо попросил Мнимий.

И тут комплексная плоскость подвинулась налево и стала так аккуратно, что оси на том и на другом чертеже почти слились (они ведь были в одном масштабе!), но все было очень хорошо видно через вторую полупрозрачную плоскость.

- А зеленая точка на нуле, - сообразил мальчик, - означает, что ничего мнимого пока еще нет?

- По-видимому, так... - раздался торжественный шепот прямо из самого экрана: волшебные чертежи, оказывается, отлично умеют говорить!

- Итак, - продолжал Мнимий, - следите за мной хорошенько, и вскоре все станет ясно. Вот перед вами парабола!

Она, как вы знаете, прекрасная гречанка, и от роду ей очень много лет. Для того чтобы все было не так хитро, мы будем рассматривать ее в таком виде, что коэффициент при иксе во второй степени будет равен единице.

- То есть, - подхватил Илья, - мы берем выражение

$ax^2 + bx + c$

и делим все члены на a.

Теперь перед Илюшей сиял график квадратного трехчлена, то

есть чертеж параболы, обращенной вершиной вниз, ее ось стояла вертикально, и вершина параболы была ниже оси абсцисс (которая, как мы знаем, горизонтальная). Парабола пересекала ось абсцисс дважды. Недалеко засветилось и само уравнение:

$x^2 - 8x + 15 = 0$.

- А какие у нас корни? - спросил Мнимий.

- Два действительных корня, потому что парабола пересекает ось абсцисс два раза, - отвечал мальчик.

- Справедливо. Теперь я попрошу параболу подняться немножко повыше.

Парабола охотно послушалась, и две оранжевые точки на горизонталях стали сближаться; и вот уже вершина параболы только касалась оси абсцисс в одной точке. Две оранжевые точки сошлись в одну.

- А теперь? - спросил Мнимий.

Рядом уже светилось и уравнение:

$x^2 - 8x + 16 = 0$.

- А теперь, - отвечал Илья, - два одинаковых действительных корня, оба равны (+4).

- Так. Согласен. Попрошу еще вверх немного.

Послушная парабола согласилась и на это. И теперь вся она поднялась выше оси абсцисс, не касаясь ее. Вершина параболы по-прежнему висела над делением оси абсцисс, равным четырем. Однако как только вершина параболы вздумала оторваться от горизонтали, немедленно оси на полупрозрачной комплексной плоскости стали еще ярче, а зеленая точка в начале координат вспыхнула посветлее. Едва лишь горизонталь и вершина параболы расстались друг с другом, эта точка немедленно раздвоилась. И теперь уже две зеленые точки медленно поползли: одна вверх по мнимой оси, а другая по той же оси вниз. Затем обе эти точки остановились против деления три, только одна стояла против (+3), а другая против (-3).

- Ну-с, - произнес Мнимий, - я вас слушаю.

- Тут, - сказал Илюша, - оба корня комплексные. И они, конечно, сопряженные. Один будет равен (4 + 3i), а другой (4-3i). Если теперь открыть скобки в выражении

$[x - (4 + 3i)]\,[x - (4 - 3i)] = 0$,

то получится вот что:

$x^2 - 8x + 25 = 0$.

Этому уравнению соответствует парабола вот такая, как сейчас на нашем чертеже. А почему это так, сообразить нетрудно.

Ведь если написать:

$[x - (a + bi)]\,[x - (a - bi)] = 0$,

то открой скобки и получишь:

$x^2 - 2ax + (a^2 + b^2) = 0$.

Вот и все! Проверить - одна минута.

- Точно! -подтвердил Мнимий. - А больше вы ничего не замечаете?

И вот только тут наш герой усмотрел, что парабола отразилась ниже действительной оси и висит там вершиной вверх.

Так что теперь уже перед ним были как бы две параболы...

А из самого начала координат (там, где пересекались обе оси) ползет яркий лиловый пунктир со стрелочкой на конце. Он добрался до точки с координатами D, 3), и стрелочка его остановилась, как только коснулась этой точки.

Илюша обернулся к Мнимию, но, к своему удивлению, обнаружил, что его приятель... исчез бесследно! Но когда он невольно слова перевел глаза на чертеж, он с удовольствием заметил, что лиловая стрелочка уже превратилась в самого Мнимия, который очень весело ему кивает из глубины чертежа!

- Вот я каков! - крикнул Мнимий из чертежа. - Могу вырасти, если парабола поднимется вверх...

Парабола стремительно рванулась ввысь, Мнимий, ринувшись за ней, вытянулся, стал длинный-длинный и страшно важный, ибо вершина параболы ушла куда-то очень высоко, а Мнимий остановился на 92-м делении по мнимой оси. Пока Мнимий удлинялся, в записи сверкающего уравнения значение свободного члена начало быстро увеличиваться (а коэффициент при неизвестном в первой степени оставался тем же).

И в конце концов вот что получилось:

$x^2 - 8x + 8480 = 0$.

- А если вам так уж хочется, я могу стать и поскромнее!

Парабола стала, не торопясь, опускаться и остановилась против деления 19 на вертикальной оси.

Тут же засветилось и уравнение:

$x^2 - 8x + 377 = 0$.

- Могу и вовсе исчезнуть!

Парабола опустилась до самой оси абсцисс, коснулась ее, и Мнимий исчез.

Илюша обернулся, и оказалось, что Мнимий уже снова стоит рядом с ними.

- Теперь вам ясно, как мы возникаем? Но вы, надо полагать, уже заметили, что, как только парабола оторвется от оси абсцисс, сейчас же снизу, как говорят, на нижней полуплоскости (потому что ось абсцисс делит плоскость пополам!), возникает ее

отображение, а вместе с ним и мой сопряженный братец-близнец. Вот и все. Очень просто!

Парабола на чертеже снова поплыла вверх, а внизу опять засияло ее отображение, и тут же появилась еще одна лиловая стрелочка, направленная из начала координат вниз.

- Понятно, - сказал Илюша, - если сложить эти два вектора, то мнимые их части с разными знаками уничтожат друг друга и получится удвоенная величина действительной части.

Раздели пополам, и получишь точку, над которой находится вершина параболы. Все в порядке!

- Рад стараться! - отвечал Мнимий. - Конечно, парабола может выше оси абсцисс стоять и вершиной вверх, а не вниз, но, в общем, это безразлично.

- А почему вы говорите "отображение", а не "отражение"?

- Да так уж повелось от тех времен, когда вместо "отразилось" говорили "отобразилось". Это не так уж давно было, примерно во времена Лобачевского. Это слово встречается и у Гоголя. Имейте также в виду, что только под пером великого Эйлера мы получили все права гражданства в математике.

С вашего разрешения мы вернемся сейчас еще на некоторое время к решению уравнений. Тут вы и узнаете, как мы появились на белый свет, что мы помогли узнать математикам и как они с нашей помощью стали открывать одну тайну за другой.

- Ну, Илюша, как дела? - спросил с усмешкой Радикс-

Тебе все ясно?

- Не очень! - признался Илья со вздохом. - Нет, не очень.

А нельзя ли как-нибудь так придумать, чтобы не было двух разных плоскостей, а то меня путает, что их две? Ведь на самом-то деле это одно уравнение, а вовсе не два?

- Справедливо! - согласился Мнимий. - Действительно, одно.

- Может быть, попробовать еще? - предложил Радикс. - Возьмем еще одну параболу. Уравнение ее напишем так:

$z = x^2 - 8x + q$.

Значит, свободный ее член у нас обозначается теперь буквой q.

Если попробовать решить квадратное уравнение:

$x^2 - 8x + q = 0$,

мы получим...

- ...вот что! - сказал Илюша и написал:

$$x = 4 \pm \sqrt{16 - q}$$

Значит, пока наше q меньше шестнадцати, корни будут действительные, а если q больше шестнадцати, то комплексные.

- Разумеется! - согласился Мнимий.

- А когда q равно в точности шестнадцати, парабола только касается оси абсцисс в точке, равной четырем. Если же q равно нулю, то оба корня будут действительные - один равен нулю, а другой - восьми. Но только... как же нам теперь увидать еще и комплексные корни?

- Не спеши, - отвечал Радикс, - сейчас мы все это соорудим. А уж ты следи внимательнее за этим новым тонким и умным волшебством. Нам ведь нужно определить, существуют ли такие комплексные числа, чтобы при подстановке их в левую часть уравнения мы получили бы действительное число? Существуют ли, а если да, то каковы они?

- 419 -

- Тогда, - отвечал Илья, поразмыслив, - нам придется подставить в левую часть комплексное число (z+iy), а затем посмотреть, что из этого выйдет. Получится, значит, так:

$r = (x + iy)^2 - 8(x + iy) + q = (x^2-y^2-8x + q) + i\{2xy-8y\}$.

Мне кажется, что это выражение может оказаться действительным единственно только в том случае, если вся скобка, на которую умножается i, будет равна нулю.

- Так! - согласился Мнимий. - Верно. Это дело! А в каком случае так оно будет?

- Если, - отвечал мальчик, - я перепишу эту скобку немного иначе:

$2xy - 8y = 2y(x - 4)$,

то ясно, что это может произойти только в двух случаях, либо игрек равен нулю (ну, тут все и так ясно, говорить нечего!), либо икс равен четырем.

- Хорошо! - сказал Мнимий, улыбаясь. - Теперь уж у нас все готово, и мы можем приступить к нашему волшебству, которое нам все и покажет в полной наглядности, как оно и полагается в нашем волшебном царстве, построенном на поучение самым любознательным и дерзновенным юношам...

- Дерзновенным! - с усмешкой повторил Радикс. - Но я слышал, как друг Пушкина, замечательный русский поэт и мыслитель Евгений Баратынский однажды написал:

Надейтесь, юноши кипящие!

Летите, крылья вам даны...

А ведь так оно и полагается, дружище, в нашем светлом волшебном и вполне серьезном царстве для любознательных ребят!

- Ура! - закричал Илья. - Давайте ваше новое волшебство. Вы уж такие волшебники...

- Потише ты! - возразил Радикс. - Не спеши. Поспеешь!

Это будет штучка довольно затейливая. Начнем с того, что

это новое волшебство будет не на плоскости, а в пространстве.

- В трехмерном? - робко пропищал Илья.

- Неужто тебе трехмерного мало? - свирепо огрызнулся Радикс. - Можно и четырехмерное, да ты испугаешься! Ну!

Смотри во все глаза.

Радикс медленно и важно махнул рукой. И тотчас же перед Илюшей возникла плоскость, где были начерчены обыкновенные декартовы координаты (икс, игрек, как оно и полагается!).,

- 420 -

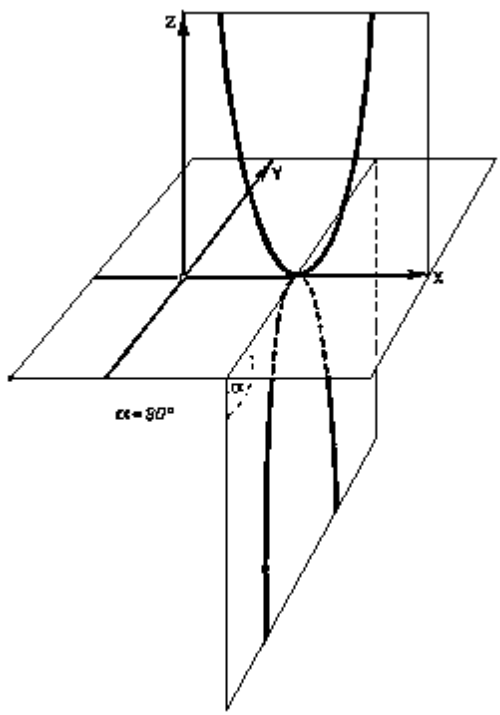
Направо от начала координат была проведена еще одна прямая, параллельная оси игрек, как раз в том самом месте, где икс равнялся четырем.

- Смекаешь? - спросил Радикс, указав Илье на эту четверку.

- Смекаю... - несмело откликнулся Илья, - то есть это та самая четверка, при которой моя скобка становится равной нулю? Так или нет?

- Именно! - отвечал ему его друг.

Смотри далее... Да смотри в оба! Полагаем твое q равным нулю... А теперь...



Тут Илюшина плоскость потихонечку повернулась и легла горизонтально, повиснув в воздухе примерно в сантиметрах шестидесяти от пола. Да так и застыла. Как только это произошло, из каждой точки креста, образованного осью иксов и

новой прямой, которая пересекла ось иксов в точке, равной четырем, начали постепенно расти перпендикуляры к этой самой плоскости, которая и была плоскостью (x + iy), то есть плоскостью комплексных векторов (следи внимательней!).

И тут, опираясь на эти перпендикуляры и пересекая ось иксов (там, где игрек равен нулю), из концов этих перпендикуляров выросла парабола. Самая настоящая парабола с уравнением:

$z = x^2 - 8x$.

А уравнение сейчас же засветилось справа сбоку красным огнем, чтобы Илья не путался! Затем (смотри хорошенько!) и-* прямой в новой вертикальной плоскости (опять же перпендикулярной к висящей в воздухе плоскости комплексных векторов) возникла еще одна парабола с уравнением:

$z = 4^2 - y^2 - 8 \cdot 4 = - y^2 - 16$.

Теперь перед Илюшей было уже две параболы. Мнимий подошел совсем близко к этой высоковолшебной модели и мягким прикосновением своих волшебных пальчиков жестко скрепил эти две параболы так, что они оказались соединенными и своих вершинах, а плоскости их оказались перпендикулярными одна к другой.

- Видишь?- спросил Радикс. - Теперь смотри, что у нас будет получаться далее, когда мы начнем увеличивать постоянный член, то есть это твое q. Следи внимательно за этой фигурой из двух соединенных парабол, не отрывая глаз.

Вся эта сложная параболическая механика начала двигаться и прошла вверх на шестнадцать делений. Как только она остановилась, тотчас же сбоку справа засветилось ее уравнение красным огнем:

$z^2 = x^2 - 8x + 16 = \{x - 4\}^2$.

А слева появилось еще одно уравнение (для другой параболы) - зеленое:

$z = -y^2$.

- Внимание! - громко провозгласил Мнимий. - Если теперь далее мы еще будем увеличивать ваше q, то первая наша парабола уже не будет больше пересекать плоскость (x + iy), но зато нижняя парабола пересечет ее как раз дважды, в двух точках, которые, по мере увеличения вашего q, будут разбегаться в разные стороны по прямой (x = 4). Вот вам, мой юный друг, настоящая, подлинная картина того, как могут возникать комплексные корни квадратного уравнения. Поняли?

- Ох! - произнес Илюша, утирая пот со лба. - Что-то такое я сообразил. Но вы бы хоть еще разок повторили!..

И снова перед Илюшей возникла вся эта волшебно-наглядная

математическая интермедия с самого начала до самого конца. Теперь Илюша как будто стал разбираться.

- Но как странно они скреплены, эти параболы, - сказал он, - они ведь зацепились одна за другую, точно они надеты одна на другую, как вот... если взять две дуги... ну, самые обыкновенные, которые на лошадей надевают... да и поддеть их так, чтобы одна висела на другой. Верно я говорю или нет?

- Точно так! - отвечал равнодушно Радикс[35].

- 422 -

- А все-таки, - снова начал Илюша, - я ерошу еще мне кое-что разъяснить. Про корни я теперь понял, но кое-что более общее мне неясно. Вы, Мнимий, помогла открыть тайны. .. Но ведь вы сами - тоже изобретение математиков?

- Не совсем изобретение. Мы - открытие! Природа царит во всем мире, а у нее свои законы. Труд человеческий в значительной мере определяется этими же законами. Ведь не одни человек трудится - птица вьет гнездо, пчела строит очень точные шестигранные соты, паук плетет многоугольники паутины, крот строит тоннели и так далее. Человек с помощью Математики изучает эти законы, и когда он открывает нечто новое в строении этих внутренних связей, неправильно говорить, что он что-то "изобрел". Он открыл то, что всегда лежало в основе некоторых явлений природы.

- Трудно понять, - произнес со вздохом Илюша, - как это такое: уравнение и природа? При чем тут природа?

- А когда вы бросаете камень, ведь он летит по параболе, не так ли? А парабола алгебраически - это квадратное уравнение. А те, кто путешествовал по Африке, рассказывают, что большие обезьяны, павианы, очень хорошо умеют бросать камни. Однако камень не рассуждает, кто его бросил - ученик седьмого класса или павиан, все равно он летит по параболе!

Илюша уставился на Мнимия и не знал, что отвечать.

- Ну как, Илюша? - спросил Радикс. - Долетел до тобя этот камушек?

- Не знаю! - ответил в недоумении Илюша. - С павианом действительно как-то странно получается...

- Крепись! - посоветовал Радикс. И добавил: - Был в древности такой философ, Платон. Он любил пересказывать речи другого философа, своего современника, Сократа. И вот в одном из сочинений Платона Сократ говорит, что человек разумный "будет заниматься астрономией, как и геометрией, для того чтобы ставить задачи разуму", но не будет терять время на прихотливо-изящные разглагольствования о красоте звездного неба. Нет, он будет "искать истину" в явлениях подобного рода. А истина эта,

как легко догадаться, заключается именно в математических законах движения небесных светил. Задача оказалась необычайно трудной и, не взирая на все грандиозное развитие древнегреческой математики, грекам полностью одолеть ее не удалось. Решение было получено только в семнадцатом веке нашей эры. Как ты знаешь, эти решения были связаны в первую голову с именем Иоганна Кеплера, одного из великих основателей математического естествознания, на основе которого построена вся современная цивилизация.

- Итак?.. - переспросил Мнимий.

- Не знаю... - с усилием выговорил Илюша. - Как-то все это в голове не укладывается

- 423 -

- Постой-ка, - сказал Радикс, - пожалуй, я приводу еще один пример, с которым ты уж спорить не станешь. Конечно, и юноша из седьмого класса и павиан - существа, не лишенные некоторого смысла, и, пожалуй, ты будешь колебаться, можно ли назвать их действия просто действиями Матушки Природы. Так вот тебе еще один пример, где одушевленные существа уж совсем не принимают никакого участия: по горе бежит маленький ручеек, наконец добегает до крутого обрыва и низвергается, скажем, метров на двадцать с лишним (высота шестиэтажного дома!) тоненьким водопадом в одну струйку. Ясно ли тебе, что и эта водопадная струя будет иметь строение той же самой параболы? Это ты можешь проверить самым простым опытом с резервуаром, водой и резиновой трубкой. Отсюда ясно, что парабола имеет в мире, независимо от человека и его мыслительных способностей, совершенно объективное существование, независимое от нас.

Следовательно, когда человек нашел эту кривую, он сделал открытие- он нашел формулировку важного закона Природы.

А обстоятельство, что сама кривая (у Аполлония Пергейского в древности) была найдена путем геометрического рассуждения, умозрительно, и только потом (у Галилея) приняла характер закона Природы, значения не имеет. Одно только можно вывести из этого поучительного сопоставления, что логическое развитие (и расширение) математических образов и истин потому и ведет к открытию орудий математического естествознания, что даже самые первые положения математики непосредственно возникли из человеческого опыта и размышлений над результатами этого многообразного опыта.

- Вот и опять получается, - заявил Илюша, - что математика - это опытная наука...

- ... опирающаяся в своих построениях на здравый человеческий рассудок, на логику, - добавил Радикс, - и

постоянно проверяющая своп построения на решениях практических задач. Когда-то Аристотель учил, что человеку нужна свобода, но не просто свобода, а обдуманная свобода, разумная, такая, которая ведет к полезным результатам. И вот, обдумывая свои удачные и полезные действия, человек и находит математические орудия, которыми он покоряет Природу.

- 424 -

Вот примерно как! Конечно, что ни дальше, тем оно становится сложнее, но, как говорится, чем дальше в лес, тем больше дров! Ну, следует еще отметить, что летит тело по параболе только в пустоте, то есть при отсутствии сопротивления воздуха, в полном безветрии, а иначе получается хотя и близкая к параболе кривая, но все-таки не парабола. Хотя все математические образы, которые мы в рассуждениях считаем абсолютно точными, на практике не могут иметь такую неограниченную точность, однако самое важное и самое основное в явлении они выявляют с большой силой.

Внезапно откуда-то донесся знакомый мелодичный свист древних флейточек, раздался легкий топот маленьких копытец, и голос небезызвестного Илюше Фавна лукаво произнес:

- А камушки? Морские камушки?

- Что такое? - вопросил Радикс. - Какие это камушки?

- Ах да! - воскликнул мальчик. - Морские камушки, обкатанные волнами, как трехосный эллипсоид!

- Верно! - подтвердил Радикс. - Вот тебе и еще пример довольно сложного геометрического тела, который сооружает сама природа.

- В общем, ясно! - примирительно заявил Мнимий. - И я предлагаю, приняв в общем выводы моего почтенного папаши к сведению и руководству, перейти к нашим очередным делам. Мне хотелось бы обратить ваше внимание на ряд особо значительных фактов из истории нашей науки. Хотите ли вы меня выслушать?

- Очень даже! - отвечал Илюша. - Когда вы мне все здесь рассказываете о развитии нашей науки от древности и чуть ли не до наших дней, то выходит более понятно...

- Хорошо, - заметил Мнимий, - насчет "чуть ли не до наших дней" - это немножко, пожалуй, слишком, ибо "наши дни" в математике - это уж очень трудно! Но кое-что наметить можно[36]. Только вы слушайте внимательно и сейчас же переспрашивайте без стеснения, как только почувствуете, что теряете нить моего рассказа. Согласны?

- Вполне!

- Итак, надо отметить, что в науке время от времени бывают некоторые нежданно разительные перемены. То есть если

рассуждать впоследствии, то поймешь, что они не такие уж "нежданные", а, наоборот, подготовлялись издалека, хотя самое решение вопроса сперва кажется совершенно неожиданным. Понимаете вы меня?

Тут уж Илюше пришлось признаться, что он не очень понимает, о чем идет речь.

- Ну вот, - сказал, задумываясь чуть не на каждом слове, Мнимий, - возьмем алгебру. Самую обыкновенную, которую вы в школе учите. Это просто буквенное исчисление, не так ли? А ведь всякий ученик прекрасно знает, какое это облегчение для решения задач.

- Конечно, - согласился Илюша, - алгебраически решать задачи гораздо проще, чем с арифметикой возиться!

- Согласен! Но давайте разберем, как это случилось.

Ведь всякий замечал, что много есть на свете задач очень друг на друга похожих, то есть, как говорится, задач одного типа. Вот на этом-то наблюдении и родилась алгебра. Надо было еще получить некоторый толчок - догадаться, что вместо чисел можно употреблять буквы. Новое в науке родится путем наблюдения над своей собственной работой - то есть над решением разных задач, - а затем путем выводов из этих наблюдений. И, наконец, путем построения такого общего способа (или метода), который помог бы нам воспользоваться тем, что мы нашли наблюдением, а метод этот и был буквенным исчислением.

- А он откуда взялся?

- Он был в зачатках еще у египтян и у греков. Затем индусы, а за ними арабы заметили, что способы решать арифметические задачи могут быть сведены к нескольким типам - ну, хотя бы к уравнениям с одним неизвестным, - и описали это словесно. Возникла так называемая риторическая алгебра, не очень, конечно, удобная, но все-таки более совершенная по сравнению с простой арифметикой[37]. А уж потом пришли и буквы, но путь им был расчищен при помощи риторической алгебры.

- Значит, так, - решил Илюша, - сперва мы наблюдаем, замечаем важные особенности при пользовании старыми способами, а затем на основании этих наблюдений и рассуждений уже строится новая наука, то есть новый ее раздел.

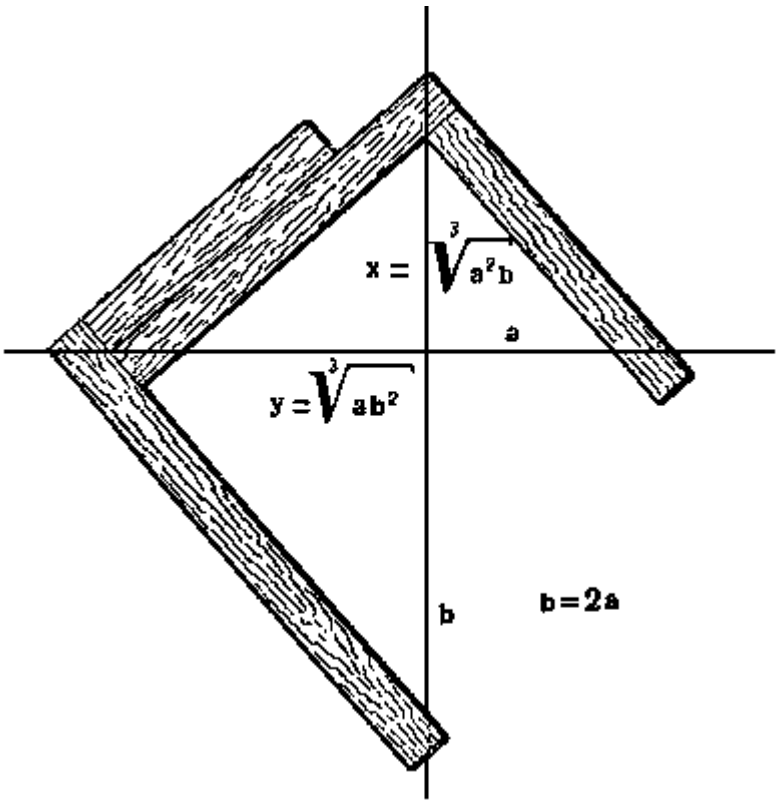
- Правильно, - согласился Мнимий, - такие весьма важные перемены и бывают, как я выразился, "нежданно разительными". Такие нововведения, обобщающие большой опыт, дают огромные результаты и сразу двигают науку вперед.

Проходит несколько десятилетий - и науку уже узнать нельзя, так быстро она развивается на новом рубеже. Арабы построили

алгебру, ее узнали в Европе, а затем сразу раздаются мощные голоса Виеты и Декарта. И вот уже та алгебра, которую вы учите в школе, построена. И все становится иным, появляются возможности строить еще нечто совершенно новое.

- А когда это случилось?

- Арабская алгебра родилась примерно в восьмом или девятом веках, а распространять ее в Европе стали примерно с двенадцатого века. Я имею в виду славного Ал-Хорезми.

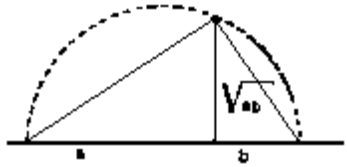


Прибор Платона.

В это же время появляются сочинения европейцев, уже освоивших алгебру. В начале шестнадцатого века все это было в Европе освоено, развито и вот тут-то Европа встает на новый путь развития. Сочинения Архимеда и Аполлония переведены и напечатаны. Начинаются новые труды. Они как бы вмещают все, что Европа унаследовала от арабов (а стало быть, и от индийцев) и от Древней Греции. И теперь начинаются плодотворнейшие труды по объединению того и другого. Если труды европейцев, которые привели к интегральному и дифференциальному исчислению, были завершением ТРУДОВ древних, шедших в том же направлении, то с шестнадцатого века началось еще одно движение: новые достижения риторической алгебры были

впервые успешно применены к решению алгебраических уравнений высших степеней, например кубических.

- А раньше их совсем не умели решать? - спросил Илюша,



Одна средняя пропорциональная и один прямой угол.

- Опыты и частные решения были. Мы вам рассказывали о способе Двух средних пропорциональных и о способе Менехма (в Схолии Пятнадцатой - способ двух парабол). Но все это были геометрические способы, которые не обладали общностью, то есть не могли быть применены для решения любой задачи, которая приводит к кубическому уравнению.

- Мы рассматривали, кажется, тогда, - заметил Илюша, - пропорцию Гиппократа:

$a : x = x : y = y : b$

и ее алгебраическое решение, а как греки решали, мы как будто не говорили.

- Ну что ж, - сказал Радикс, - можно и это припомнить.

Для решения этой задачи - для удвоения куба - можно пользоваться так называемым "прибором Платона", который легко представить тебе в виде двух плотничьих наугольников, то есть деревянных прямых углов, как бы прямоугольных треугольников без гипотенузы. Начинаем с чертежа, где изображены две прямые, пересекающиеся под прямым углом. Затем берутся два угольника и прикладываются друг к другу так, чтобы они образовывали два прямых угла. Нетрудно рассудить, что если даны длины отрезков a и b, то из двойной пропорции Гиппократа, которую я только что привел, можно получить:

$x^3 = a^2b$; $y^3 = ab^2$;

и, положивши $b = 2a$, получаем:

$$x = a \cdot \sqrt[3]{2}; y = a \cdot \sqrt[3]{4}$$

Все это так сложно формулируется потому, что у Евклида в его Началах (книга IX) степени - квадраты, кубы и так далее - так и вводятся, через пропорции, и опираются на известные свойства геометрической прогрессии:

$1, x, x^2, x^3, ^4 \ldots x^n$

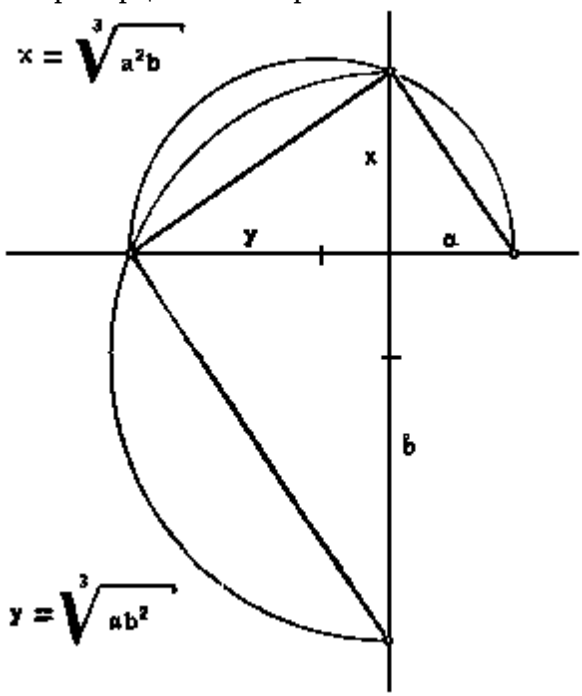
где ясно, что каждый член является средней геометрической между двумя своими соседями справа и слева, как например:

$x^2 = \sqrt{(x \cdot x^3)}$

а четыре последовательных члена связаны двойной непрерывной пропорцией:

$1 : x = x : x^2 = x^2 : x^3$,

которой и пользуется Гиппократ. Теперь возвращаюсь к построению: циркуль дает одну среднюю пропорциональную, которую мы разбирали в Схолии Пятнадцатой, тогда как два прямых угла действуют словно два объединившихся циркуля, они дают нам разом две средних, как это ясно из другого чертежа. Прямой угол мы всегда можем себе представить опирающимся на диаметр некоторой окружности, не так ли?.. А если у нас имеются два прямых угла, причем их всегда можно сдвигать и раздвигать так, что эти диаметры воображаемых окружностей могут изменяться (и при этом независимо друг от друга), то мы получаем особый прибор вроде двоякого циркуля, который может дать нам сразу две средние пропорциональные, те самые, которые требуются для пропорции Гиппократа.



Принцип прибора Платона.

- 429 -

- По-моему, - сказал Илья, внимательно осмотрев чертежи Радикса, - как будто все правильно. Какой интересный этот способ двух прямых углов! И если $a = 1$, то икс и будет корнем кубическим из двух. Все верно.

- Прекрасно! - похвалил Мнимий. - Итак, после этого

поучительного примера я могу продолжать свой рассказ. Алгебра дала ученым формулу (а формула - это ведь и есть самое значительное завоевание алгебры!) для решения любого квадратного уравнения. В шестнадцатом веке ученые заинтересовались алгебраическим решением кубического уравнения, о котором еще в начале того же века Лука Пачиоли, итальянец, говорил, что эта задача столь же непосильна для науки, как и квадратура круга. Конечно, надо все-таки принимать во внимание, что наука, развиваясь, ставит себе все более и более сложные задачи, а для их разрешения, понятно, требуются все более сложные способы. Вот с одной такой необычайной сложностью ученые и столкнулись в шестнадцатом веке. Понадобилось без малого триста лет, чтобы разгрызть этот орешек! О нем-то и будет идти речь. Задачка была особенная. Древние почти ничего здесь не сделали, европейцам все пришлось изучать и рассматривать заново. Арабы тоже брались за этот вопрос, старательно изучали частные случаи, многое изучили и придумали, но по части именно алгебраической у них не получилось. Пачиоли прямо говорил, что решение таких уравнений невозможно, ибо они "диспропорциональны", то есть невыразимы с помощью пропорций, что, разумеется, неосновательно, как это ясно из Гиппократова решения задачи о двоекубии. Как неосновательны были и сетования Пачиоли насчет квадратуры круга, но Архимед тогда еще очень был мало известен... И, наконец, в городе Болонье в шестнадцатом веке напали на алгебраическое решение. Оно...

- А какое это было решение?

- А вот сейчас его продемонстрируем. Сперва надо сказать еще несколько слов об одном особом способе решать квадратные уравнения, вам хорошо известные. Вы знаете способ, который построен на выделении точного квадрата. Но можно действовать еще и по-иному. Выходит не хуже. Если уравнение представлено в двучленной форме, то есть вот так:

$x^n = a$

то решить его нетрудно (разумеется, мы полагаем, что а больше нуля, то есть положительное число), какова бы ни была его степень. Надо только извлечь корень данной степени, а это вопрос разрешимый...

- С логарифмами... - подсказал Илюша.

- Точно, - отвечал Мнимий, - именно с логарифмами.

Следовательно, если мы сумеем данное уравнение привести к такому виду, ыы уже никаких особых препятствий не встретим. Уравнение первой степени приводится к двучленному виду проще

простого: сделай приведение, перенеси известные в одну сторону, неизвестные в другую - и готово. Посмотрим теперь, как этого достигнуть с квадратным уравнением, которое нам тоже хорошо знакомо. Любое квадратное уравнение можно представить в таком виде:

$x^2 + px + q = 0$,

ибо, если коэффициент при x^2 не равен единице, делим вес уравнение на этот коэффициент - и дело в шляпе! Как быть далее? А что, если уничтожить второй член уравнения с иксом в первой степени? Тогда останется икс в квадрате и свободный член, а нам как "раз и надо получить двучленное уравнение.

Введем новую неизвестную, допустив, что наш икс таков:

$x = y + h$.

- А что такое h? - с удивлением спросил Илюша.

- Пока что h совершенно произвольное число, но мы сейчас выясним точно, в каком виде оно может нам помочь. Подставим в уравнение новое значение икса и сделаем приведение. Это нетрудно! Получаем:

$(y + h)^2 + p(y + h) + q = 0$;

$y^2 + y(2h + p) + h^2 + hp + q = 0$.

Теперь становится ясно: чтобы уничтожить второй член уравнения, надо положить, что коэффициент при иксе в первой степени равен нулю, то есть:

$2h + p = 0$;

$h = -p/2$

Подставим в полученное уравнение. Получаем:

$y^2 + y(-2p/2 + p) + p^2/4 - p^2/2 + q$;

после приведения:

$y^2 = p^2/4 - q$

$$y = \pm\sqrt{\frac{p^2}{4} - q},$$

по так как $x + y = h$, то находим и решение:

$x = -p/2 \pm \sqrt{(p^2/4 - q)}$

Следовательно, наш этот способ - уничтожить один из членов уравнения - вполне целесообразен. Теперь попробуем разобрать, как было решено впервые алгебраически, или, как говорится, "в радикалах", то есть с помощью извлечения корней необходимой степени, кубическое уравнение. Сделано было это в шестнадцатом веке в Италии учеными города Болоньи Ферро, Тарталья и Кардано. Между двумя последними шел долгий спор о том, кто первый сделал это открытие, но мы в эти ненужные споры забираться не будем, тем более что с современной точки

зрения все решение не так уж сложно.

- А все-таки, наверно, трудно... - грустно заметил Илюша.

- Не очень! Конечно, поскольку само кубическое уравнение сложнее квадратного, то весь ход решения похитрей. Но тут дело в том, что выясняются некоторые особые подробности. .. Итак, у нас имеется кубическое уравнение, где коэффициент при старшем члене уже превращен в единицу:

$x^3 + ax^2 + bx + c = 0.$

Цель снова будет та же самая: придумать такие преобразования, чтобы превратить данное уравнение в уравнение с меньшим числом членов, ибо, как мы видели на примере квадратного, этот прием упрощает задачу. Сперва мы будем поступать так же, как с квадратным уравнением. Положим снова:

$x = y + h$

и подставим это в наше уравнение. Получим после небольших переделок

$y^3 + (3h + a)\, y^2 + (3h^2 + 2ah + b)\, y + h^3 + ah^2 + bh + c = 0.$

Теперь снова постараемся обратить коэффициент второго члена (при игреке в квадрате) в нуль, то есть положим, что

$(3h + a) = 0;\ h = -a/3,$

откуда

$y^3 + (-3a/3 + a)\, y^2 + (3a^2/9 - 2a^2/3 + b)\, y + h^3 + ah^2 + bh + c = 0.$

или, сделав приведение:

$y^3 + (-a^2/3 + b)\, y + (2a^3/27 - ab/3 + c) = 0.$

Теперь для сокращения письма положим:

$(-a^2/3 + b) = p;\ (2a^3/27 - ab/3 + c)\ ] = q$

ab и запишем окончательно результат в таком виде:

$y^3 + py + q = 0.$

(Если $q = 0$, то все просто: $y_1 = 0$, $y_{2,3} = \pm\sqrt{-p}$)

При q ф 0 результат, как ты видишь, разумеется, несколько менее утешителен, чем в случае квадратного уравнения, ибо у нас не два, а три члена. Но как-никак определенное упрощение достигнуто. Как же теперь быть далее? Ясно, что нужно придумать способ, который дал бы возможность обратить выражение ру в нуль, после чего мы и получим двучленное уравнение, то есть то же самое, что было получено для квадратного.

И вот как раз на этом месте болонцам пришла в голову счастливая мысль сделать еще одну подстановку: положить, что у в последнем уравнении можно представить в виде суммы:

$y = u + v.$

И опять-таки эти величины ими пока что совершенно произвольные. Мы только одно можем сказать, что сумма их есть корень нашего уравнения, который не равен нулю.

- А почему он не равен нулю?

- Сейчас рассмотрим! Попробуем подставить. Получаем:

$(u + v)^3 + p(u + v) + q = 0.$

Смотрите-ка! Теперь видно, что сумма $(u+v)$ не может быть равна нулю, потому что тогда и число q будет равно нулю, а число q, свободный член уравнения, не равно нулю. Теперь откроем скобки и кое-что сгруппируем:

$(u^3 + v^3) + (u + v)(3uv + p) + q = 0.$

Такая форма уравнения уже подает нам некоторые надежды!

Может быть, нам удастся уничтожить второй член? Положить, что $u + v = 0$, мы, как сказано, не можем, но зато спокойно можем допустить, что

$3uv + p = 0;$

$uv = -p/3$

но в таком случае наше уравнение превращается в такое:

$u^3 + v^3 = - q.$

Следовательно, мы получили два уравнения. Одно из них дает произведение новых чисел u и v, а другое их сумму. Правда, они в разных степенях, но никто не помешает возвести это произведение тоже в куб. Далее это создаст нам некоторые затруднения, но мы как-нибудь их одолеем. И вот перед нами два уравнения:

$u^3v^3 = - p^3/27; u^3 + v^3 = - q.$

А теперь скажите, юноша, как бы вы дальше поступили с этими уравнениями? Отвечайте, куда они просятся?

- В квадратное уравнение! - вдруг выпалил почти в отчаянии Илюша. - Сумма и произведение даны, значит, это квадратное уравнение... по теореме Виеты.

- Очень хорошо! - отозвался Мнимий. - Так вот: теперь должно быть ясно, что болонцы действительно напали на очень счастливую мысль. Разумеется, им не удалось свести кубическое уравнение к линейному (то есть первой степени), как сводили квадратное, но ведь этого и ожидать было бы странно, ибо куб все-таки постарше квадрата и, конечно, поупрямей его! Но вы должны еще иметь в виду, что открытие этого решения кубического уравнения в Италии шестнадцатого века было поистине важным историческим событием! Оно означало, что новая Европа вышла на новый рубеж, она уже освоила наследие древних ученых и теперь сама делает недоступные для древности открытия. Общественные условия настолько изменились, что

возникла возможность для новой науки. Разумеется, ученый работает прежде всего в интересах науки. Но он может работать для ее развития только тогда, когда общество, в котором он живет, поддерживает его, другими словами, когда люди верят в необходимость его трудов.

Мы уже говорили с вами, как бились древние греки с двоекубием, то есть задачей удвоить куб. И как мы увидим далее, задача трисекции угла тоже сводится к кубическому уравнению. Но так или иначе болонцы все-таки степень кубического уравнения на единицу понизили, а это облегчило задачу - квадратные уравнения мы решать умеем!

- Вавилоняне догадались, - заметил Радикс, - да и нас научили.

- 434 -

- И теперь уже мы можем составить окончательное уравнение, которое будет:

$t^2 + qt - p^3/27 = 0$

Одно значение корня этого уравнения даст u^3, а другое v^3.

Решим это уравнение!

Илюша схватил мел и сразу написал:

$$u^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}; \quad v^3 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$$

- Вот-вот, - поддакнул Мнимий, - совершенно правильно.

На пятерку! Но теперь, поскольку мы знаем, что y - и + v, пишите уж и самое решение.

И наш герой написал следующее:

$$y = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

- Ну вот, - произнес Мнимий, - и появилась эта знаменитая формула Кардана для решения кубического уравнения.

- Так, - сказал Илюша, любуясь своим произведением, -< это я теперь как будто сообразил. Но при чем же тут мнимые человечки?

- А-а-а, - важно протянул Мнимий, - вот вас что интересует! Ну что же? Мы постараемся приподнять завесу этой трудной научной тайны.

- Жаль, что в науке есть еще тайны!

- Н-да... - протяпул Мнимий. - В общем, конечно, досадно. Но ведь эти тайны исходят не от науки, они, скорее, принадлежат природе. Человек начинает с самого простого, а затем идет все дальше, все время углубляет свои знания, раскрывает тайну за тайной, похищая их у Природы! И вот вы сами видите в наши дни, как увеличивается могущество человека. А те тайны науки, о

которых вы сокрушаетесь, - это уж не совсем тайны, это ее трудности, но опыт показывает, что их можно одолеть. Вы могли видеть сами на примере решения кубического уравнения, как осторожное расширение способа двучленного уравнения позволяет добиться новых результатов. Трудность основная в том, что при всяком таком расширении области, где применяется данный способ, дело усложняется новыми обстоятельствами и обычно такими, которые ранее невозможно было не только предвидеть, но даже и представить себе.

- 435 -

С развитием науки приходится решать более сложные и запутанные задачи. К примеру: обычное уравнение имеет одно решение; квадратное уже дает два, причем бывает, что оба имеют смысл самый простой, а случается и другое!

А кубическое уравнение, вообще говоря, должно давать три решения, но, даже и получив все элементы, из которых легко составить эти решения, надо еще сперва сообразить, как их составлять. Мы недавно любовались на график квадратного уравнения, но ведь график кубического уравнения, то есть кубической параболы, гораздо сложнее и все случаи решения кубического уравнения много хитрее. Кубическое уравнение может иметь три действительных корня, либо один действительный и два комплексных корня. Переходя к графику, мы видим, что кубическая парабола может иметь различные формы: 1) парабола пересекает ось абсцисс однажды (все три действительных корня равны друг ДРУГУ); 2) парабола пересекает ось абсцисс однажды и однажды ее касается (три действительных корня, причем два из них равны друг другу); 3) парабола пересекает ось абсцисс трижды (три разных действительных корня); 4) парабола пересекает ось абсцисс однажды, а кроме того, у нее имеются еще два сопряженных комплексных корня.

- По-моему, я такую параболу видел, - вспомнил Илюша, - в Схолии Шестнадцатой, там еще была и такая, которая у вас здесь под номером третьим.

- Это верно, - подтвердил Радикс, - так и было.

- В этом последнем случае, значит, - продолжал Илюша, - эти комплексные корни будут: один a + bi, а другой, ему сопряженный, a - bi.

- Конечно, - подтвердил Мнимий. - Но ведь это еще отнюдь не все. Самое удивительное качество решения кубического уравнения, которое крайне поразило алгебраистов шестнадцатого века, заключается в том, что иногда попадается такое кубическое уравнение, что если мы станем решать его по Кардановой

формуле, то, невзирая на то что все три корня его вещественны, формула Кардана выражает эти корни мнимыми радикалам и, и можно доказать, что ничего иного из формулы Кардана вообще получить невозможно.

То есть истинное решение словно прячется за мнимостями! Это тот случай, который Кардаи называл "неприводимым" (Кардан уже знал, что у кубического уравнения три корня). Тут болонские алгебраисты впервые убедились, что наши мнимые человечки действительно существуют, активно участвуют в алгебраических построениях и при решении самой вещественной задачи невозможно обойтись без того, чтобы с ними не встретиться. Тут надо вот что еще иметь в виду: обычные числа человек придумал для счета.

- 436 -

Всякого рода задачи, которые пришлось решать, привели неизбежно к понятию различных математических образов, которые получаются по крайней мерс; из пары чисел, как, например, сумма, разность, произведение, частное или дробь. А затем уже пошли еще более сложные построения, как и мы, мнимые человечки, которые выросли из задач, связанных с квадратным уравнением. Счет - одно, а расчет - другое! Но именно для того, чтобы наши расчеты не противоречили простому счету, чтобы правильность счета нигде и никогда не нарушалась, и приходится вводить такие сложные и хитрые построения, где из пары чисел получается одно особенное число. Но ведь зато и результаты получаются обширные и замечательные! Однако самая суть дела в том, что кубическое уравнение с его необычайными сложностями заставило математиков понять, что мы, мнимые хитроумные человечки (от которых до той поры, встречаясь с нами в квадратных уравнениях, просто отмахивались!), вовсе не случайные призраки, а самые настоящие граждане и деятели математического мира!

- Все-таки трудно... - признался Илюша.

- Разумеется, не очень просто, - согласился Мнимий. - Но вы подумайте еще о том, что в те времена все это было еще трудней, потому что нашей удобной алгебры с буквенными знаками еще не существовало. Тарталья, кстати сказать, изложил формулу Кардана в стихах, а потребовалось ему для этого двадцать пять строк!

- Ого, - отозвался Илюша, - целая поэма!

- Вот именно. И что было делать с этой формулой, как рассудить о ее странностях, долгое время не знали. Пока кубическое уравнение таково, что у него только один действительный корень, выражение под квадратным корнем

$(q/2)^2 + (p/3)^3$

больше нуля, и тогда вычисления не так трудны. Но в другом случае - и как будто в самом простом, ибо тогда все три корня действительны! - это выражение становится меньше нуля, и как быть с формулой, неясно. Только через четверть века Рафаэль Бомбелли, последователь Кардана, нашел выход из положения. Начал он, как нередко в таких случаях бывает, с частного случая, с численного примера. Он взял такое кубическое уравнение:

$x^3 - 15x = 4$

Решить его ничего не стоит без всякой формулы... Как вы скажете?

- 437 -

Илюша в ужасе уставился на уравнение. Наконец еле выдавил из себя:

- Четыре в квадрате - шестнадцать, а здесь пятнадцать, а четыре в кубе - шестьдесят четыре... Мне кажется, что решение равно четырем, потому что:

$64 - 15 \cdot 4 = 64 - 60 = 4.$

- Вы совершенно правы! - весело воскликнул Мнимий. - Как видите, решить совсем нетрудно. А теперь попробуйте с формулой Кардана. И тотчас получается:

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$$

Как тут быть, неизвестно. Из (+ 121), конечно, квадратный корень извлечь небольшая хитрость, но ведь здесь минус.

Однако попробуем переписать теперь это по-нашему:

$$x = \sqrt[3]{2 + 11\sqrt{-1}} + \sqrt[3]{2 - 11\sqrt{-1}} = \sqrt[3]{2 + 11i} + \sqrt[3]{2 - 11i}$$

Из этого выражения Бомбелли получил (как мы теперь пишем!) такие равенства:

$$\sqrt[3]{2 + 11i} = 2 + i; \quad \sqrt[3]{2 - 11i} = 2 - i$$

Если вы возведете каждое из этих равенств в куб, пользуясь формулой сокращенного умножения, вам хорошо известной, вы убедитесь, что равенства эти справедливы. Поскольку искомый икс равняется сумме этих двух выражений, то мы получаем...

Илюша немедленно написал ответ:

$x = (2 + i) + (2 - i) = 2 + 2 = 4.$

- Выходит, - решил он, - что искомый корень представился в виде суммы двух сопряженных комплексных чисел, а эта сумма, как мы уж знаем, есть действительное число! Значит, оно только спряталось за мнимыми числами. Но ведь должны быть и другие корни? Их ведь два еще должно быть как будто? Как их найти? Один корень мы нашли, - рассуждал Илюша, - левая часть уравнения должна состоять из трех множителей.

- 438 -

Но из нашего решения ясно, что один из множителей будет равен

(x - 4);

значит, если я перенесу все члены нашего уравнения влево и разделю затем эту левую часть на этот одночлен, получится квадратное уравнение, а из него можно раздобыть остальные два корня:

$(x^3 - 15x - 4)/(x - 4) = x^3 + 4x + 1$

Илюша еще немного покопался с вычислениями и написал:

$x_1 = 4{,}000$; $x_2 = -2 + \sqrt{3}$; $x_3 = -2 - \sqrt{3}$

или приближенно:

x2 = -0,268; x3 = -3,732.

- По теореме Виеты выходит. И сумма корней равна нулю! Попробую проверить значения корней. Для этого я буду придавать иксу целочисленные значения от минус шести до плюс шести и посмотрю, где кривая пересечет ось абсцисс.

Илюша так и сделал. Получилась табличка, а за ней и кривая, которую можно разглядеть на чертеже[38].

x	x^3	-15x	Свободный член	Сумма
-6	-216	+90	+75	-130
-5	-125	+75	+60	-54
-4	-64	+60	+45	-8
-3	-27	+45	+30	+14
-2	-8	+30	+15	+18
-1	-1	+15	0	+3
0	0	0	-4	-4
+1	+1	-15	-4	-18
+2	+8	-30	-4	-26
+3	+27	-45	-4	-22
+4	+64	-60	-4	0
+5	+125	-75	-4	+16
+6	+216	-90	-4	+122

- Ишь как хорошо вес выходит! - воскликнул Илюша, закончив табличку. - На четверке нуль...

- Сделаешь верно, и получается хорошо, - заметил Радикс.

- А те два других корня по чертежу тоже очень хорошо подходят. В порядке! И действительно, кривая три раза пересекает ось абсцисс.

- Как ей и положено, - закрепил Радикс. - Рафаэль Бомбелли был человек способный, ученый и даже удачливый: говорят, именно ему удалось разыскать на полках громадной Ватиканской библиотеки рукопись творений грека Диофанта Александрийского, с которых и началась теория чисел, высшая арифметика. Возможно, что Диофант в решении с Кардановой формулой навел Рафаэля Бомбелли на кое-какие полезные мысли.

Тут Радикс продекламировал такой стишок:

Вдоль по плоскости кривая

Очень правильно бежит,
Ось абсцисс пересекая,
Где корням быть надлежит!

- Там, где быть им надлежит, там как раз и пробежит! - поддакнул Мнимий.

Радикс проговорил скороговоркой еще стишок:

Как-нибудь уж, в самом деле,
Разберемся еле-еле
И рассмотрим все точь-в-точь,
Если нам синьор Бомбелли Догадается помочь...

И все весело рассмеялись. А Мнимий добавил:

- Надо вам знать еще, что неожиданные и своеобразные разоблачения Бомбелли в те времена скорее привели в недоумение ученых, чем направили их: к новым исследованиям.

И когда через некоторое время Виета обнаружил, что "неприводимый" случай Кардана можно разрешить тригонометрическим путем (как решение задачи о трисекции угла), то это, наверно, показалось облегчением (впрочем арабские математики нашли это решение примерно еще за целый век до Виеты). Однако трудно сказать, имело ли это какое-нибудь значение, ибо замечательная работа Бомбелли в свое время не была напечатана, хотя была известна и ее изучали крупные ученые.

- 440 -

Любопытно, что в те времена были уверены, что Виета открыл что-то совершенно новое, хотя на самом деле в решении Виеты новыми были только подстановки.

- Но я не знаю, как у Виеты получилось с трисекцией угла и с тригонометрическим решением.

- Неужто? - удивился Радикс. - Так сейчас узнаешь!

Виета напал на счастливую мысль привлечь к вопросу о решении кубического уравнения тригонометрические функции. Мы как будто в прошлой схолии рассматривали, что получается, если возвести комплексное число в квадрат. Из этого примера ясно, кстати, что одно равенство комплексных чисел равносильно двум равенствам действительных, ибо действительную и мнимую часть правой части равенства можно рассматривать по

отдельности. Согласен?

. Илюша задумался.

- Кажется... да!

- Если так, то мы начнем с формулы для косинуса двойного угла. Так или нет? Помнишь?

- Так, как будто. И она будет:

$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$.

- Хорошо. Не спорю. А теперь перемножение комплексных чисел (единичных комплексных векторов) из предыдущей схолии повторим еще раз с тем отличием, что наши комплексные множители будут иметь разные аргументы, то есть разные углы. Что мы получим?

Илюша тотчас выполнил это умножение и получил.

$\cos (\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$.

- Ну, а теперь у нас есть все для того, чтобы на основании этих двух формул написать еще формулу для косинуса троекратного угла, то есть для cos Ba + a), или в результате cos 3α.

На этот раз Илюша не очень долго возился, но все-таки помучился. Радикс напомнил ему, что ведь "без труда и рыбку не вытащишь из пруда", а не то что косинус троекратный!

И наконец получилась вот какая формула:

$\cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha$.

- Вот теперь все, что надо, у нас есть, и мы можем спокойно продолжать наши рассуждения. Попрошу вас только еще заменить cosa на x и написать в обычном для уравнения виде так, чтобы правая часть равнялась нулю, тогда как cos 3a будет у нас называться a.

- 441 -

Это задание было совсем уж простое, и Илюша написал.

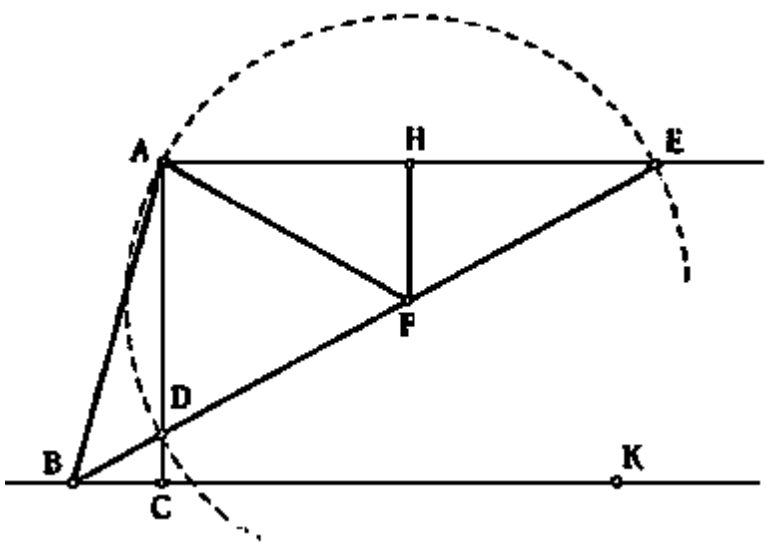
$4x^3 - 3x - a = 0$

- Так ведь это получилось кубическое уравнение и как раз такое, какое мы получали, когда уничтожили член с неизвестным во второй степени.

- Совершенно правильно! - отвечал Мнимий. - Представьте, эта же самая блестящая мысль пришла в голову и славному Франциску Виете! У вас, прямо скажу, был довольно способный предшественник!.. Теперь смотрите внимательно. Ведь из этого уравнения мы по данному углу можем найти угол в три раза меньший, а следовательно, перед нами способ для решения задачи древности - трисекции угла, или деления любого угла на три равные части. Заметьте: любого, ибо некоторые утлы, как, например, прямой угол, делятся на три части очень просто, циркулем и линейкой. Правда, обычно берут не косинус, а синус,

но перейти от того к другому не так трудно. А в общем, получается доступный способ для решения кубического уравнения, вернее, одного из его видов. Вот какие разнообразные выводы получаются при рассмотрении решения кубического уравнения. При этом очень важно еще и то, что решение Виеты как раз и есть то самое, которое разъясняет этот трудный случай, когда действительные корни скрываются под личиной мнимых (этот случай, как мы уж говорили, Кардан называл "неприводимым"). И отсюда Виета вывел, что либо кубическое уравнение получается наподобие двух пропорциональных (как при двоекубии!), и тогда у него только один действительный корень, либо они сводятся к трисекции угла, и тогда все три корня действительные. Входить в большие подробности я не буду; скажу только, что этим тригонометрическим способом Виеты можно пользоваться именно тогда, когда под квадратными корнями в формуле Кардана стоят отрицательные числа. В таком случае свободный член уравнения q можно выразить через синус некоторого троекратного угла, а затем, пользуясь тригонометрическими таблицами, без особого труда найти и самые корни. Все это, разумеется, на практике не очень удобно, но тут смысл не в том, чтобы добиться решения кубического уравнения (которое с помощью методов высшего анализа находится скорей и проще), а в том, чтобы рассудить о сути соотношений в алгебраических вопросах.

- Хорошо! - сказал Илюша. - Конечно, все это не очень легко... Но все-таки интересно, когда такую историю с разными алгебраическими чудесами разберешь подробно. Только вот еще что: ведь у древних был уже способ трисекции угла?



Невсис Паппа.
DE = 2AB
FH || AC
AH = HE

- Да, - отвечал Радикс, - такой способ был, даже не один. Интересен способ так называемого невсиса, или способ "линейки с двумя метками", с которым мы познакомились уже в Схолии Пятой, способ полезный и чрезвычайно поучительный. Архимед в своих трудах нередко пользуется этим способом. И в древности были такие чудаки, которые его за это поругивали! На линейке можно поставить две метки, а вообще при построениях циркулем и линейкой линейка служила только для того, чтобы провести прямую! И этих меток уже вполне достаточно, чтобы получить возможность решать кубическое уравнение. Вот как решает этим способом Папп Александрит задачу на трисекцию. На нашем чертеже дан угол ABC, который надо разделить на три части. Пусть AC _|_ BC; проведем через A прямую AE, параллельную BC, возьмем отрезок, который, как мы уже знаем, будет вдвое больше AB (для этого-то и нужны отметки на линейке!), так, чтобы его левый конец D лежал на AC, правый, то есть точка E, на AE, а продолжение его проходило бы через точку B.

В таком случае угол CBD будет равен одной трети угла ABC. Это надо доказать.

- Попробую, - отозвался Илюша. - Для начала найдем середину отрезка DE, поставим там точку F и соединим ее с точкой A. Значит, этот треугольник EAD прямоугольный.

Вокруг него можно описать окружность, рассматривая отрезок DE как диаметр. Но если точка F будет его центром, то все три отрезка, то есть FD, AF A EF, равны друг другу, как радиусы этого описанного круга, и каждый равен половине отрезка DE или отрезку AB. Дальше: треугольник ABF, очевидно, тоже равнобедренный в силу этого последнего равенства, а значит, его углы ABF n AFD равны друг другу. Треугольник AFE, конечно, тоже равнобедренный, это ясно из тех же равенств отрезков. Но угол AFD по отношению к треугольнику AFE есть его внешний угол, и следовательно...

- Ну хватит, пожалуй! -сказал Радикс - Я вижу, ты понял. Доказательство не такое уж хитрое. Правильно ты начал рассуждать.

- Так и есть! - согласился Мнивши. - Очень похожее решение этой задачи даст примерно тем же методом и Архимед.

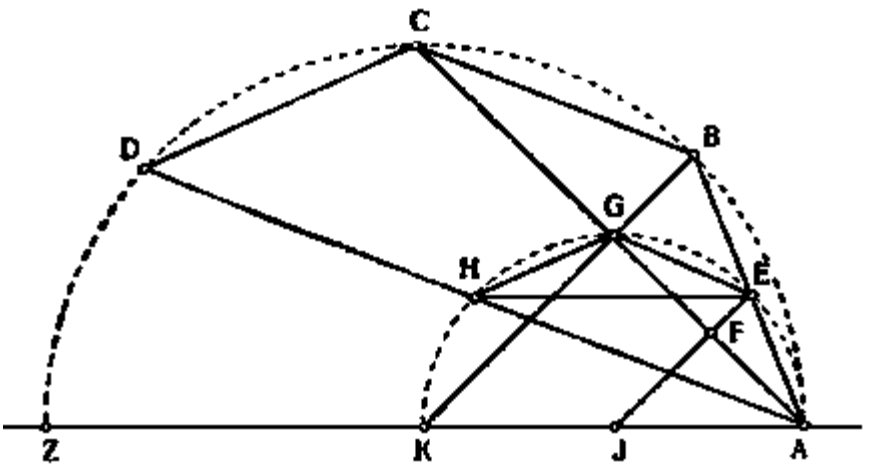
Ученые полагают, что именно раздумья над этим невсисом Архимеда[39] и привели Виету к открытию тригонометрического

решения кубического уравнения, так что иевсис оказал немалые услуги нашей науке. Виета выяснил, что задача трисекции угла, над которой так мучились в древности, тем и трудна, что сводится к кубическому уравнению.

- Хорошо! - сказал с удовольствием Илья, который был в прекрасном настроении, поскольку ему удалось перескочить через длинное доказательство насчет невсиса и трисекции. - Но мне хочется, чтобы вы еще сказали несколько слов насчет этого знаменитого "правила циркуля и линейки".

- Видишь ли, - отвечал Радикс, - один из крупнейших древнегреческих ученых, Аполлоний Пергенсгага, современник Архимеда, в своем сочинении о конических сечениях говорит о том, что все геометрические построения должны выполняться только с помощью циркуля и линейки. Вообще в Древней Греции этого правила, конечно, не придерживались, но ему придавали очень большое значение в эпоху возрождения наук в Европе. Этот интерес несколько ослаб, когда Виете удалось впервые обнаружить, что именно это требование означает алгебраически: в таком случае нельзя пойти дальше построения корня квадратного, то есть решения квадратного уравнения либо такой задачи, которая сводится к последовательному извлечению ряда квадратных корней.

Трисекция Гиясэддина ал-Каши.



Хорды - двойные синусы. По теореме Птолемея (если четыре вершины четырехугольника лежат на окружности, сумма произведений противоположных сторон равна произведению диагоналей), из четырехугольника AEGH, AE = EG = GH и EH = AG, выводим, что $AG^2 = AE^2 + AE \cdot AH$. По теореме Евклида (произведение отрезков хорды равно произведению отрезков

диаметра, проходящего через точку пересечения диаметра с хордой), так как AG = GC, получаем $AG^2 = BG \{2R-BG)$, где R - радиус большого круга; затем но теореме Пифагора из треугольника ABG выводим: $AG^2 = 4AE^2 - (4AE^4 : R^2)$.

Приравнивая два выражения для AG, получаем: $AE^2 + AE \cdot AH = 4\ AE^2 - (4\ AE^4 : R^2)$. Полагая, что AE = sin a и что AH - sin 3a (ибо хорда AH стягивает утроенную дугу), а R = 1, получаем для любого угла выражение $3 \sin a - 4 sir^3\ a = sin\ 3a$.

Благодаря этому построению замечательные самаркандские математики в XV веке сумели вычислить синус одного градуса с восемнадцатью точными знаками после запятой.

Среди средневековых работ есть одна замечательная трисекция угла, выполненная очень простыми средствами Гпясэддином ал-Канш, талантливым математиком, одним из последних ученых исламитского мира, который трудился у знаменитого астронома Улугбека в Самарканде в пятнадцатом веке. Работы Улугбека были уничтожены реакционным духовенством, его обсерватория разрушена, а сам он был убит. Но память о работах ученых его школы осталась, и в шестнадцатом веке Мариам Челеби, внук ар-Руми, астронома, работавшего вместе с Улугбеком, обнародовал решение задачи трисекции угла. В Европе это решение узнали только в девятнадцатом веке. Это решение но дает искомого угла построением, как невсис Паппа. Но при его помощи можно получить нужное кубическое уравнение.

- 445 -

- А как потом решали кубические уравнения?

- К этому труднейшему вопросу вернулись через некоторое время. Сначала Эйлер со свойственной ему наблюдательностью заметил, что по формуле Кардана получается девять значений корней, тогда как ясно, что нужны всего три. И Эйлер показал, как надо комбинировать между собой эти значения, чтобы получить те три, которые нужны. Таким образом выяснилось, что в формуле Кардана таится еще один неожиданный секрет.

- А почему девять значений? - удивился Илюша.

- Да ведь в формуле Кардана два кубических корня, у каждого три значения, и если каждое из трех значений первого комбинировать с тремя значениями второго...

- ... то и получим девять! - заключил мальчик. - А как их комбинировать?

- У вас ведь есть уравнение:

$uv = - p/3$

так вот мы и должны так их соединять, чтобы их произведение давало бы как раз эту величину, то есть - у. Это как

раз и заметил Эйлер. Однако вскоре выяснилось, что можно действовать еще и другим способом, очень интересным...

- Как это так?

- Все это можно сделать, опираясь на важные положения, касающиеся извлечения корней из комплексных чисел. Эта операция не очень проста. Она делается при помощи так называемых корней из единицы...

- Не совсем понимаю, - перебил Илья, - запутался!..

- Ничего, смелее! Допустим, что мы извлекаем из комплексного числа корень пятой степени. Переходим к тригонометрической форме комплексного числа и пишем:

$$\sqrt[5]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \sqrt[5]{r}\left[\cos\left(\frac{\varphi}{5} + k\frac{2\pi}{5}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{5} + k\frac{2\pi}{5}\right)\right]$$

где к = О, 1, 2, 3, 4, как мы уже это выяснили ранее. Но когда мы перемножаем комплексные числа, углы, вернее, аргументы комплексных чисел складываются и ничто не мешает суммы аргументов разъединить и написать извлечение корня пятой степени в таком виде:

$$\sqrt[5]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi} = \sqrt[5]{r}\left(\cos\frac{\varphi}{5} + i\sin\frac{\varphi}{5}\right)\left(\cos\frac{2\pi r}{5} + i\sin\frac{2\pi r}{5}\right)$$

- 446 -

Отсюда вытекает утверждение, что все значения корня из комплексного числа можно получить, умножая одно из этих значении на разные значения корпя той же степени из единицы, то есть на вторую скобку правой части. Представляете себе?

- Кажется, теперь представляю, - осторожно признался Илья. - Только разве это так важно, написать в таком виде, а не в другом?

- В таком кропотливом деле, как это, - отвечал Мнимий, - нельзя пренебрегать ни малейшим упрощением. Так и в данном случае, то есть для куба, при решении уравнения

$x^3 = 1$

Первый корень, конечно, равен единице, а другие диа...

- Другие два, - подсказал Илюша, - получаются из квадратного уравнения, то есть из такого:

$(x^3 - 1) / (x - 1) = x^2 + x + 1$

где в правой части неполный квадрат суммы. Решая квадратное уравнение, получаем:

$$x_2 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}; x_3 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$$

- Правильно... - заметил Мнимий. - Но давайте проделаем еще один поучительный опыт: возведем наш только что полученный икс-второй в квадрат:

$$\left[\frac{1}{2}\left(-1+i\sqrt{3}\right)\right]^2=\frac{1}{2}\left(-1-i\sqrt{3}\right)$$

- И получился, - сказал Илья, - не кто иной, как сам пкс-третий! Ну, а если его еще и в куб?.. Правильно! Единица получается. Все в порядке.

- Так вот, - продолжал Мнимий, - назовем один из корней из единицы, то есть наш икс-второй, греческой буквой альфа. Тогда пкс-третий, как вы только что выяснили, будет a^2. А теперь я должен еще отметить, что среди всех корней из единицы (для квадратного корня два, для кубического три, и так далее, то есть пх число совпадает с числом единиц в показателе корня) имеются такие корни, которые обладают весьма интересным и полезным свойством. Если мы один из таких корней будем возводить последовательно в возрастающие степени, начиная со второй, то получим все остальные корни данной совокупности.

Например, второй и третий корни кубические из единицы (первый, конечно, единица) обладают этим свойством, так что

$a_2^2 = a_3$; $a_3^2 = a_2$; $a_2^3 = a_1 = 1$.

Если же взять для другого примера все корни шестой степени из единицы, от cti до (Хб, то из них только два (а именно ai и as) обладают этим свойством и называются первообразными корнями. Например, из корней четвертой степени пергообразных только два (a2 и a4), тогда как для пятой степени все корни, не считая первого, равного 1, будут первообразными. Если вписать в единичный круг правильный многоугольник, одна вершина которого лежит в точке с координатами A,0), то можно заметить, что только те его вершины будут давать первообразные корни, которые принадлежат именно этому многоугольнику, но отнюдь не какому-либо другому - с меньшим числом сторон и одной вершиной к точке с координатами A,0). Прошу покорнейше запомнить это правило. Оно нетрудное. А теперь мы можем спова перейти и к формуле Кардана. Если у нас есть уравнение кубическое:

$y^3 + py + q = 0$,

а формулу Кардана напишем в таком сокращенном виде:

$$y=\sqrt[3]{A^3}+\sqrt[3]{B^3}$$

то корни нашего уравнения будут таковы:

$y_1 = A + B$;

$y_2 = a\alpha A + \alpha^2 B$;

$y_3 = a\alpha^2 A + \alpha^2 B$;

- Все-таки, - вымолвил опасливо Илюша, - это получается не так-то просто... С квадратным одна минута, а тут...

- Есть и более сложные задачи, а у сложных задач и способы решения довольно хитрые. Да это еще не все! А дальше способен слушать? А то закроем заседание нашей комиссии - и по домам!

- Нет, нет, - взмолился Илюша, - мне хочется все-таки до конца дослушать!

- 448 -

- "До конца"! -повторил ворчливо Радикс. - Ты думаете, у этой штуки есть конец? Что касается меня, то я в этом отнюдь не уверен. Так еще немножко проползти можно...

- Поползем! - ответил Илюша, вздохнув потихонечку.

- Воля твоя, - отвечал Радикс, - только потом чтобы не жаловаться, что, дескать, замучили!

- Не буду жаловаться! - храбро заявил Илья.

- Тогда слушай дальше, - продолжал Радикс.

- Слушаю!..

- В конце восемнадцатого века замечательный французский математик Лагранж пытался разобраться во всех способах решения уравнений третьей и четвертой степеней. После того как Эйлер нашел сочетания значений двух кубических корней в формуле Кардана, чтобы получить значения всех трех искомых корней, изучение алгебры комплексных чисел сильно двинулось вперед. Лагранж обратил внимание на то, что любой из двух кубических радикалов в формуле Кардана можно выразить через три корня уравнения при помощи следующей формулы (в зависимости от того, какой корень считается первым, какой - вторым, какой - третьим):

$1/3(x_1 + \alpha x_2 + \alpha^2 x_3)$

- Совсем я запутался! - с огорчением пробормотал Илья. - Чем эта формула поможет? Откуда взять корни, когда я еще не решил уравнения? Значит, надо сперва воспользоваться формулой Кардана. Какой смысл в этой формуле?..

- Видите ли, - вмешался Мнимий, - вы правы в том отношении, что 13 деле разыскания корней эта формула помочь не может. Но чтобы представить себе, как связаны корни кубического уравнения с его коэффициентами, она в высшей степени полезна.

- Опять не понимаю! - снова огорчился мальчик. - Ведь мы же знаем, какие для Кардановой формулы делали два раза подстановки! Разве из этого нельзя вывести, какие получаются соотношения между корнями и коэффициентами?

- Того, что мы знаем о наших подстановках, еще мало.

Потому что те подстановки, которые годятся для кубического уравнения, не подходят для уравнения четвертой степени, а следовательно, это способ не общий. Кроме того, пока самый

способ решения нельзя проверить - или, как говорится, проанализировать, - невозможно подойти и к рассмотрению всего вопроса в целом об алгебраических уравнениях. Ведь мало еще догадаться, каково решение, надо дознаться, почему оно такое, а не иное.

- 449 -

- Возьмем квадратное уравнение, - предложил Радикс, - хорошо тебе известное. Что ты скажешь, если я предложу тебе для него такую формулу? Ты с ней согласишься?

$x = 1/2[(x_1 + x_2) \pm (x_1 - x_2)]$

- Д-да... - сказал Илюша неуверенно. - То есть если припомнить общую формулу квадратного уравнения

$(x_1 + x_2)(x_1 - x_2) = 0,$

потом открыть в ней скобки

$x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2 = 0,$

а затем применить к такому выражению всем известную формулу, для решения квадратного уравнения, то как раз и придешь к твоей формуле. И действительно, она показывает, как формула решения связана с корнями. Но ведь в квадратном уравнении все так просто!

- Боюсь, - вымолвил Мнимий, - что вас пугают эти самые альфы в формуле Лагранжа. Не так ли? А ведь мы о них недавно говорили... Вспомните-ка!

- Говорили...

- А что именно?

- Что с их помощью получаются все значения корней из комплексного числа...

- Разве? - сказал удивленный Радикс. - Как же это возможно? Мыслимое ли это дело?

Илюша посмотрел на своего друга укоризненно.

Что-то очень маленькое и беленькое вдруг упало у ног Илюши, а потом пошел целый снег из этих маленьких беленьких... Одна штучка упала Илюше прямо на руку, и он увидал, что на ладошке у него лежит крохотная беленькая альфа. А кругом так и сыплются все новые и новые маленькие беленькие альфы...

А Мнимий посмотрел на эту альфообразную метель и признался:

- А ведь в самой своей сущности я тоже альфа!

Илюша взглянул на него и сказал:

- Когда мы разбирали пример Бомбелли, я, кажется, понял, что под корнями в формуле Кардана стоят сопряженные комплексные числа... Ну вот, отсюда и альфы, чтобы получать один за другим все значения корня из комплексного числа! Теперь я как будто разобрался. Значит, Лагранж дал формулу

Кардана но просто в виде результата двух подстановок, а так, как она складывается из самых корней.

- 450 -

И тут альфовый снежок стал стихать.

- Так-с... - произнес наставительно Мнимий. - Это похоже на дело. Но теперь на минутку давайте снова вернемся к квадратному уравнению. Вы этого не бойтесь! Поверьте, что все те крупные ученые, которые это разбирали, тоже не раз вспоминали о квадратном уравнении. Так вот вам еще один вывод для формулы решения квадратного уравнения, причем чрезвычайно полезный. Нам ведь хорошо известно, что по формулам Виеты сумма корней квадратного уравнения ($x2 + px + q = 0$) равняется коэффициенту при неизвестном в первой степени с обратным знаком, то есть:

$x1 + x2 = -p$.

Возьмем еще одно выражение, составленное из тех же корней, только не сумму, а разность, и возведем ее в квадрат:

$(x_1 - x_2)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = p^2 - 4q$

Отсюда сразу можно написать, что

$x_1 + x_2 = - p$

$x_1 - x_2 = \pm \sqrt{(p^2 - 4q)}$

Сложим эти два равенства и сейчас же получим известную формулу решения квадратного уравнения. Не так ли?

- Так, конечно, - отвечал Илюша. - Из суммы этих выражений один корень получаем, а из их разности - другой.

Все понятно. Выходит, что мы этим способом получили два уравнения первой степени. Раз нам нужно два решения, то мы можем к ним прийти через два уравнения первой степени... То есть я не знаю, всегда ли так должно получаться, но во всяком случае с квадратным уравнением именно так и получается...

- Допустим... - отвечал Мнимий. - Но лучше сказать, пусть так будет вплоть до первого противоречия с этим предположением либо допущением.

- А если встретится противоречие?

- 451 -

- Тогда посмотрим. Попробуем его обойти, а если не удастся, придется видоизменять наше допущение. Когда Лагранж, пытаясь обнаружить общее правило из разных решений алгебраических уравнений, нашел наконец свою замечательную формулу, он заметил, что три корпя в ней надо брать в некотором вполне определенном порядке, а это натолкнуло его на новые плодотворные опыты. Если взять все три корпя кубического уравнения, то есть x1, x2 и x3, то, если их брать не только в той последовательности, которая оказалась необходимой - вместе с

нашими помощницами, альфами, - но и во всех остальных...

- Интересно, - заметил Радикс, - а сколько будет этих всех остальных?

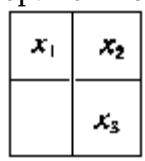
И оба, Радикс и Мнимий, внимательно посмотрели на нашего героя, Илью Алексеевича.

- Остальных последовательностей корней? - неуверенно повторил мальчик. - Не понимаю вопроса... Или, может быть, о порядке вы говорите? Тогда вы меня о перестановках спрашиваете?..

Не отвечая ни слова, Радикс и Мнимий все так же пристально смотрели на Илюшу, который чувствовал себя под их взглядами не в своей тарелке.

- ... и уж если это так, - в полной неуверенности продолжал он, - то раз всего три корня, то, как их ни переставляй, выйдет только шесть различных последовательностей. И все.

Опять полная тишина. Вдруг Илюша почувствовал, что в его левой руке оказалась маленькая коробочка, и действительно, это был просто самый маленький Дразнилка с тремя шашками. Только на шашках были изображены символы корней:



Илюша начал машинально двигать шашечки, но ничего нового или интересного не обнаружил. Да, действительно, всего получалось шесть перестановок! Но он это давно знал:

$(x_1\ x_2\ x_3)$; $(x_2\ x_3\ x_1)$; $(x_3\ x_1\ x_2)$;

затем опять получается то же самое. А если переставить две шашки, ну, скажем, x_2 и x_2, то получатся еще три случая:

$(x_2\ x_1\ x_3)$; $(x_1\ x_3\ x_2)$; $(x_3\ x_2\ x_1)$;

а потом снова то же.

- Шесть, - согласился Мнимий, - спору нет. Но вам пришлось однажды что-то менять в первом расположении. Это как надо понимать?

- Это как бы два круга Дразнилки; первый можно назвать четным кругом, а второй - нечетным, потому что в первом случае одна шашка постоянно обходит две шашки, как и полагается в Дразнилке, а во втором сначала обходят одну шашку, и порядок меняется. Перейти от одного круга к другому, не вынимая одной шашки из коробочки, нельзя.

При перестановках каждый раз первая шашка попадает в конец направо.

- Вес верно, - подтвердил Мнимий. - Итак, два круга, причем

один в другой непосредственно не переходят..

- Да, и если отразить какую-нибудь перестановку первого (четного) круга в зеркале, то выйдет перестановка второго круга (нечетного).

- Хорошо, - подхватил Мнимий, - это важное замечание.

Мы можем отметить, что названные вами два круга Дразнилки-Малого зеркально симметричны.

- Похоже, что так, - неуверенно произнес Илюша.

- Мы встретились с явлением, которое называют **симметрией**. Вы ведь знаете, что такое преобразование? - спросил Мнимий.

- Да, конечно, - отвечал Илюша, - например, подобие. Потом еще умножение на комплексный вектор, как мы уже в прошлой схолии рассматривали, подобие и поворот... А еще у нас дома есть подставка для чайника. Она раздвижная - может быть квадратом, а потянешь за уголки, получается ромб. Папа говорит, что это преобразование...

- А по-твоему, это что? - спросил Радикс. - Из квадрата - ромб, и обратно. Чем не преобразование? Такие преобразования называются аффинным и. Если бы на квадрате был нарисован круг, что бы ты из него получил при аффинном преобразовании?

- Может быть, эллипс? - неуверенно ответил Илюша.

- А почему бы и нет?

- Я - "за"! - отвечал храбрый Илья.

- Присоединяюсь, - заключил Радикс.

- Так вот, - снова начал Мнимий, - чтобы ответить на вопрос, что такое симметрия, необходимо и ее тоже рассматривать как некоторое преобразование. У нас, например, есть равнобедренный треугольник; пусть его основание не равно одной из его сторон, значит, он симметричен относительно своей высоты; при повороте на 180° вокруг высоты он совместится сам с собой. Разумеется, мы не принимаем в расчет, какой стороной он к нам повернут. Равносторонний треугольник симметричен не только относительно высоты, но относительно каждой из своих высот (они же медианы и биссектрисы).

Аналогично мы рассуждаем и о телах...

- 453 -

- Бабочка симметрична!

- Ну конечно! это уже касается тела в пространстве.

Одним словом, явление симметрии - вещь понятная. Здесь преобразование - во всех наших случаях - сводится к повороту, но самым "процессом поворота" мы но интересуемся (этим делом механика занимается), а смотрим только на то, что из этого поворота получилось. Кроме поворота, еще возможно зеркальное

отображение - симметрия относительно плоскости (с настоящим зеркалом) либо относительно прямой (как для сопряженных комплексных векторов) и параллельный перенос в плоскости или вместе со всей плоскостью. Это все геометрическая симметрия. Но возможна еще и симметрия в алгебраическом смысле, симметрия многочленов.

Вот как раз в этом-то случае к нам и приходит на помощь понятие перестановки, с помощью которой мы можем уяснить и записать алгебраическую симметрию. Хотя, конечно, на первый взгляд перестановки непосредственно симметрией и не обладают, но, например, мы обнаружили, что все шесть перестановок из трех элементов разделяются на две части (по три), связанные между собой зеркальной симметрией. Если мы теперь возьмем формулы Виеты, известные нам по квадратному уравнению, но которые легко написать и для кубического уравнения, начиная с того, что свободный член всегда равен произведению всех корней, то...

- Значит, - перебил мальчик, - мы получим для уравнения:

$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$,

если начать с такой записи уравнения:

$(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) = 0$,

такие выражения для его коэффициентов через его корни:

$c = x_1x_2x_3$

$b = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$

$-a = x_1 + x_2 + x_3$.

Знаки меняются.

- Так-с... Так вот, именно эти выражения Виеты обладают очень важным свойством: они не меняются, если переставлять в них корни. Проверьте!

- Насчет а и с, конечно, верно, потому что это сумма и произведение. А как быть с b? Если поменять местами икс-первый и икс-третий?.. Верно! То же самое получается.

- Поэтому математики называют эти функции корней из формул Виеты симметрическими функциями. Для алгебраических уравнений любых степеней они строятся по одному и тому же правилу, которое вы уже указали А у кубического уравнения есть еще одно общее свойство с Дразнилкой Малым. Когда мы разбирали пример Рафаэля Бомбелли, вы ведь заметили, что кубические корни, им полученные, суть сопряженные комплексные числа, то есть величины неравные, хотя и геометрически зеркально симметричные. Свойство это заключается в том, что существует такая функция корней кубического уравнения, которая при всех перестановках может

принять только два значения - это и будут подкоренные величины кубических корней в Кардановой формуле.

- Вроде, как два круга разной четности у Дразнилкн Малого? - осторожно спросил Илюша.

- Похоже, но не больше... Эта функция, найденная Лагранжем, такова:

$(x_1 + \alpha x_2 + \alpha^2 x_3)$.

Она может принимать только два значения, поэтому появляется возможность приравнять их двум корням квадратного уравнения, что и позволяет нам построить Карданову формулу, то есть найти решение кубического уравнения. Вот как примерно через два века была выяснена сущность Кардановой формулы.

Вслед за этим Лагранж рассмотрел и решение уравнения четвертой степени, которое приводится не к квадратному уравнению, а к кубическому, однако теперь это уже не страшно!

- А уж с четвертой степенью, наверно, ужасно трудно... - заметил Илюша.

- Да, не так просто! Но Лагранж и для этого уравнения нашел решение. Он вообще старался найти самый смысл решения, так сказать, ключ к этой удивительной загадке.

И ему многое удалось. Он даже предполагал, что именно в перестановках весь секрет этих сложнейших дел и прячется.

А потом оказалось, что это верно! Но все-таки даже и этой тонкой догадки еще было мало. Ученые бились над уравнением пятой степени, и Лагранжу с этой загадочной пятой степенью тоже ничего не удалось сделать. Он даже с горя начал поговаривать, что вообще с математикой дела плохи... Так что вы можете убедиться, что не только в средней школе с математикой огорчения случаются!

- Удивительные все-таки перестановки! Такие, мне казалось, простые...

- Сами математики долгое время не знали, какие в них таятся удивительные секреты, - отвечал Радикс, - и до чего полезные секреты! Физики, которые ныне занимаются строением атома, перестановкам уделяют много внимания. Алгебра теперь занимается главным образом математическими операциями и их соотношениями. Когда-то араб ал-Хорезми поругивал греческие геометрические "премудрости", расхваливая свою алгебру, которая помогает решать житейские арифметические задачи, а в разные отвлеченности, не интересные для торговой практики, не лезет. И оказалось в дальнейшем, что он жестоко ошибся! Как раз в алгебре-то и зародились самые отвлеченные разделы нашей науки. Благодаря этому развитию математика помогла физике

осилить задачи, которые раньше казались совершенно недоступными.

- А как же все-таки получилось с уравнением пятой степени?

- Сейчас я разъясню, - отвечал Мнимий - Я снова прошу внимания! Здесь есть один важный и трудный пункт... Тут вот в чем дело: Лагранж, человек редкой наблюдательности и проницательности, когда стал изучать симметрические функции, довольно скоро заметил, что знать только одни симметрические функции еще не достаточно для того, чтобы решить кубическое уравнение. И что в формуле Кардана незаметно запрятан еще какой-то важный секрет, без которого смысл ее все-таки еще остается темен. В чем же тут дело?

Самый трудный пункт здесь в том, что самые симметрические функции не позволяют еще отличить один корень от другого, и надо найти еще одну несимметрическую функцию корней, которая, в случае квадратного уравнения, принимает всегда одно-единственное значение (а для кубического уравнения- ровно два и не больше). Приглядитесь сами к решению квадратного уравнения. Там мы получаем две функции симметрические:

$x_1 + x_2 = -p$; $x_1x_2 = q$.

Но что с ними делать? Ведь чтобы разделить эти два корня, надо опять решать то же самое уравнение? Выходит, что мы мучались-мучались, а все равно не сдвинулись с места!

Так вот, в том-то и заключается вся сила, что возможно найти еще одну функцию корней, которая уже не будет симметричной и - а это-то и есть основное! - принимает одно и только одно значение. Это и будет функция ($x_1 - x_2$), о которой мы уже говорили. А зная сумму и разность наших корней, мы их немедленно находим, и при этом из уравнения первой степени, но не второй! Теперь - готово! Степень уравнения мы понизили, все в порядке. Совершенно так же для кубического уравнения мы ищем несимметрическую (знакопеременную) функцию, принимающую только два значения.

Для уравнения четвертой степени это будет несимметрическая функция с тремя значениями. Но дальше уже стоит незыблемая точка. Дальше этого в уравнениях с радикалами двинуться невозможно. Подробности вы когда-нибудь узнаете из учебника высшей алгебры, а ваш милый друг Дразнилка-Малый будет вам помогать изо всех своих крохотных силенок! Не думайте, что вы случайно, на первых же шагах, с ним встретились здесь у нас - в серьезном волшебном царстве для любознательных ребят!

Вы ведь поняли, наверно, что перестановки корней - когда их

всего три или четыре - обладают тем полезнейшим свойством, что с их помощью можно отыскать такую функцию корней, для которой число значений меньше числа корней данного уравнения. У кубического уравнения три корня и можно составить шесть перестановок, но можно . найти такую функцию корней, которая имеет только два значения, как мы уже говорили. Уравнения четвертой степени имеет четыре корня, их можно переставлять двадцатью четырьмя способами. Есть функция, имеющая только шесть значений, но с ними можно справиться, опираясь на помощь кубического уравнения.

- То есть вроде как мы делаем в наших биквадратных уравнениях?..

- Именно в этом роде. Но вот далее нас и подстерегает разочарование. В 1799 году итальянский врач и математик Руффини, занимаясь систематическим изучением перестановок, нашел и доказал теорему, что от пяти элементов (у которых будет сто двадцать перестановок) не существует таких функций, которые имели бы четыре или три значения.

А если так...

- Значит, степень уравнения нельзя понизить? .. - воскликнул Илюша.

- Выходит, - ответил Мнимий, - что дальше уж нельзя.

С уравнением пятой степени было не просто полторы тысячи неудач, а печто более серьезное: оказалось, что в этом роде задача не только не имеет решения, но и иметь не может.

В работе Руффини еще не все было очень гладко, а через сравнительно короткий срок гениальный молодой математик норвежец Абель дал безупречное доказательство положениям Руффини. Затем Абель нашел еще новые подробности насчет алгебраических уравнений. Коротко это можно так изложить: если уравнение таково, что между его корнями существуют некоторые сравнительно несложные отношения, его можно решить в радикалах. Но, к сожалению, для уравнений выше четвертой степени такие свойства имеют многие отдельные виды уравнений, но отнюдь не все. Вскоре этой задачей занялся гениальный юный француз Эварист Галуа, погибший на поединке с наемным убийцей, подосланным подлой полицией тогдашнего реакционного французского правительства.

- 457 -

В ночь перед трагической гибелью юный математик набросал свою работу. А она увидела свет только через четырнадцать лет после того, как ранняя могила поглотила этого замечательного юношу. Ему было всего двадцать лет...

- А его работа была очень сложная?

- Даже весьма сложная! - отозвался Мнимий. - Многие вопросы и решения снова оказались связанными с той же самой симметрией, но в еще более хитроумном виде по сравнению с тем, о чем мы уже говорили. Введены были и некоторые новые крайне важные общие понятия, сыгравшие свою роль не только в алгебре, но обогатившие и другие разделы нашей науки. Самый процесс постепенного упрощения уравнений был изучен во всей сложности. Для целого ряда, казалось бы, неодолимых препятствий были придуманы обходные хитрые пути, а затем и они сами подверглись исследованию, изучению, так что весь этот раздел математики сам превратился в исследование того, как именно строятся методы решения задач и на чем они в сущности своей основаны. Методы Галуа дали результаты удивительные и неожиданные: если мы сейчас не только убедились на опыте, но и знаем, что с помощью линейки и циркуля невозможно решить кубическое уравнение, то доказано это было в точности только после Галуа. Уравнения любой степени, у которых все коэффициенты при неизвестном в любой степени вплоть до нулевой (то есть, значит, до свободного члена) равны единице - а это и есть общее уравнение деления круга (с одним из них мы познакомились в предыдущей схолии), - всегда решаются, потому что они могут быть сведены к целой цепи уравнений низших степеней. Это опять же до конца разъясняется тем же Галуа. Однако я могу привести только отдельные примеры, хотя и они очень убедительны. В этом направлении наука сделада гигантские шаги. И чем дальше ученый забирается в глубь строения своих методов, тем меньше ему служит то, что можно сразу охватить наглядно. Поэтому вопросы рассуждения, то есть логики, получают все большее и большее значение. Ну вот! Это приблизительно все, что мы способны вам рассказать из этой удивительной, но крайне трудной и весьма отвлеченной области науки[40].

- Да, все-таки очень сложные формулы! - вздохнул Илюша.

- Да ими и не пользуются, - отвечал Мнимий, - имеются гораздо более доступные средства в дифференциальном исчислении.

- Ну-с, молодой человек, - выговорил степенно Радикс, - голова на месте?

- Кажется, на месте, - отвечал Илюша. - Трудно ужасно, так длинно!..

- Не так еще ужасно! - отвечал преспокойно Радикс. - А ты, кстати, видел, какую траекторию в пространстве описал тот советский спутник, который умудрился снять фотографию Луны с

той ее стороны, которую с Земли не видно? Как ты полагаешь, очень легко было ее вычислить?.. Ну, а громадные турбины на гидростанциях, их рассчитать просто? А скоростные и высотные самолеты? А счетные электронные машины? Ведь это все необходимые и неизбежные устройства в нашем веке! А расчеты, касающиеся атома и всего его строения, так это еще во много-много раз труднее. Но люди, твои современники, одолевают! Да еще каждый день и каждый час идут вперед... Так что хочешь не хочешь, а поспевать всюду надо!

- Конечно, - покорно пробормотал Илья, - я ведь не спорю...

- Тогда чем же ты недоволен?

- Мне ужасно обидно, что я все-таки самого главного не понимаю! Не понимаю, и все!

- Ишь какой сердитый! - заметил Радикс. - Из-за чего ты так раскипятился?

Илюша даже раскраснелся от волнения.

- Не могу поверить, чтобы эти Мнимии были просто открытием. По-моему, они в то же время еще и чье-то изобретение...

- Видишь ли, - отвечал ему Радикс, - всякое открытие если и не изобретение, то путь к нему. Открытие явления электрической индукции кончилось сооружением динамо-машины, то есть изобретением. Оно было основано на использовании открытия об индукции. Здесь, в вопросе насчет Мнимия, дело обстоит несколько сложнее, а в общем довольно похоже. Человек, изучая алгебраические уравнения, натолкнулся на эти "странные" комплексные числа. Оказалось, что анализировать некоторые очень важные вопросы алгебры без них невозможно - это было открытие! Но в дальнейшем, когда ученые постепенно примирились с этими "странностями", оказалось, что эти замечательные орудия научного прогресса крайне важны и для техники (в электротехнике, в самолетостроении, например), и тогда комплексное число стало привычным.

Догадка - великое дело в науке! Но ведь догадку надо обосновать, чтобы знать, где она пригодится, а где нет. И когда начинается обоснование догадки, начинается и самое построение этого образа или понятия, тогда это логическое построение понятия в известном смысле можно назвать изобретением, например, математические обозначен и я. Понятие интеграла, о котором мы уже говорили, было найдено, то есть открыто, примерно в одно и то же время Ньютоном и Лейбницем. Но Лейбниц придумал такие удобные обозначения в этом новом разделе нашей науки, которые сразу всем очень помогли, и вот

это было именно изобретением[41].

- Так вот-с... - промолвил Мнимий, - в заключение я должен буду еще сделать три важных замечания к нашей этой последней беседе. Первое заключается в том, что замечательные труды ученых о решениях уравнений высших степеней привели к выводу, что многие трудные вопросы по части уравнений можно уподобить двум очень простым задачам:

1) извлечению квадратного корня и 2) извлечению корня шестой степени. Первая задача не поддается никакому упрощению, тогда как вторая может быть разбита на две ступени - извлечение кубического корня, а затем из результата - извлечение квадратного. Так вот, общее решение уравнения пятой степени относится именно к первому классу задач. Второе - это то, что все подобного рода задачи очень тесно связаны с перестановками. Наконец, третье заключается в том, что вся замечательная теория Галуа в дальнейшем разрослась в целую математическую дисциплину, имеющую ныне крупнейшее значение. Хотя она и далека от непосредственной инженерной практики, но она дает математику в руки мощное орудие для решения вопроса о том, разрешима ли данная задача вообще (определенными средствами) или нет. Объектами математической мысли стали не самые числа, но операции над ними.

- 460 -

- Вот как, - сказал Илья, - пожалуй, я теперь больше спорить не буду. Кажется, теперь... ясно!

- Ну и прекрасно! - заключил Радикс. - Тогда давай в честь этого события споем и станцуем. Согласен?

- Еще бы! - обрадовался Илюша.

Они встали рядом, Мнимий им хлопнул в ладоши, и вот они вдвоем пустились в пляс, припевая довольно громко:

Метод двух прямых углов - Просто превосходный метод!

Прямо вам скажу, что этот Метод двух прямых углов Всё без чисел и без слов Нам про куб расскажет этот.

Метод двух прямых углов - Просто превосходный метод!

- 461 -

Схолия Двадцатая,

замечательная тем, что представляет собой Схолию Заключительную. А что же такое "схолия"? Откуда взялось это слово?

Так вот, древнегреческое слово "схолэ" означало "досуг", то есть свободное время. А в свободное от работы время люди стали учиться и учить других. Отсюда и наше слово "школа" произошло! Кроме того, ты должен знать, что Бонавентура Кавалъери, верный и высокоученый воспитанник Галилея, в своем сочинении "Геометрия, новым способом изложенная, помощью неделимых непрерывного", напечатанном в 1635 году, изложив свои постулаты, предположения, следствия, теоремы, леммы, определения, приложения и объяснения, доказательства и опыты, нередко присоединяет к ним также и схолии, которые являются разъяснениями к изложенному, подобно тому как схолии нашей книги являются разъяснениями удивительного путешествия И. А. Камова, нашего многоуважаемого героя. Что же касается содержания этой Схолии, то в ней излагается один серьезнейший разговор между близорукой обезьяной и дальновидным вороном, которые толковали друг с другом на чистейшем арабском языке о том, что можно считать вероятным, то есть достойным веры. А вслед за этим Илюше наконец показывают то, чего он до сих пор никак не мог увидеть, на чем наш поучительный рассказ и кончается.

- 462 -

- Пу-с, - сказал Радикс, - теперь тебе как будто ясно, что тут делает дружище Мним? Может быть, ты, кроме того, хочешь узнать, зачем он этим сейчас занимается? Ну, подожди еще немножко и все узнаешь. Идем-ка далее.

Они двинулись дальше, проходя одну за другой комнаты и залы, украшенные разными геометрическими узорами, необыкновенными телами и сложными аппаратами. Затем они прошли через огромный длинный зал, где почти беззвучно работали громадные машины такого сложного и хитрого устройства, что Радикс только рукой махнул, когда Илюша спросил его, что это такое. Так как Илюша и без того был набит по горло новой для него премудростью, он вздохнул и решил отложить знакомство со всякими этими хитростями на будущее. Но около одного тела вращения, которое вертелось на громаднейшей Центрифуге с бешеной быстротой, то вытягиваясь, то снова сжимаясь, Илюша не мог удержаться и снова спросил Радикса, что это такое.

- Это машина, которая в будущем будет изучать законы землетрясений. Покуда это еще опытная установка. Тут дело в том, что океанские приливы, как ты, может быть, уже слышал, вызываются притяжением Луны. Когда-то Кеплер так и сказал: "Не будь на свете земного тяготения, все океаны вылились бы на Луну!" Так вот, видишь ли, земная кора как бы плавает в магме. Кора эта по отношению ко всей массе Земли представляет собой тоненькую корочку. И она также испытывает весьма серьезные натяжения в результате притяжения Луны. Насколько грандиозны эти сплы, можно составить себе представление, приняв во внимание хотя бы то, что приливная волна океана у берегов Канады достигает пятнадцати метров в вышину. Понятно ли тебе, какая это должна быть сила, если она способна поднять всю необъятную громаду океанских вод на такую высоту? Так вот, существует гипотеза, что влияние этих гигантских сил испытывает и земная кора.

Можно определить с помощью этой машины ту линию на земном шаре, где это напряжение достигает максимальной силы.

Оказывается, что эта линия очень близко проходит около того географического пояса, где как раз наблюдаются наиболее частые землетрясения. Напряжение в этом поясе настолько колоссально, что земная кора его не выдерживает и частично взламывается им. Это явление и называется землетрясением.

Илюша с величайшим уважением посмотрел на странную машину, но не решился больше спрашивать, подавленный грандиозностью задач, которые решались в этом замке. И они пошли дальше.

- 463 -

Один громадный зал был погружен почти в темноту, а по его очень высокому куполу быстро бегали тонкие искорки, описывая сложные петли, а за ними тянулись бледные следы.

Радикс пояснил, что это тоже опытная установка по изучению размеров Вселенной.

Затем они попали еще в один зал. Высоко-высоко над нашими путниками проплывали, бесшумно вращаясь, какие-то странные тела как будто шаровидной формы. Но вот их вращение начинало ускоряться, они как-то странно сплющивались, становясь похожими на эллипсоиды вращения то очень правильной, а то совсем неопределенной формы. Иной раз они превращались в какие-то невероятной величины груши. Эти грушевидные тела, вращаясь с бешеной быстротой, начинали вытягиваться, удлиняться - и вдруг разрывались на два отдельных тела. Тогда то, которое было поменьше, начинало быстро летать около того, что осталось от груши, а остаток этот снова становился чем-то

вроде эллипсоида вращения.

Вдруг Илюше почудилось, что вдалеке от него, где-то там, в самой глубине этого зала, мелькнул, а потом задрожал и замелькал какой-то свет. Илюша понял, что перед ним экран очень большого телевизора.

Вдруг экран вспыхнул, а кругом стемнело. Илюша увидел на экране небольшой письменный стол, на нем горела старинная керосиновая лампа с зеленым абажуром. Стол весь был завален папками, тетрадями, рукописями, книгами. Книг было так много, что некоторые лежали прямо на полу. За столом сидела небольшого роста женщина. По-видимому, она была ужасно занята. С воодушевлением писала она что-то, быстрое перо так и летало по бумаге. Потом вдруг она задумалась, откинулась на спинку своего кресла и стала внимательно вглядываться в те странные фигуры, которые носились высоко по залу. Как только она это сделала, движение этих громадных тел стало затихать. Она немного нахмурилась, словно желая еще более сосредоточиться; правая рука ее, державшая перо, сделала какой-то, вероятно, невольный жест, и все движение этих громад изменилось... Сперва одно неопределенной формы тело начало быстро носиться вокруг какой-то едва заметной точки, а затем все это словно утонуло в сумраке, и откуда-то выплыла огромная тень планеты Сатурн. Колоссальная планета медленно вращалась, покачиваясь то в ту, то в другую сторону, а ее необъятные кольца, обращаясь к Илюше то так, то иначе, казались то совсем круглыми, то превращались почти в линию, становясь к зрителю ребром. Сквозь тонкий туман, из которого состояли кольца, еле заметно мерцала далекая звездочка. Теперь Илья хорошо видел, что все эти громадные тела находились в полном подчинении у этой маленькой женщины с пером в руках и стоит ей только подумать о них по-иному, они в тот же миг начинают носиться по этому громадному залу совсем по-другому. Получалось так, что этот зал был как бы лабораторией, в которой мощные математические образы проделывали в точности все, что им приказывало тонкое и проницательное воображение этой маленькой и такой привлекательной женщины. Илюша совсем замер и робко глядел то на нее, то на эти громады, носившиеся высоко над его головой.

- 464 -

- Кто это там, за столом, на экране? - спросил он шепотом у Радикса.

И тот ответил ему так же тихо:

- Это замечательная русская ученая Софья Васильевна Ковалевская, одна из первых женщин-математиков нового

времени. Та самая, которую в Стокгольме в университетских кругах звали "профессор Sonya"... Ее работы привлекли в свое время (это было в конце девятнадцатого века) внимание всего ученого мира. Когда-нибудь и ты познакомишься поближе с ее изумительными трудами. А теперь я только могу добавить тебе, что она была не только ученой, но еще и недюжинной писательницей, и я бы посоветовал тебе прочесть ее "Воспоминания детства", написанные прекрасным русским языком.

Экран потух. Илюша обернулся к Радиксу, но в это время высоко, там, среди этих странных грушевидных самовращающихся тел, мелькнули тени. Седой как лунь человек с ясным и задумчивым взором подозвал к себе движением руки другого - тот был совсем молодой человек со свежим румянцем на щеках. Он почтительно подошел к старцу. А тот важным и строгим жестом показал ему на эти странной формы тела. Молодой человек почтительно поклонился и стал внимательно смотреть на их движение. Затем тень старца исчезла, а на щеках молодого человека легли морщины зрелого возраста и седина мелькнула в волосах. Илюша видел, что он управляет движением этих тел.

- Это, - прошептал на ухо Илюше его спутник, - великий русский ученый Пафнутий Львович Чебышев, а с ним его ученик Александр Михайлович Ляпунов, который работал семнадцать лет и решил вопрос о том, какие формы могут принимать небесные тела, то есть какие из этих форм устойчивы, а какие нет. Вот теперь, быть может, тебе станет яснее, что хотел сказать Ломоносов, когда писал о "собственных Платонах и быстрых разумом Невтонах", не правда ли?

Вслед за этим они попали еще в один громадный зал, где грандиозное количество светящихся искр медленно перелетало от одной стены к другой. Они вылетали тончайшей струен из одной ярко светящейся точки, рассыпались в воздухе и, описывая параболы, падали на противоположную стену. Они гасли на той стене, на которую падали, не сразу, благодаря чему на стене из них получался красиво светящийся эллипс.

- Этот светящийся эллипс имеет некоторое отношение к числам в треугольнике Паскаля и к биному Ньютона, с которым ты скоро ознакомишься в школе. Есть такая особая отрасль математики, которая занимается явлениями, носящими название «случайных».

- Случайных? - с удивлением сказал Илюша. - А что может в математике делать случайность?

- С какой-нибудь отдельной случайностью, разумеется, нам в математике делать нечего, но когда мы имеем дело с массовым явлением, целым комплексом случайных явлений, тогда уже совсем другое дело. Самый простой пример такой массы явлений - это ошибки измерения. Измерить какую-нибудь величину для астронома дело не простое, измерения производятся помногу раз и разными лицами. Ученые принимают все доступные меры, чтобы в их измерениях не было постоянно а ошибки, которая вызывается какой-либо определенной причиной, но со случайными ошибками управиться труднее. Однако и рассуждение и опыт говорят нам, что если для ошибок у нас нет никаких постоянно действующих в одном и том же направлении причин, то они будут беспорядочно изменять наши наблюдения то в одну сторону (скажем, в сторону "плюс"), то в другую (пусть это будет "минус"), и нет оснований для того, чтобы отклонения в одну сторону были систематически больше или встречались чаще, чем отклонения в другую. А если все это так, то разумно допустить, что наиболее близкая, по всей вероятности, к истинной искомая величина, которую мы измеряем, будет нами найдена в предположении, что наши случайные погрешности взаимно погашают друг друга. Если перевести все это рассуждение на математический язык, то мы получим в ответ от наших друзей, бесконечно малых, что при таких обстоятельствах и некоторых несложных допущениях искомая истинная величина совпадает со средней арифметической из целой массы наблюдений.

Этот пример, конечно, не более как пример; было бы очень странно, если бы, опираясь на это, мы измерили рост каждого бойца в целом пехотном полку и затем вздумали утверждать, что это неверно, будто в этом полку есть и. высокие и низкие солдаты, нет, дескать, там все одного роста, точь-в-точь такого, как наша вычисленная средняя! Нет, мы говорим в таком случае, что средняя есть просто некоторая сводная характеристика этого коллектива, и не более того. Впрочем, мы нередко можем охарактеризовать наш коллектив и гораздо более подробно, то есть указать (а иной раз даже и предсказать), насколько в общем будут отклоняться наши данные от средней или даже сколько и каких отклонений от средней там будет наблюдаться. Итак, если я имею дело с массовым явлением, я имею возможность вычислить результаты некоторых случайных явлений. Допустим, ты подбрасываешь монету.

У нее две стороны. Та, на которой отчеканен герб, обычно называют "орлом", а другую сторону - "решкой". Какова

вероятность того, что монета упадет гербом вверх?

- Может быть и то и другое, - отвечал Илюша. - На ребро монета стать не может.

- Правильно. Вот математик и говорит, что поскольку это так, то вероятность выпадения "орла" или "решки" равносильна полной достоверности, то есть ничего другого выпасть не может. А что именно выпадет в данный момент, сказать трудно. Если бросать много раз, то они, в общем, должны выпасть в одинаковом количестве. Известный французский естествоиспытатель Бюффон в свое время проделал такой опыт: он бросил монету четыре тысячи сорок раз. "Орел" выпал две тысячи сорок восемь раз, а "решка" - тысяча девятьсот девяносто два раза. Полной точности в равенстве этих чисел, конечно, нельзя ожидать, ибо на белом свете не бывает математически точных монет, но в процентном отношении получилось довольно хорошо; пятьдесят и семь десятых процента и сорок девять и три десятых процента. Если принять полную достоверность за единицу, вероятность выпадения "орла" равна половине, "решки" - тоже половине. Понятно?

- Понятно.

- Представь себе теперь, что ты бросаешь две монетки.

Какова вероятность того, что у тебя выпадут два "орла"?

Попробуем усложнить нашу задачу.

- Половина, - отвечал Илюша. - Не все ли равно, сколько монеток?

- Вот то-то, что не все равно! - отвечал, усмехнувшись, Радикс.

- Давай-ка сосчитаем. У тебя две монетки - первая и вторая. Какие могут быть случаи? Во-первых, обе монетки выпадут "орлами", во-вторых - обе "решками", в-третьих - первая "орлом", а вторая "решкой"...

- Ах да! - воскликнул Илюша.

- В-четвертых - первая "решкой", вторая "орлом". Значит, всего может быть четыре комбинации, совершенно равноправные, а отсюда мы заключаем, что вероятность выпадения двух "орлов" при бросании двух монеток равна не половине, а только четверти. А зато вероятность выпадения и "орла" и "решки" сразу равна половине, ибо ты не нумеруешь монетки, а подсчитываешь просто общий результат. Чем больше брать монеток, тем расчеты эти делаются все сложнее и сложнее.

Если возьмем три монетки, то будут такие комбинации (я буду отмечать "орла" буквой "О", а "решку" буквой "Р"):

1)ООО; 5) ОРР;

2)ООР; 6) РОР;
3)ОРО; 7) РРО;
4)РОО; 8) РРР.

Всего восемь комбинаций. Теперь вероятность выпадения трех "орлов" равна одной восьмой, двух "орлов" - трем восьмым, одного "орла" - тоже трем восьмым. Вероятность того, что ни одного "орла" не будет, равна снова одной восьмой. Числители этих дробей будут: 1-3-3-1, а знаменатель равен их сумме.

Одна восьмая - это половина в третьей степени, а числители эти равны коэффициентам при разложении куба суммы. Вот почему эти числа имеют отношение к треугольнику Паскаля.

Эти соотношения заметил и указал еще Тарталья, который жил лет за сто до Паскаля.

- Это все ужасно интересно!

- Подобные задачи возникают во многих науках, в частности, и в физике, когда дело касается, например, движения молекул газа. И этим способом разрешают важные и очень сложные проблемы самого разнообразного характера, начиная от контроля при производстве электро лампочек или разведения новых пород злаков и кончая самыми трудными проблемами атомной физики. Понятно?

- Как будто я немного понял. Я слышал, как говорят, что "по теории вероятностей" должно случиться то или иное, но я думал, что это шутка.

- Когда шутка, а когда и нет...

- А что такое рассеяние отдельных случаев вокруг средней? Я слышал, но не понимаю - оно не всегда одинаковое?

- Нет, - отвечал Радикс, - конечно, не всегда. Очень легко найти пример двух совокупностей, или распределений, случайных явлений, у которых средняя будет одна и та же, а колебания случайностей вокруг нее будут разными. Представь себе, что на одной географической широте лежат две области, средняя годовая температура которых совпадает. Однако первая область представляет собой остров на море, а другая - часть пустыни среди громадного материка. Ясно, что климат второй области будет резко континентальным, то есть будет характеризоваться резкими колебаниями от жары к морозу, тогда как температура на острове будет сравнительно ровной.

- Ясно, - сказал Илюша. - Мне только не совсем понятно, почему температура относится к разряду случайных явлений. Разве можно температуру считать случайностью?

- Я не говорил, что температура есть явление случайного характера. Однако теория вероятностей занимается не только

явлениями в точности случайного порядка, как, например, движение молекул раскаленного газа, диффузия и тому подобное; в ее ведении находятся и многие другие явления, где существо той или иной закономерности проявляется не с такой точностью, которую мы наблюдаем в соотношениях абсциссы и ординаты параболы, например, а с некоторыми колебаниями, или рассеянием.

- Значит, - сказал Илюша, - рассеяние может наблюдаться не только вокруг средней, но и вокруг некоторой кривой?

- Разумеется. Вот тебе простой пример. Урожай зависит от осадков. Если осадков будет мало, то есть будет засуха, то хлеба засохнут и урожай будет плохой. Но если осадков будет слишком много, то хлеба начнут гнить на корню и урожай тоже будет неважный. Следовательно, урожаи поднимается от нуля вместе с осадками, увеличивается, доходит до максимума, когда осадков выпадает столько, сколько нужно, а затем, если осадков выпадает еще больше, то урожай уже начинает падать.

Эту зависимость урожая от осадков нельзя в точности выразить какой-либо кривой (прежде всего потому, что ведь урожай зависит не только от осадков, а еще от целого ряда причин), но приблизительно можно изобразить или выразить хотя бы, например, той же параболой. Для такого примерного выражения (или апроксимации) есть свои способы. Особое свойство таких связей или зависимостей заключается в том, что вокруг некоторой основной тенденции наблюдаются более или менее интенсивные колебания, в силу чего такие зависимости (корреляционные, как у нас говорится) точно выражены быть не могут и справедливы лишь в общем, в среднем. Только эта "средняя" в данном случае не постоянная, а переменная. Вот как... А кстати, знаешь ли ты конец знаменитой истории насчет мартышки и очков?

- Эту басню Крылова? - сказал Илюша. - Ну конечно, знаю!

- Нет, - отвечал Радикс, - басня- это еще не конец. Конец находится в одной арабской сказке. Говорят, что это неверно, будто бы Шехерезада кончила рассказывать свои сказки в тысяча первую ночь. На самом деле, как я слышал, она еще и потом рассказывала свои замечательные истории. И вот послушай, что она рассказала в тысяча вторую ночь. "Дошло до меня, о счастливый царь, - сказала Шехерезада, - что некогда один старый Павиан пришел к Ворону, поклонился ему и сказал: "Да продлит аллах твои дни, о Ворон! Я пришел к тебе, потому что имею великую нужду".

Борон отвечал: "Я из породы птиц, имя мое Ворон. Я мудрец,

писец, чтец и предсказатель, я листаю книгу прошедшего и будущего, я знаю искомое и вижу взыскующего, я толкую сны, открываю клады и черчу гороскопы, я владею тайной и обладаю доказательством. А живу я один век и одно столетие. Что ты хочешь от меня, серая собака?" Павиан отвечал: "Моя госпожа прислала меня к тебе. Ты писец проницательный! Я целую прах у ног твоих и говорю тебе: напиши письмо!" Ворон отвечал: "Уплати мне три дирхема!" А когда деньги были уплачены, Ворон воскликнул: "Слушаю и повинуюсь! Кому и о чем должен я писать?" - "О Ворон, - отвечал Павиан, - моя госпожа вдова, она из породы обезьян, и имя ее Мартышка. Дряхлость пришла к ней, и она в старости слаба глазами стала..." - "Эту басню я уже слышал. Продолжай!" - "Увы мне! - отвечал Павиан. - Увы, покровитель бедных, если ты знаешь эту басню, то мне нет нужды повторять ее. Но слушай, что было дальше и что привело меня к тебе. Когда очки сынов Адама не помогли госпоже моей, то некий могучий Джинн посоветовал ей поискать очки у себя в лесу, а госпожа моя сказала:

"О Джинн, отец ужаса! У кого же в лесу могут быть очки?"

И тогда страшный Джинн высунул язык из правого глаза я громко захлопал ушами, которые росли у него на месте носа, поднял свое левое копыто, посреди которого сиял адским пламенем его глаз, и прошипел: "Слушан и внимай, о мать обезьян! В лесу очки есть у очковой змеи!"

Ворон сказал: "Хвала аллаху! Он знает, зачем дал обезьяне скорлупу дохлого жука вместо головы, чтобы она вызывала безобразных духов и слушала их речи, которых не станет слушать даже безумец. Знаешь ли ты, косматая собака, сын собаки и отец тысячи лысых собак, что такое очковая змея?"

Павиан весь затрясся от страха и прошептал: "Аллах велик!

Я ничего не знаю. Я только припоминаю, как учила меня мать моя, что я погибну в ту минуту, когда узнаю это!"

- 470 -

Ворон ответил: "Узнай же, что это неприступный владыка, мрачный визирь вечной тьмы, которую он носит в зубе. Узнай еще, что когда ему приспеет время служить тьме и он ответит ей: "С любовью и охотой", то он надевает клобук ярости, и на нем-то он носит своп страшные очки, которые есть знак разрушения. Если ты увидишь их, то не успеешь сосчитать, сколько у тебя пальцев на руке, как уже коршуны будут слетаться на твою падаль!" Павиан вытер слезы и сказал: "О покровитель павианов! Ты мудрец и чтец будущего! Госпожа моя проливает слезы и не принимает пищи. Она, как я сказал тебе, слаба глазами стала и недавно чуть не съела мою старую туфлю, приняв ее сослепу за

банан. И шакал шел за ней по пятам и поносил ее по всему базару, ибо она дернула его за хвост, потому что ей показалось, что это гроздь винограда. Что делать, покровитель бедных? Госпожа моя плачет и не знает сна. А я сплю с испуганным сердцем, и дни мои гибнут в пучине размышлений. Кланяюсь тебе и лобзаю прах у ног твоих. Напиши раболепное письмо отцу мрака!"

"Аллах велик! - отвечал ему Ворон. - Я живу в чистом воздухе и ночую на вершине пальмы, а отец мрака не охотник подниматься высоко. Давай писать!" И Ворон сочинил раболепное письмо тому, кто носит разлуку с солнцем в своем зубе, а Павиан стоял и дрожал от ужаса. А потом Ворон сочинил еще письмо соседке Мартышки и еще одно письмо соседке тетки Мартышки, а всего он сочинил три письма и надписал три конверта. И когда Павиан пришел к своей госпоже, та обрадовалась, понюхала письма и сказала своему слуге Павиану: "Заклей их в конверты и опусти в почтовый ящик!" Павиан отвечал: "Слушаю и повинуюсь!" Но прошли дни и недели, а ответа не было. И снова пошел Павиан к Ворону, тот опять написал подобострастное письмо очковой змее и еще три письма, а всего он написал четыре письма. И с ними Мартышка приказала поступить так же. И снова прошли дни, а ответа не было. И еще раз пошел Павиан к Ворону, они сочинили еще одно письмо хмурому султану тьмы, который носит клобук нежданного ужаса, и еще четыре письма, а всего они написали пять писем. И снова не было ответа. И тогда Мартышка отправилась за советом к Джиннии, чье безобразие славилось на весь подземный мир и от чьего вида тошнило даже гиену.

Джинния стала колдовать и налить жабью печень, поджелудочную железу утконоса и евстахиеву трубу пиявки, умершей от огорчения в разлуке со своим пиявом. PI когда Джинния начадила так, что сама стала чихать и кашлять, то возопила:

"Горе тебе, о мать бедных! Горе тебе, дитя опрометчивости!

Ты отдала свои письма и конверты слепому пустомеле и дурному чтецу. По тому, как шипит на ведьминой жаровне поджелудочная железа и как дымит печень, я вижу ясно, что этот сын невежества и враг письменных знаков перепутал конверты! И теперь я вижу, что эта путаница и есть причина всех твоих несчастий!"... Вот что рассказывала Шехерезада.

Скажи, пожалуйста, как ты думаешь, возможно ли, чтобы никто из адресатов не получил ни одного письма, если они засунуты в конверты наугад?

- А что дальше было в этой сказке? - спросил Илюша.

- Дальше начинается еще сказка, так как Джиния поясняет Мартышке свою мысль новой сказкой, где каждое из действующих лиц, в свою очередь, опять рассказывает по сказке, и так далее, как и полагается у Шехерезады. А что ты скажешь насчет вероятности того, что ни одна душа не получит своих писем?

- Хм... - сказал Илюша. - Я что-то не пойму, как и взяться за эту задачу! Есть три письма и три конверта, значит надо прикинуть, какие могут быть тут комбинации, то есть как вообще можно вложить письма в конверты.

- Правильно.

- Вот я попробую так, - решил Илюша, - сперва отмечу письма тремя буквами (большими), а потом буду переставлять конверты (я их отмечу маленькими буквами).

- Попробуй.

Илюша составил такую табличку:

	А	Б	В	
1)	а	б	в	(3)
2)	а	в	б	(1)
3)	б	а	в	(1)
4)	б	в	а	(0)
5)	в	а	б	(0)
6)	в	б	а	(1)

Слева он поставил номера возможных комбинаций конвертов, а справа - сколько адресатов при данной комбинации конвертов получат свои письма.

- Значит, так, - сказал Илюша, - есть три письма А, Б и В и три конверта а, б и в. Если конверты расположатся при засовывании в них писем наугад так, как это у меня записано под номером первым, то все трое получат свои письма, так как каждая малая буква в этом случае соответствует большой.

Во втором случае только адресат А получит свое письмо, а Б и В не получат, ибо письмо Б засунуто в конверт для В, и наоборот. В четвертом и пятом случаях никто ничего не получит: все конверты перепутаны. Какова же вероятность того, что никто не получит? Всех возможностей шесть, а никто ничего не получает в двух случаях. Значит, вероятность равна двум шестым, или одной третьей. Верно?

- Правильно! Одна треть. Вот мы и нашли ответ на обезьянью задачку. Вопрос этот сейчас исчерпан полностью.

А теперь давай попробуем поговорить на ту же самую тему, только немножко поглубже копнем, куда обезьяна докопаться не сумела бы. Так вот, как ты думаешь: что же станется с этой вероятностью, если число писем, а стало быть и конвертов, начнет возрастать?

Илюша ответит не сразу. Подумав, он сказал так:

- Мне кажется, что она должна увеличиваться.

- Почему?

- Потому что может быть только один случай, когда все письма попадут по адресу, и, значит, вероятность того, что все получат своп письма, будет падать по мере увеличения количества писем, так как и число комбинаций будет расти.

- Это справедливо. Но я тебя спрашиваю не о вероятности того случая, когда все адресаты получат своп письма, а о совершенно противоположном случае, когда никто не получит своего письма, так как все конверты перепутаны, другими словами, когда в твоей табличке ни разу ни одна большая буква не совпадет с маленькой.

Илюша не знал, что ответить.

- А если попробовать для четырех писем? - сказал он.

- Ну что ж! - отвечал Радикс. - Последуем примеру нашей мартышки.

И Илюша составил табличку:

	А	Б	В	Г	
1)	а	б	в	г	(4)
2)	а	б	г	в	(2)
3)	а	в	б	г	(2)
4)	а	в	г	б	(1)
5)	а	г	б	в	(1)
6)	а	г	в	б	(2)
7)	б	а	в	г	(2)
8)	б	а	г	в	(0)
9)	б	в	а	г	(1)
10)	б	в	г	а	(0)
11)	б	г	а	в	(0)
12)	б	г	в	а	(1)

	А	Б	В	Г	
13)	в	а	б	г	(1)
14)	в	а	г	б	(0)
15)	в	б	а	г	(2)
16)	в	б	г	а	(1)
17)	в	г	а	б	(0)
18)	в	г	б	а	(0)
19)	г	а	б	в	(0)
20)	г	а	в	б	(1)
21)	г	б	а	в	(1)
22)	г	б	в	а	(2)
23)	г	в	а	б	(0)
24)	г	в	б	а	(0)

- Ну, кажется, все! - с облегчением сказал Илюша, составив эту длинную таблицу. - Значит, все получат свои письма тоже только в одном случае. Эта вероятность теперь падает от одной шестой до одной двадцать четвертой.

А никто не получит своего письма теперь в девяти случаях. Значит, вероятность этого равна девяти двадцать четвертым, или трем восьмым. А для трех писем получалась одна треть. Можно так написать:

1/3 и 3/8

или 8/24 и 9/24.

Значит, вероятность того, что никто не получит своего письма, немного увеличилась. На одну двадцать четвертую.

- Это, конечно, очевидно. А как ты думаешь, что будет далее, если мы будем еще увеличивать число писем?

- Боюсь сказать, - отвечал Илюша. - Как будто вероятность должна понемножку расти?.. Нет, не знаю!

- Допустим, что она "понемножку" будет расти. А нельзя ли выяснить, как именно будет она расти?

Илюша не знал, что ответить.

- Я могу тебе чуточку подсказать. Если мы возьмем пять писем, то эта вероятность будет сорок четыре сто двадцатых, а если возьмем шесть писем, то она будет двести шестьдесят пять семьсот двадцатых.

- Длинные дроби какие-то. Ничего не поймешь!

- Не торопись, - отвечал Радикс. - Давай обратим внимание на то, сколько всего может быть комбинаций. Тут дело обстоит примерно так же, как с перестановками в Дразнилке.

Помнишь?

- Помню! - обрадовался Илюша. - Для трех было шесть, для четырех - двадцать четыре, для пяти - сто двадцать...

- Для шести?

- Для шести - семьсот двадцать... Постой-ка! Ведь в тех дробях, которые ты мне только что назвал, знаменатели тоже точь-в-точь такие же?

- Вот то-то и дело! Ну-ка, поворачивай мозгами!

- Назови мне опять эти дроби, я их запишу.

1/3, 3/8, 44/120, 265/720

- Приведу-ка я их к одному знаменателю, - решил Илюша.

240/720, 270/720, 264/720, 265/720

Долго он смотрел на то, что получилось, и наконец Радикс объяснил ему:

- Вероятность того, что никто не получит своего письма, то увеличивается, то уменьшается, а изменяется при этом все медленнее и медленнее. Обрати внимание на то, что первые дроби разнятся друг от друга на одну двадцать четвертую, следующие две - на одну сто двадцатую, следующие две - на одну семьсот двадцатую. А если взять еще одну дробь, то она уже от последней будет отличаться на дробь, равную единице, деленной на 5040. Следующая разность будет равна единице, деленной на 40320... Ты, может быть, помнишь это число?

- Помню, - довольно мрачно ответил Илюша, ибо это воспоминание ему не очень-то нравилось.

- Таким образом, изменение вероятности будет идти все медленнее и медленнее. Скоро это и заметить будет невозможно. Ну, а какой же вывод из этого можно сделать, по-твоему?

Илюша думал, думал, но придумать ничего не мог. Никакого вывода у него не получалось.

- Вот как тут обстоит дело, - отвечал Радикс, - здесь мы имеем дело с процессом, который напоминает процесс нарастания суммы бесконечной убывающей геометрической прогрессии. Как там, так и тут слагаемые становятся все меньше и меньше. Как там, так и тут, если число случаев растет до бесконечности, сумма этих слагаемых стремится к определенному пределу (из чего, впрочем, отнюдь не следует, что если слагаемые какого-нибудь ряда уменьшаются, то у их суммы обязательно существует предел; но в данном случае это будет так). Однако тут есть одна немаловажная подробность, касающаяся того, как. именно наша переменная вероятность приближается к своему пределу. Она-то тебя и путала, когда ты смотрел на дроби. В геометрической прогрессии мы просто приближаемся к пределу: что ни шаг, то все ближе. Здесь это дело обстоит не так; вероятность все время колеблется то в одну сторону, то в другую: то она чуть побольше предела, то чуть поменьше. Вспомни-ка нашу "змейку" из Схолии Двенадцатой. Размахи этих колебаний все уменьшаются, и абсолютная величина разности между вычисленной вероятностью и ее пределом падает и падает. Если мы число писем будем увеличивать до бесконечности, то предел этот будет равен примерно 0,367879441171442... Это число замечательное, и мы уже встречались с ним (вернее сказать, с его обратной величиной) в Схолии Семнадцатой. Оно имеет отношение и к логарифмам, и к нашим друзьям комплексным человечкам, и к гиперболе, и к цепной линии, и еще к очень многому в математике, оно нее находится в большой дружбе с числом я и даже приходится ему в некотором роде родственником. Если ты разделишь единицу на это число, то получишь не что иное, как знаменитое неперово число, основание натуральных логарифмов.

- Опять эта знаменитость! - воскликнул Илюша. - Но, значит, пределы встречаются не только при вычислении площадей? И как это опять одно за другое цепляется!

- Бывает, бывает! - отвечал Радикс. - По этому же примерно поводу мне рассказывали такой любопытный случай.

Некий путешественник попал в одном восточном городе на большой базар. Потолкавшись и насмотревшись на изобилие всякой всячины, которая там продавалась, обменивалась и воровалась, он остановился в укромном уголке, где столпилась небольшая кучка людей. Когда он протискался поближе, то увидел сухорукого беднягу, державшего у себя на коленях шестиугольную деревянную досточку с нарисованными символами, а в руке рожок для игральных костей. Приглядевшись, он заметил, что поверхность доски была

разделена на семь частей: кружок посредине и шесть секторов в разные стороны. Кружок был разрисован, а в шести секторах было изображено: пика, бубна, черва, трефа, якорь и роза. Это была игра. Заключалась она в следующем: шесть человек из присутствующих ставили каждый по одной монете на шесть секторов досточки, кому на что нравилось. Костемет брал три игральные кости (на каждой из них были изображены те самые символы, что и на досточке), подбрасывал их, а затем опрокидывал рожок на средний, разрисованный кружок. Когда же все ставки были сделаны, он поднимал рожок, и все видели, какпе на всех трех костях выпали символы. Как только все это выяснялось, костемет тем игрокам, которые ставили на выпавшие символы, отдавал их ставки вдвое. Так что трое выигрывали и получали ставки шестерых и были, разумеется, тем много довольны. А трое других, оставаясь в проигрыше, лишались своих ставок. Другими словами, костемет брал у шестерых, а отдавал троим все, что он перед этим получил. Наш путешественник, разглядев сие чудо, подивился: какая же корысть костемету сидеть на базаре целый день, брать у шестерых и отдавать троим? Однако некий базарный завсегдатай стал с нашим путешественником спорпть, замечая, что трудно найти такого осла на двух ногах, который стал бы день-деньской сидеть на солнцепеке с единственной целью отдать троим взятое у шестерых, что костемет хоть и безобидный человек, но себе на кусок хлеба тоже как-нибудь заработать должен, однако, не будучи жадным до наживы, удовлетворяется малым, и, хотя он нередко ничего не получает, время от времени ему перепадают две монеты, а иной раз и четыре; что не так много...

pi

Так вот, попробуй рассуди, кто был прав: первый или второй из собеседников? А также выясни, стоило ли людям играть в такую игру и во что им обходилось это удовольствие.

- По-моему, - отвечал Илюша, - это не так трудно.

- Конечно, не так уж трудно.

Мы с тобой и потрудней задачи разбирали. Я хочу задать тебе еще один престранный вопрос.

Я возьму колоду карт, тщательно их перетасую и сдам всю колоду четырем игрокам. Возможно ли, чтобы при этой сдаче каждый из игроков получил одну масть всю целиком, начиная с короля и до двойки и туза.

- Вероятно, возможно, - ответил юноша. - Но только мне кажется, что это чрезвычайно редкая вещь.

- Вещь не частая, что и говорить, - усмехнулся Радикс. - Но

однажды в одном лондонском клубе это все-таки случилось. Игроки до того были поражены, что позвали администрацию клуба и составили специальный протокол о таком удивительном случае. Как, по-твоему, правы они были или нет?

- Не знаю, - вымолвил Илюша. - Мне кажется, что они, наверно, обрадовались такой небылице, как радуется всякий, кто найдет редкую вещь, вроде белой вороны.

- Так вот, видишь ли, самое курьезное в этом случае заключается в том, что с моей точки зрения, удивляться здесь было совершенно нечему. Мои расчеты, совершенно элементарные, доступные любому человеку, знакомому с дробями, говорят, что этот случай нисколько не более вероятен или невероятен, чем всякая иная сдача карт.

- Как так? - в удивлении спросил мальчик.

- Очень просто. С колодой карт возиться долго, возьмем случай попроще, но совершенно аналогичный. Я кладу в рожок шесть игральных костей. Подсчитаем, какова вероятность того, что при первом бросании выпадут на первой кости единица, на второй двойка, и так далее по порядку до шестой, на которой должна выпасть шестерка. Ясно, что вероятность того, чтобы на первой кости выпала единица, равна одной шестой. Вероятность того, чтобы на второй кости выпала двойка, тоже равна одной шестой. Но вероятность того, чтобы одновременно на первой выпала единица, а на второй выпала двойка, будет равна

$1/6 \cdot 1/6 = 1/36$

Это так называемое умножение вероятностей, то есть произведение соответствующих вероятностей, в справедливости чего ты очень легко можешь убедиться, подсчитав соответствующие статочности (или шансы). Подобным же образом вся искомая вероятность будет равна:

$1/6 \cdot 1/6 \cdot 1/6 \cdot 1/6 \cdot 1/6 \cdot 1/6 = 1/6^6 = 1/46656$

Действительно, вероятность невелика. Но вот в чем тут дело.

Закажи себе еще какую-нибудь - совершенно произвольную - комбинацию очков на шести костях (ну хотя бы, чтобы на каждой кости выпало по пятерке), и ты увидишь, что вероятность ее выпадения совершенно такова же. И какую бы комбинацию из шести случаев ты ни задумал, вероятность ее появления нимало не изменится. Отчего же игроки так удивлялись столь обыкновенному происхождению? Да просто потому, что ту комбинацию, которую они встретили, легко запомнить и отличить от любой другой. И все! Я думаю, ты согласишься, что не менее удивительно было бы, если бы карты распределились у игроков таким образом:

Первый	Второй	Третий	Четвертый
Все короли Все девятки Все валеты Туз червей	Все десятки Все дамы Все восьмерки Туз треф	Все семерки Все шестерки Все пятерки Туз бубен	Все четверки Все тройки Все двойки Туз пик

Так вот, поверь мне, что при такой удивительной раздаче никто бы не стал удивляться, звать старосту клуба и сочинять протокол[42].

Илюша не мог не согласиться.

- Мы с тобой разобрали несколько примеров, которые дают представление о задачах теории вероятностей. В наше время эта наука имеет исключительное значение для всех областей естествознания. А поднял ее до высоты подлинной математической науки великий русский ученый Пафнутий Львович Чебышев. Ученики Чебышева А. А. Марков и А. М. Ляпунов прославились также трудами в этой области. На каком бы языке ни попалась тебе книга по теории вероятностей, в ней обязательно встретятся эти три славных русских имени. И в наши дни советские математики достигли больших успехов в развитии теории вероятностей. Всему ученому миру известны имена советских ученых А. Н. Колмогорова, Н. В. Смирнова, Е. Е. Слуцкого и немало еще их талантливых учеников, последователей и сотрудников, которые с превосходными результатами развивают и продолжают их замечательные труды.

Однако, - вдруг поспешно добавил Радикс, - мы заговорились.

Надо прибавить шагу, а то опоздаем..

И они пошли дальше через сумрачные залы, библиотеки, лаборатории и еще через ряд каких-то помещений, которые то напоминали цех завода, то внутренность астрономической вышки, то машинное отделение подводной лодки, то какие-то подземные пещеры. Один зал был весь заполнен громадным быстро вертящимся- волчком, который, покачиваясь, описывал хитрые петли по полу. В другом качался огромный маятник.

В третьем по воздуху ходили широкие радуги, светящиеся кольца и точки. И конца этому не было. Но вот они подошли к огромным воротам, напоминавшим ворота какого-то великаньего завода. Радикс положил лапку на уста свои и еле слышно произнес:

- Тесс!..

Затем он чуть-чуть приоткрыл створку этих огромнейших ворот, и Илюша получил возможность заглянуть туда - за ворота. Но там творилось что-то до такой степени ослепительное, быстрое и трудно уловимое, что Илюша даже весь похолодел.

Огромнейшие сверкающие спирали крутились там, то вспыхивая, словно громадные звезды (в сотни раз ярче солнца!), то угасая, оглушительно произнося какие-то непостижимые слова, творя на лету какие-то дивные организмы, напоминавшие не то колоссальных драконов, не то оживших древних идолов, то рассыпаясь миллионами огоньков, то вновь собираясь в целые моря трепещущего и невыносимого сияния...

- 479 -

- Что это такое? - в ужасе спросил мальчик.

А Радикс еле слышно шепнул ему:

- Это кормчие будущего мира, это - кибернетосы...

Наконец они остановились перед громадными дверями, которые были плотно закрыты, и на часах перед ними стояли крошечные карлики с длиннейшими пиками. Один из карликов важно приподнял свою пику и провозгласил:

- Пришельцы, ведом ли вам Знак Величия?

Радикс почтительно ответил:

- Известен в точности, о Карло Пиконосный!

Пиконосец медленно отступил в сторону и опустил пику.

Карлики сейчас же расступились, а громадные двери медленно растворились. Радикс мигнул Илюше, и они вошли в огромный зал, дальний конец которого был очень ярко освещен.

- Послушай, - сказал шепотом Илюша своему спутнику, - этот Карло Пиконосный спрашивал про тот перламутровый чертеж?

Радикс молча кивнул в ответ.

- А что это было такое? Какие-то прямые, кружок?

- Прямые, - ответил ему на ухо Радикс, - это ЕГО придворные дамы Касательные, а кружок - это ЕГО мажордом Циклмейстер, он облечен великим доверием и изволит измерять ЕГО кривизну.

Илюша хотел было спросить: "Кого его?", но не решился и промолчал.

Они довольно долго шагали по мягким коврам и наконец подошли к возвышению, на котором стоял длинный стол, а за ним сидело много народу, самого странного и необычайного, однако кое с кем из присутствующих Илюша был уже знаком.

Мальчик увидал раньше всех Уникурсала Уникурсалыча, который старательно и поспешно чинил длиннейший карандаш. В кресле слева сидела тетушка Розамунда, а ее язычок вился в воздухе с присущей ему замысловатостью. Справа выглядывал Односторонний Бушмейстер. Над столом висели знаменитые часы тетушки Розамунды, которые шли то в одну, то в другую сторону. Немного в стороне сидели Совершенные Древние Красавицы, а над столом покачивалась какая-то разноцветная бахрома, которую Илюша видел, кажется, на платье Великой

Теоремы. Мнимий Радиксович и масса его родственников тоже были здесь. Около них сидели три Мушкетера и попивали вино из девяти бутылей, а рядом сидел старец в парчовом халате и держал Зерцало Четырех Стихий. Около стояла волшебная бутылка плененного Джинна, а рядом сидел сонный и сердитый Салуникур Салуникурыч. Тут же стояло знаменитое колесо с самовращающимся числом.

- 480 -

Вдали покачивались тени слонов и осликов, а внизу у стола расположилось множество карликов из прогрессии. На полу была большая куча песку, а рядом с ней задумчивый философ, который пытался ее пересчитать по одной песчинке. Он весь был обмотан лентой с пропастью пулей. Тут же, разумеется, были Коинкос и Асимптотос, а сзади стоял их превосходный сыр и корзина с разными геометрическими плодами. От всего этого увиденного у Илюши в глазах зарябило. Он опустил глаза и тут же заметил, что идет по коврику, где выткан необыкновенно сложный лабиринт, в центре которого сияет лилия, напоминающая своей формой нижнюю половину псевдосферы.

Когда они подошли ближе, за столом возникло множество Великих Змиев, которые медленно покачивались на своих хвостах. Илюша глянул на них не без страха, однако Мнимий дружески подмигнул ему, а кругом на стенах вдруг ярко вспыхнули Златоиссеченные Звезды, стало сразу светлее.

- Подойдите! - глухо произнес один из Великих Змиев.

Радикс и Илюша приблизились к столу. Все участники этого удивительного заседания забыли о своих занятиях и начали смотреть на наших друзей до того внимательно, что Илюша вдруг подумал, что если его внезапно спросят: "Сколько будет пятью пять?", так он нипочем не ответит. Он растерянно посмотрел в сторону, но быстро отвернулся, ибо сбоку на парте торчало унылое чучело Фиолета Чернилыча Зазубрилкпна, около которого деловито сновал большой паук и плел свою многоугольную паутину, а сзади стояла большая доска, на которой было написано мелом изречение римлянина Цицерона: "Еггаге humanum est", что означает: "Человеку свойственно ошибаться".

- Радикс! - произнес снова Великий Змий. - Ты привел сюда человечье дитя?

- Я, - тихо ответил Радикс. - Такова моя обязанность с давних пор. Я веду их, и некоторые идут сразу, а другие упираются. Но этот мальчик не упирался. Я провел его через Великие Испытания, но он не испугался, а я немножко помогал ему, но и это тоже моя обязанность. И я рад этому, потому что он не отвергал моей помощи и не пренебрегал ею, а старался. Он летал

по касательной и блуждал по лабиринтам, пил чудный напиток из Кеплерова фонтана и вкушал конические сыры.

- Хорошо, - отвечал Совершенный Змий, отец змиев. - Мы видели это и знаем это. Я спрошу теперь моих братьев: достойно ли это человеческое дитя нашего высокого и великого привета?

Вдруг откуда-то вылетел Ворон, громко захлопал крыльями, сел на краешек стола и провозгласил:

- 482 -

0

- Ты сам пришел в нашу волшебную Страну Сказки, - ну и получай наш подарок!

Илюша глядел во все глаза на Ворона, но тут что-то заиграло и заблистало ярким светом, и он увидел, как перед ним постепенно возник сияющий всеми красками радуги удивительный чертеж..

Все замолкло в почтительном молчании. А затем все хором тихо сказали:

Мы - Числа, Суммы, Дуги.

Нас очень-очень много.

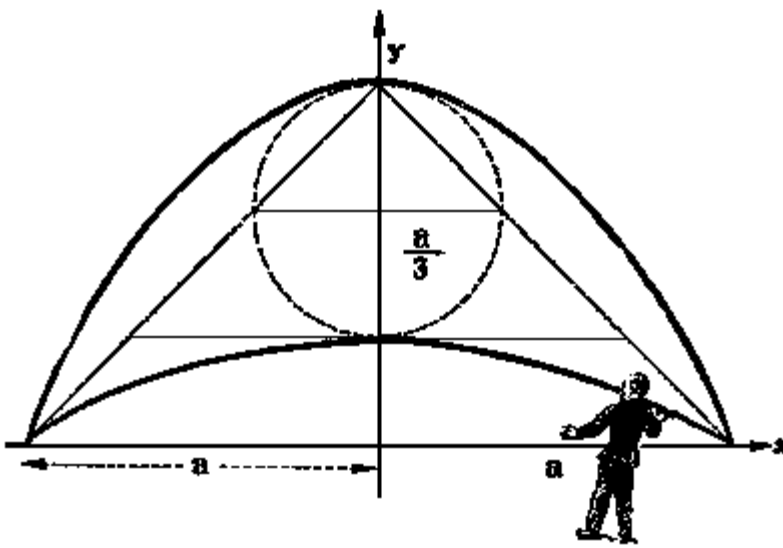
Мы все друзья и слуги ВОЛШЕБНОГО ДВУРОГА!

А Радикс наклонился немного к Илюше и сказал:

- Ради тебя появился сам ВОЛШЕБНЫЙ ДВУРОГ. Запомни его уравнение:

$$y = \frac{a^2 - x^2}{2a \pm \sqrt{a^2 - x^2}}$$

483



Это он сам!

Затем все карлики из прогрессии встали рядами и запели

хором:

Затрубили трубачи,
Барабанщики забили,
Заскрипели скрипачи,
И волынщики завыли!
Бей! Звони в колокола!
Гряньте, медные тарелки!
Тру-ту-ту и тра-ля-ля!
Дудки, флейты и сопелки!

И рядом завертелись карусели, поплыли кругом коньки и лодки, запели гармони, и ловкие парнишки пошли раскачивать качели под самые облака. А карлики все пели:

Станут ночи светлым днем,
Золотые, голубые,
Будут сыпаться дождем
С неба звезды огневые!

И стало еще светлей, и еще больше всякого потешного огня рассыпалось повсюду. А карлики пели:

Эй, врали, весельчаки,
Шутники и скоморохи,
Болтуны и чудаки,
Собирающие крохи
Всяких милых пустяков,
Сказок, басен и стихов!

Немедленно вперед выскочил Уникурсал Уникурсалыч, Кандидат Тупиковых Наук, и раскланялся, прижимая руки к груди. Все захохотали, потому что всем было известно, что он был Первый Враль Волшебного Мира. А сбоку показался Кот в Сапогах, подмигнул Илюше и вытащил из своей охотничьей сумки малюсенького льва.

И тут так грохнуло, что Илюша даже подпрыгнул. В это время дивный чертеж ВОЛШЕБНОГО ДВУРОГА блеснул Илюше прямо в глаза, так что он должен был зажмуриться, а Великий Змии наклонился и сказал ему укоризненно и настойчиво:

- Илюша!.. Илюша!..

Илюша хотел было спросить, почему чертеж так светит, что прямо смотреть невозможно, но язык у него почему-то не хотел слушаться... Он открыл глаза - и снова перед ним что-то мелькнуло яркое и ослепительное. А кто-то опять сказал очень серьезно:

- Илюша!..

Снова что-то сверкнуло.

Наконец Илюша сделал над собой почти невероятное усилие и открыл глаза... Затем он вытаращил их и старательно протер. Много уже он видел удивительных вещей, но это зрелище было до того поразительно и неожиданно, что он совсем растерялся.

Перед ним стояла мама в своей голубой кофточке, а яркие лучи только что поднявшегося солнца падали на стол.

- Илюша! - сказала мама. - Ну что это такое? Ты так, значит, всю ночь и просидел здесь за столом? И заснул над своим задачником!.. Ну, иди умывайся! Ведь уже восьмой час. Тебе скоро в школу идти.

Эпилог

Когда эта книжка была написана, автор сидел и раздумывал, какую бы сейчас поставить пластинку - Моцарта или Прокофьева?.. Он считал, что потрудился как следует для своих юных читателей, а теперь может немного и отдохнуть.

Но в эту минуту дверь в комнату отворилась настежь, дунул сквозняк - и все его бумажки поднялись в воздух с явным намерением улететь в окно. Вскочив, автор кое-как усмирил их и немедленно сообразил, что это явилась Васька, потому что когда появляется Васька (это дочка автора, и зовут ее Василисой), то обязательно поднимается страшный сквозняк и все летит куда попало.

- Папа, - сказала, запыхавшись, Васька, - я все прочла!

- Приятно слышать, - отвечал автор. - Теперь остается только выяснить, что именно ты прочла, и тогда все будет в порядке.

- Как - что? - сказала Васька, сделав совершенно круглые глаза. - Я прочла твоего "ВОЛШЕБНОГО ДВУРОГА"!

- Это похвально, - отвечал скромный автор.

- Ты мне скажи: действительно есть такой аппарат - куммерскоп?

- Нет, аппарата такого нет. Есть работа математика Куммера о Великой Теореме Ферма.

- А скажи, пожалуйста: верно, что эта кривая, то есть двурог, такая уж знаменитая в математическом мире?

- О нет! - отвечал автор. - Кривая эта простая, четвертого порядка. Она в книжке просто приведена для сказки, чтобы тебе не скучно и не так трудно было. Вот и все.

- А треугольник, который меряет кривизну, есть?

- Треугольника тоже нет. Но есть ряд приемов в высшей математике, которые в общей сложности действуют так, как этот волшебный треугольник.

- Значит, тогда я все поняла. В общем, довольно интересно, только иногда немножко трудно. Ты очень уж кратко рассказываешь, как все происходит с интегралами и вероятностями, что за число, которое приходится родственником числу "пи". А как узнать про пояс самых частых землетрясений?

И почему язык тетушки Дразнилки звали "геликоидой"? И вообще все!

- Ну что ж, - отвечал автор, усаживаясь поглубже в кресло, - это все можно рассказать. Только, видишь ли, Васенька, мне сейчас недосуг. Но у меня есть знакомые, очень милые люди, ты можешь к ним отправиться, и они тебе все это расскажут так

хорошо и так интересно, что лучше и быть не может. И ты узнаешь массу любопытнейших вещей. Не только насчет геликоиды, интегралов и вероятностей, а ты узнаешь еще про целые семейства кривых, про градиент, про то, какие вихри бушуют в математических полях. Тебе расскажут, как умножать одну алгебру на другую, про трансверсали, индикатрисы и подеры, скобки Кристофеля и тензоры, интегральные уравнения, бернуллиевы числа, про лист, который вырастил Ренат Картезий, про жука, которого зовут "березовый слоник" и который умеет строить эволюту листа березы, и еще про брахистохрону, обезьянье седло, улитку, матрицы и миноры, тела и идеалы, и много других интересных вещей, в том числе про одну удивительную кривую, которая способна облазить все точки данного квадрата (а точек-то на нем, оказывается, как раз столько, сколько их есть на любой гипотенузе), и как, кстати сказать, эти точки пересчитать, и зачем нужен математикам страшный знак чернокнижников - древнееврейская буква Алеф... А еще про то, как при помощи самых крохотных кирпичиков разобрать, где ты находишься - на плоскости или в шестимерном пространстве, - или еще про одну, совсем уж невероятную на первый взгляд геометрию, и которой разрешается вращать одну сторону угла вокруг его вершины, однако нельзя ее повернуть так, чтобы обе стороны стали продолжением друг друга (в силу чего в геометрии этой справедлива теорема, утверждающая, что обыкновенная прямая может быть перпендикулярна сама к себе!), ну и еще про всякие любопытные вещи, вроде трехлепестковой розы, задачи Дидопы, четырехлепестковой розы, локона Марин Аньези...

- Что это за локон? - спросила Васька с разгоревшимися глазами. - А мне можно будет пойти к этим твоим знакомым?

- Ну конечно! - отвечал автор. - Они только того и дожидаются, чтобы ты к ним пришла! Поезжай на Ленинские горы, там увидишь огромное здание. Войди туда и поищи комнату с надписью "Приемная комиссия". На листке бумаги напиши: "Прошу принять меня на первый курс механико-математического факультета..." А когда сдашь приемные экзамены и поступишь на первый курс, то... не заметишь, как пройдут пять лет, и ты все это будешь знать назубок!

- То есть в университет?

- Вот именно! Ты там будешь не одна, ибо многие наши старательные читатели пойдут учиться в университеты и другие высшие учебные заведения - кто в Москве, а кто и в других городах, потому что на необъятных просторах нашей Родины есть теперь немало высших учебных заведений, куда стремится

попасть наша жадная до знаний молодежь, чтобы в будущем быть полезными гражданами коммунистического общества.

Цена 1р. 22к.

notes

Примечания

1

1 Очерк о Софье Ковалевской можно прочитать в книге «Люди русской науки». М., Физматгиз, 1961, стр. 178.

2

1 Вопрос о том, как надлежит в различных обстоятельствах разуметь и толковать слово «прямо», обсуждается весьма подробно в Схолии Четырнадцатой, так что ты уж, пожалуйста, не удивляйся этому вопросу.

3

1 Загляни, мой хороший читатель, в АЛ-Н, XVI, XVII, XVIII, там все это рассказано очень подробно.

2 Однако, как на грех, при переписке Шэнкс пропустил один нуль, и эту его ошибку обнаружили только в 1948 году. Теперь с помощью электронно-счетных машин найдено уже несколько тысяч знаков числа π.

5

1 АЛ-II, XVI, XVII и XVIII, а в этой книжке - Схолия Девятнадцатая.

6

1 Загляни-ка в книжку А. А. Савелова "Плоские кривые" (М., 1966), там есть кое-что полезное о трисекции.

7

1 Лабиринты были широко известны в древности. На одной из стен засыпанного вулканическим пеплом Везувия города Помпеи нашли выцарапанный план лабиринта с надписью: "Здесь живет Минотавр".

8

1 Кто хочет узнать про Розамундину мышку подробнее, тот пусть возьмет книгу Н. Корбинского и В. Пекелиса "Быстрее мысли". М., "Молодая гвардия", 1959. А по части лабиринтов см. АЛ-1; III, IV, V, VI.

9

1 Есть очень хорошая книга известного польского математика Вацлава Серпинского "Что мы знаем и чего не знаем о простых числах".М., Физматгиз, 1963.

Тот, кто заинтересуется распределением простых чисел среди натурального ряда чисел, может узнать довольно интересные вещи по этому поводу в журнале "Знание - сила" (№ 3 за 1965 год, стр. 38-39, а также последняя страница обложки), где рассказывается о странной спирали из простых чисел, обнаруженной математиком С. Уламом. Эта углообразная спираль (чертится на клетчатой бумаге) обнаруживает ряд совершенно неожиданных правильностей по части разложения простых чисел в натуральном ряду. На этой необычной диаграмме не только самые простые числа, но и промежутки между ними располагаются в виде довольно длинных отрезков, образующих самые замысловатые узоры.

10

1 Есть книга по этим вопросам: М. М. Постников. Магические квадраты. М., "Наука", 1964.

11

1 АЛ-1, XI.

12

1 Если ты, читатель, захочешь познакомиться поближе с Бушмейстером, то вырезай и склеивай его из довольно плотной бумаги, потому что из тонкой бумаги он будет очень эффектно выкидывать свои петли, а разобраться в них будет труднее. Если хочешь, чтобы все тебе было ясно, то не поленись поступить так: при делении Бушмейстера на два раздели сперва (перед тем как склеивать) бумажку пополам вдоль прямой линии на две полоски при помощи карандаша с обеих сторон, затем выкрась левую полоску и красный цвет с одной стороны, а потом ту же полоску и с другой; когда ты теперь повернешь конец бумажки на 180°, чтобы склеить Бушмейстера, у тебя совпадут красная полоска с красной, а белая - с белой. Если ты вздумаешь делить Бушмейстера на три, то крась, начиная слева, первую полоску в красный цвет, среднюю - в синий, а последняя справа останется белой. Так же точно надо сделать с другой стороны, то есть красить в том же порядке, начиная опять слева. Какие ты выберешь краски и как их расположишь - это, конечно, дело твое; важно только, чтобы краски шли на обеих сторонах бумажной полоски в одном и том же порядке, начиная с какого-нибудь определенного края.

13

1 Если ты, любезнейший читатель, будешь делить Бушмейстера на пять частей, то раздели бумажку на пять полосок и, начиная слева, выкрась так: красная, белая, синяя, серая, зеленая. В этом случае бумажку лучше взять длиной 40 см, а шириной 5 см.

14

1 В это время кто-то сказал Илюше на ухо: "Достань себе книжку Г. Радемахера и О. Теплица "Числа и фигуры" и почитай там рассказ двадцать третий о периодических десятичных дробях. Он занимает всего восемнадцать страниц. Если тебе покажется мало, бери "Теорию чисел" И. В. Арнольда. Только там побольше восемнадцати страниц!"

Тут Илюша заметил, что кто-то с ним раскланялся и сел на какую-то длинную палку верхом (а на палке написано: "Ось большая эллиптическая") и со свистом улетел в неизвестность...

Между прочим, в "Архимедовом лете" имеется рассказ о сравнениях (AJI-I, XI) и указания на систему вычетов, то есть остатков при делении на некоторое число. В данном случае возникает вопрос о степенных вычетах, или остатках при делении последовательных степеней числа 10 на знаменатель данной дроби.

15

1 По этому вопросу есть сравнительно доступные книги, например:

Л. А. Калужниц. "Что такое математическая логика". М., "Наука", 1964. В конце этой книжки есть список литературы. Тот, кто заинтересуется этим предметом, в книге Л. А. Калужнина может найти немало интересного.

16

1 Наш дорогой читатель хорошо сделает, если постарается раздобыть книжку Н. Я. Виленкина "Рассказы о множествах", М.,"Наука", 1965

Книжечка небольшая (128 стр.), не очень легкая, но одолеть ее вполне возможно. Там рассмотрены те же примеры, что и здесь приводятся, но есть и еще более интересные и сложные.

17

1 Об этом мы еще потолкуем в Схолии Семнадцатой.
Кривая квадратов натурального ряда.

18

1 В К. Арссньев. Встреча в тайге. Сборник рассказов. М., Детгиз, 1963. Рассказ "13 тундре".

19

1 АЛ-І; XI, 5, 6.

20

1 О том, как Пушкин в юности

Читал охотно Апулея,
а Цицерона не читал,

ты можешь узнать из "Евгения Онегина". А поэма Богдановича так и называется "Душенька".

21

1 У нас есть много хороших книг о Лобачевском. Вот некоторые из них: А. П. Норден. "Элементарное введение в геометрию Лобачевского". М., Гостехиздат, 1953; Б. Н. Делоне. "Элементарное доказательство непротиворечивости планиметрии Лобачевского". М., Гостехиздат, 1956; П. А. Широков и В. Ф. Кагап. "Строение не-евклидовой геометрии". М., Гостехиздат, 1950; А. 11. Котельников и В. А. Фок. "Некоторые применения идей Лобачевского в механике и физике".

22

1 Снимок этой таблетки есть в книге Ван дер Вардена "Пробуждающаяся наука", которую мы уже вспоминали. А таблетке этой примерно три или четыре тысячи лет.

23

1 Это построение называется диагональными числами. Об этом можно прочесть в АЛ-II, XV, 1, 2, 3; XXII, 5. Ныне все это связано с цепными дробями, о которых говорится в АЛ-Н, XXII, XXШ. Этими дробями занимался в XVI веке Рафаэль Бомбелли. Мы с ним еще встретимся.

24

1 См. Схолию Девятнадцатую.

25

1 О спиралях Архимеда можно прочесть в книге "Историко-математические исследования", выпуск VI. М., Гостехиздат, 1953, стр. 623-648; статья И. Г. Башмаковой (*) "Дифференциальные методы в работах Архимеда", § 3-6. См. Схолию Девятнадцатую.

26

1 Все работы Архимеда переведены на русский язык. Если ты достанешь книгу "Сочинения Архимеда", М., Фпзматгиз, 1962, то там на стр. 227 ты найдешь сочинение "О спиралях". В книге имеются подробные комментарии и объяснения. Об Евтокий можно прочесть на стр. 528.

27

1 Наш симпатичный читатель поступит дельно, если раздобудет себе небольшую книжечку "Задачи по элементарной математике", составленную группой преподавателей под руководством чл.-корр. АН СССР И. М. Гельфанда (М., "Наука", 1965). Вся эта серия брошюр ("Библиотечка физико-математической школы") очень полезна для юного математика.

28

1 Об этом подробнее смотри в Схолии Девятнадцатой.

2 В книге Ван-дер-Вардена "Пробуждающаяся наука" в главе VI "Век Платона" много интересного.

30

1 Замечательный римский поэт Публий Овидий Назоп жил в Риме на самом рубеже древней и нашей эры.

Имел он песен дивный дар
И голос, шуму вод подобный...

Так сказал о нем наш дорогой Пушкин в "Цыганах". А в "Евгении Онегине" Пушкин вспоминает о том, как Овидий умер изгнанником:

В Молдавии, в глуши степей,
Вдали Италии своей.

31

1 В Московском музее изобразительных искусств имепи А. С. Пушкива есть его произведения.

32

1 Когда приходится говорить о замечательной деятельности Н. И. Лобачевского, то некоторые обстоятельства его многотрудной жизни до сих пор ставят исследователя в тупик. Есть основания думать, что то тяжкое нравственное одиночество научного работника, в которое был поставлен Лобачевский бессмысленными преследованиями и издевательствами, оказало самое пагубное влияние на всю его жизнь. Обращает на себя внимание такой крайне странный эпизод. В Юрьеве (Дерпте, теперешний Тарту) работал будущий академик Ф. Г. Миндинг, ученик Гаусса. В 1840 году Миндинг печатает в том же самом журнале Крелле статью, где, опираясь на новые работы Гаусса, приходит к некоторым выводам, очень близким к выводам Лобачевского. Но ни замкнувшийся в себе Лобачевский не замечает этой статьи, ни Миндинг не замечает совпадения своих взглядов с идеями Лобачевского!

А Бельтрами отлично замечает это совпадение и на нем, в частности, строит свое оправдание всей геометрии Лобачевского. Так что в сущности признание свое (косвенное, правда!) гениальное произведение Лобачевского получило именно в России...

Но увы! Оно прошло незамеченным, пока не попало через четверть века в руки Бельтрами (см. статью Э. К. Хилькевича "Распространение и развитие идей Лобачевского" в сборнике "Историко-математические исследования", М., Гостехгиз, 1949, вып. II, стр. 179 и далее). В высшей степени любопытно еще и то, что В. И. Ленин в своей работе "Материализм и эмпириокритицизм" (изд. 4, т. 14, стр. 221), критикуя взгляды Гельмгольца, в сущности выступает в защиту великих идей Лобачевского (см. у Хилькевича, стр. 221-222).

33

1 С этим вопросом можно поближе познакомиться по книгам Л. Д. Ландау и Ю. Б. Румер. Что такое теория относительности.

М., "Советская Россия", 1959; А. И. Жуков. Введение в теорию относительности. М., Физматгиз, 1961, § 17 "Отклонение световых лучей в поле тяготения"; Альберт Эйнштейн. Сущность теории относительности. М., ИЛ, 1955; Макс Борн. Эйнштейнова теория относительности М., "Мир", 1964 М. Гарднер. Теория относительности для миллионов. М., Атомиздат, 1965. А если читатель захочет еще кое-что узнать об Эйнштейне, то можно посоветовать еще одну замечательную книгу: А. Эйнштейн. Физика и реальность (*). М., "Наука", 1965 (особенно главу "Творческая автобиография", стр. 131-166).

1 Кто хочет познакомиться с этой теоремой поближе, пусть возьмет книгу Р. Куранта и Г. Роббинса "Что такое математика". М., Гостехиздат, 1947, и разберется во введении к гл. III, в § 4 гл. II, в § 3 гл. V.

35

1 Этой симпатичной моделью мы обязаны В. А. Ефремовичу, в силу чего Радикс, Мнимий, Илюша и даже сам автор этой правдивой книжечки низко ему кланяются и покорнейше благодарят!

1 Читатель наш может найти очень много интересного в книге У У. Сойера "Прелюдия к математике" (М., "Просвещение", 1965).

Это рассказ о некоторых любопытных и удивительных областях математики с предварительным анализом математического склада ума и целей математики. Особенно интересны главы VIII и IX (*).

1 Подробней об арабской алгебре можно узпать в книге А. П. Юшкевича "История математики в средние века". М., Физматгнз, 19Е1, гл. III, "Математика в странах ислама".

38

1 А чертеж сам сделай! Да смотри не ленись!

39

1 См. АЛ-Н, XVI, 2; там показаны дна невсиса, Архимеда и Неморария. LS книге Н. Ф. Четверухина "Геометрические построения и приближения", М., 1935, есть рассказ о геометрических приближениях трисекции угла при помощи "улитки Паскаля" (это не Блез Паскаль, а его отец, Этьен).

1 По этому вопросу см. книгу "Математика, ее содержание, методы и значение". М., АН СССР, 1956, m I, статья Б. Н. Делоне "Алгебра", стр. 257-261.

41

1 Многое может пояснить книжка М. М. Постникова "Теория Галуа" (*) (М., Физматгиз, 1963), однако она требует внимательного чтения. Кроме того, уже упомянутая книжка У. У. Сойера (последние главы, особенно гл. XIV) многое расскажет нашему читателю о замечательных достоинствах теории Эвариста Галуа. Некоторые историки науки полагают, что эта теория открыла новую эпоху в математике.

В маленькой полезной книжке И. Я. Баке Аьмана "Инверсия" (М., "Наука", 19С6, Серия "Популярные лекции по математике", вып. 4) читатель найдет теорему Птолемея (о которой у нас говорится на стр. 445), а также и краткие указания о теореме Галуа (см. стр. 52-54, 65 и далее). О решении кубического уравнения можно узнать из книги Г. М. Шапиро "Высшая алгебра" (М., Учпедгиз, 1938, изд. IV), гл. V, § 2; о симметрических функциях - гл. IV, стр. 123 и 145. Теорема Галуа упоминается в гл. VIII, § 4, стр. 311. Кроме того, мы настоятельно советуем нашему многоуважаемому читателю раздобыть себе прекрасную книгу Г. С. Коксера "Введение в геометрию" (М., "Наука", 1966), где он найдет целый ряд интереснейших вещей, изложенных мастерски и с большим остроумием. А если кому-нибудь вздумается еще кое-что серьезное узнать о великих подвигах комплексных чисел, то можно посоветовать прочитать статью А. П. Юшкевича об определенном интеграле Коши (см. сборник "Труды института истории естествознания", М., АН СССР, 1947, т. I, стр. 373 и далее).

1 Очень много интересного по таким вопросам читатель может найти в книге В. Феллера "Введение в теорию вероятностей и ее приложения". М., "Мир", 1964, второе русское издание; в особенности гл. III {*).

42

Великая Теорема Ферма окончательно доказана в 1994 году Эндрю Уайлсом.